

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РАСТУЩЕЙ ТРЕЩИНЫ

Построены точные решения задачи о поле давления в окрестности идеальной трещины гидроразрыва, развивающейся по корневому закону в проницаемой пористой среде, в том числе и с учетом проникновения жидкости разрыва в пласт.

При исследовании процесса гидравлического разрыва пласта возникает необходимость расчета нестационарного поля давления жидкости в окрестности движущейся трещины гидроразрыва [1, 2]. В предположении, что движение жидкости в пласте вне трещины следует закону Дарси, а пласт и жидкость являются упруго деформируемыми, распределение давления описывается уравнением теплопроводности ("пьезопроводности") [3, 4]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \Delta p \quad (0.1)$$

где коэффициент пьезопроводности k имеет порядок 10^3-10^4 см²/с. Сама трещина в первом приближении может считаться идеальной; тогда это тонкая область ("поверхность"), на которой задано давление p^0 , отличное от начального пластового давления p_0 . Задача заключается в определении закона роста (развития) трещины и нахождении вызванного развитием трещины возмущения поля давления в пласте и, что особенно существенно, для анализа процесса гидравлического разрыва, распределения по поверхности трещины плотности утечек жидкости разрыва (скорости фильтрации). Вообще говоря, эту задачу приходится решать численно.

В данной работе рассматривается несколько частных случаев, в том числе и с учетом оттеснения пластовой жидкости жидкостью разрыва, допускающих автономную постановку и точное решение и, как следствие, достаточно полное исследование. В частности, получено решение задачи о распространении плоской "идеальной" трещины ($p_0 = \text{const}$) в проницаемом пласте. Найденные решения могут оказаться полезными как сами по себе, так и для тестирования более универсальных численных алгоритмов.

1. Постановка задачи. Требуется найти решение уравнения (0.1) в области вне трещины, моделируемой отрезком $|x| \leq l(t)$, $y = 0$ (плоско параллельное течение, случай А) или бесконечно тонким диском $r \leq l(t)$, $z = 0$ (осесимметричное течение, случай Б), в предположении, что на поверхности трещины задано постоянное давление p^0 , а вне нее давление первоначально равно пластовому давлению $p = p_0 = \text{const}$; $p_0 < p^0$. Случай А отвечает развитию длинной вертикальной трещины прямоугольной формы; случай Б соответствует росту круговой горизонтальной трещины в пласте большой толщины. Таким образом, имеем следующие задачи:

задача А

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0$$

$$p(x, y, 0) = p_0, \quad p(x, 0, t) = p^0, \quad |x| \leq l(t); \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad |x| > l(t)$$

задача Б

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < z < \infty$$

$$p(r, z, 0) = p_0, \quad p(r, 0, t) = p^0, \quad r \leq l(t); \quad \frac{\partial p}{\partial z}(r, 0, t) = 0, \quad r > l(t)$$

Здесь использована очевидная симметрия задачи относительно плоскости трещины, благодаря чему производная от давления в направлении, перпендикулярном плоскости трещины ("поток"), на продолжении трещины равна нулю.

Видно, что решения задач А и Б оказываются автомодельными, если границы трещины растут по корневому закону:

$$L(t) = c\sqrt{t}, \quad c = \text{const.}$$

Полагая

$$x = c\xi\sqrt{t}, \quad y = c\eta\sqrt{t}, \quad r = c\rho\sqrt{t}, \quad z = c\zeta\sqrt{t}$$

$$p = (p^0 - p_0)f(\xi, \eta) + p_0 \quad \text{или} \quad p = (p^0 - p_0)\varphi(\rho, \zeta) + p_0$$

получим для $f(\xi, \eta)$ и $\varphi(\rho, \zeta)$ соответственно задачи, которые могут быть записаны в единой форме

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right) + \left(2X + \frac{\varepsilon n}{X} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial X} + 2Y \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0, \quad \varepsilon = 4kc^{-2} \quad (1.1)$$

$$\Phi(X, 0) = 1, \quad |X| \leq 1; \quad \partial \Phi / \partial Y(X, 0) = 0, \quad |X| > 1$$

$$\Phi(X, Y) \rightarrow 0, \quad (X^2 + Y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$$

$$\Phi = \begin{cases} f, & n=0 \\ \varphi, & n=1 \end{cases}, \quad X = \begin{cases} \xi, & n=0 \\ \rho, & n=1 \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} \eta, & n=0 \\ \zeta, & n=1 \end{cases}$$

где $n=0$ для плоской и $n=1$ для осесимметричной трещин.

2. Решение задачи (1.1). Смешанную краевую задачу (1.1) ввиду очевидных условий симметрии относительно осей $X=0$ и $Y=0$ будем решать в области $(0 \leq X < \infty) \cup (0 \leq Y < \infty)$. Перейдем от координат (X, Y) к эллиптическим координатам (u, v) : $X = \text{ch}u \cos v$, $Y = \text{sh}u \sin v$, координатные линии которых представляют собой системы софокусных эллипсов и гипербол с фокусами, расположенными в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. При таком преобразовании область $(0 \leq X < \infty) \cup (0 \leq Y < \infty)$ перейдет в область $(0 \leq u < \infty) \cup (0 \leq v < \pi/2)$.

В эллиптических координатах смешанная краевая задача (1.1) сводится к обычной краевой задаче на полуполосе

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} \right) + (\text{sh} 2u + \varepsilon n \text{th} u) \frac{\partial \Psi}{\partial u} - (\sin 2v + \varepsilon n \text{tg} v) \frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Psi(0, v) = 1, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial v}(u, 0) = \frac{\partial \Psi}{\partial v}\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 < u, \quad \Psi(u, v) \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

где $\Psi(u, v) = \Phi(X, Y)$.

Будем решать задачу методом разделения переменных, тогда общее решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям симметрии, имеет вид

$$\Psi(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(u) V_k(v) \quad (2.3)$$

где $U_k(u)$ и $V_k(v)$ – решения уравнений

$$\varepsilon U_k'' + (\text{sh} 2u + \varepsilon n \text{th} u) U_k' + k^2 U_k = 0, \quad (\varepsilon \omega V_k')' - k^2 \omega V_k = 0, \quad \omega = \cos^n v \exp(\cos v / (2\varepsilon))$$

удовлетворяющие условиям $V_k'(0) = V_k'(\pi/2) = 0$, $U_k(u \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Функции V_k образуют полную ортонормированную систему функций с весом ω на отрезке $[0, \pi/2]$.

Домножим граничное условие на поверхности трещины (первое условие (2.2)) на ωV_k и проинтегрируем от 0 до $\pi/2$. Получим $U_0(0) = 1$, $U_k = 0$, $k > 0$.

Далее будем использовать обозначения $U \equiv U_0(u)$, $V \equiv V_0(v)$ ($V_k(v) \equiv 0$ при $k \geq 1$), и искомое решение находится из краевой задачи

$$\varepsilon U'' + (\text{sh} 2u + \varepsilon n \text{th} u) U' = 0; \quad U(0) = 1, \quad U(u \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

Решение задачи (2.4) дается выражением

$$U(u) = \frac{\Lambda_n(u, \varepsilon)}{\Lambda_n(0, \varepsilon)}, \quad \Lambda_n(u, \varepsilon) = \int_u^\infty \exp\left(-\frac{\operatorname{ch} \lambda}{2\varepsilon}\right) \frac{d\lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \quad (2.5)$$

Постоянные нормировки $\Lambda_n(0, \varepsilon)$ могут быть выражены через функции Макдональда $K_0(z)$, $K_1(z)$ и модифицированные функции Струве $L_0(z)$, $L_1(z)$ нулевого и первого порядков [5] для плоской ($n = 0$) и осесимметричной трещин ($n = 1$)

$$\Lambda_0(0, \varepsilon) = K_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$$

$$\Lambda_1(0, \varepsilon) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\varepsilon} K_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) - \frac{\pi}{4\varepsilon} \left[K_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) L_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) - K_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) L_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) \right]$$

Таким образом, решение краевой задачи (2.4) дается выражением

$$\Phi(X, Y) = \Psi(u, v) = U(u) = \Lambda_n(u, \varepsilon) / \Lambda_n(0, \varepsilon) \quad (2.6)$$

$$u = \operatorname{arsh} \sqrt{\Delta_+}, \quad v = \arcsin \sqrt{\Delta_-},$$

$$\Delta_\pm = (\pm \Delta_0 + \sqrt{\Delta_0^2 + 4Y^2}) / 2, \quad \Delta_0 = X^2 + Y^2 - 1$$

Выражая производную $\partial\Phi/\partial Y$ в эллиптических координатах при учете равенства (2.3), найдем распределение утечек на берегах трещины и полное количество жидкости, проникающее из трещин в пласт в единицу времени (поток), отвечающие решению (2.6),

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \right|_{Y=0, 0 < X < 1} = - \left. \frac{\Xi_n(\varepsilon)}{\sin v} \right|_{u=0, 0 < v < \pi/2} = - \frac{\Xi_n(\varepsilon)}{\sqrt{1-X^2}}, \quad \Xi_n(\varepsilon) = \frac{\exp(-1/(2\varepsilon))}{\Lambda_n(0, \varepsilon)} \quad (2.7)$$

$$Q = 4\pi^n \int_0^1 \left(- \left. \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \right|_{Y=0, 0 < X < 1} X^n \right) dX = 2^n \pi \Xi_n(\varepsilon)$$

Из первого соотношения (2.7) следует, что распределение нормальной производной от давления отличается от распределения для неподвижной трещины лишь нормирующим множителем, что хорошо известно и соответствует точке смены типа граничных условий (вершине трещины).

При малых скоростях распространения трещины $\varepsilon \gg 1$ ($c \ll 1$) имеем

$$\Xi_0(\varepsilon) \sim 1 / \ln(4\varepsilon / \gamma), \quad \Xi_1(\varepsilon) \sim 2 / \pi \quad (2.8)$$

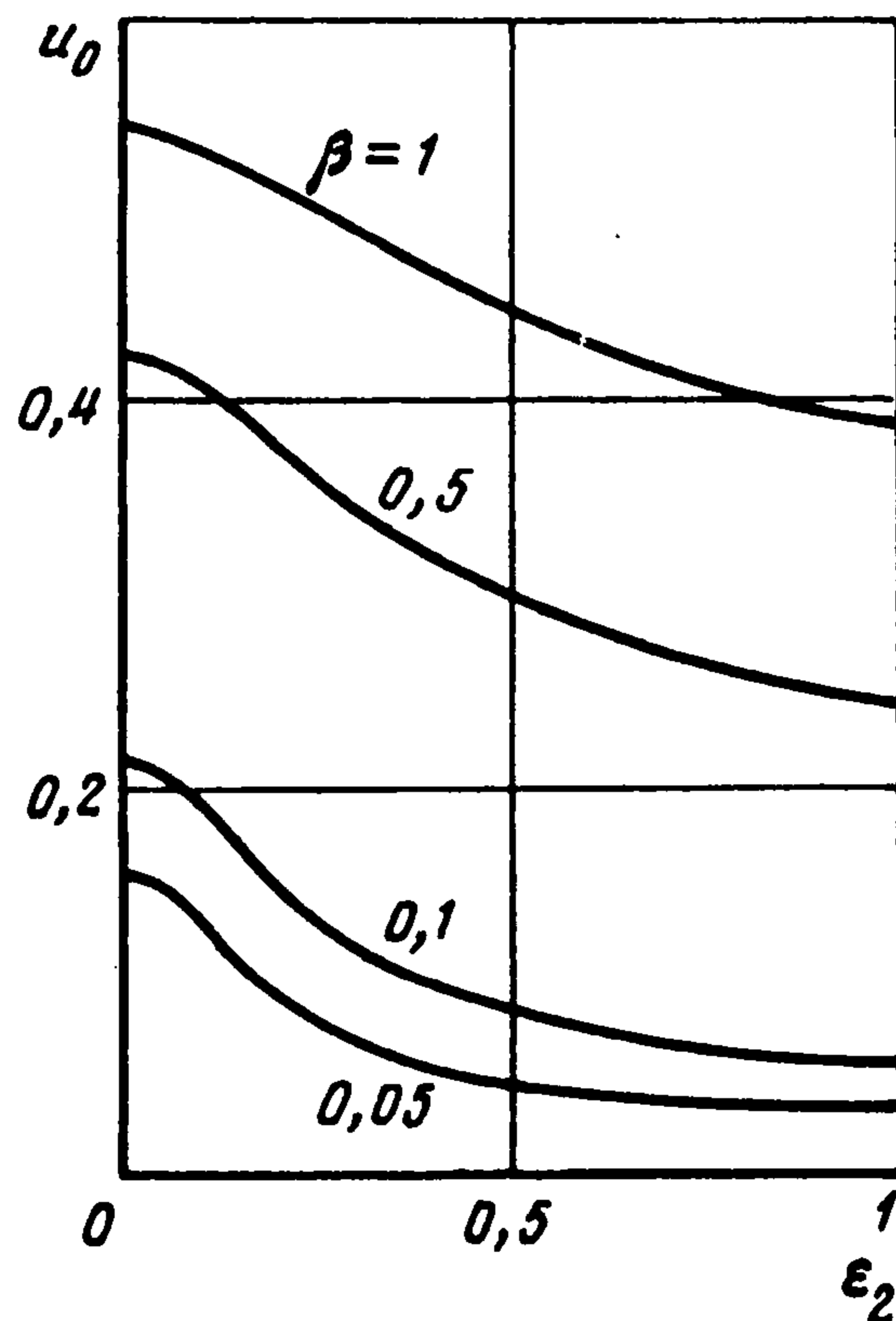
($\gamma = \exp(C)$, $C \approx 0,7772$ – постоянная Эйлера), т.е. нормальная производная от давления на берегах плоской трещины стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow \infty$, что объясняется отсутствием в плоском случае ограниченного на бесконечности стационарного решения, отвечающего течению от трещины. Необходимо либо вводить конечный размер системы, либо учитывать нестационарность процесса.

В другом предельном случае – случае больших скоростей распространения трещины $\varepsilon \ll 1$ ($c \gg 1$) – как для плоской трещины ($n = 0$), так и для осесимметричной трещины ($n = 1$) имеем

$$\Xi_n(\varepsilon) \sim 1 / \sqrt{\pi\varepsilon} \quad (2.9)$$

Это означает распространение по нормали к трещине автомодельной волны давления.

3. Учет вытеснения пластовой жидкости жидкостью разрыва. До сих пор неявно предполагалось, что жидкость разрыва и жидкость в пласте одинаковы. Однако обыч-



но жидкость разрыва обладает существенно большей вязкостью, чем пластовая жидкость, и, проникая в пласт, сильно меняет сопротивление течению вблизи трещины. Рассмотрим теперь случай вытеснения пластовой жидкости жидкостью разрыва в поршневом приближении. Уравнения и краевые условия, описывающие такие течения, совпадают с (1.1), однако коэффициент ϵ теперь является не константой, а кусочно-постоянной функцией

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 = (2\sqrt{k_1}/c)^2 & \text{в области жидкости разрыва} \\ \epsilon_2 = (2\sqrt{k_2}/c)^2 & \text{в области пластовой жидкости} \end{cases} \quad (3.1)$$

На границе зоны должны быть непрерывны давление и нормальная компонента потока.

Вообще говоря, эта постановка ведет к сложной нелинейной задаче взаимодействия кинематических и тепловых волн. Однако простота угаданного выше решения позволяет надеяться, что и эта задача имеет решение с границей раздела в форме растущего эллипса, $u = u_0 = \text{const}$, причем

$$\epsilon(u) = \begin{cases} \epsilon_1 = (2\sqrt{k_1}/c)^2, & u \leq u_0 \\ \epsilon_2 = (2\sqrt{k_2}/c)^2, & u > u_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Оказывается, что такое решение действительно существует. Оно дается выражением

$$\Phi(X, Y) = \Psi(u, v) = U(u) = \Lambda_n(u, \epsilon) / \Lambda_n(0, \epsilon) \quad (3.3)$$

Решая соответствующую краевую задачу (1.1) при учете (3.2) методом разделения переменных (разд. 2), получаем

$$U(u) = \Lambda_n(u, \epsilon) / \Lambda_n(0, \epsilon) \quad (3.4)$$

$$\Lambda_n(u, \epsilon) = \int_u^{u_0} \exp\left(-\frac{\text{ch } \lambda}{2\epsilon_1}\right) \frac{d\lambda}{\text{ch } \lambda} + \int_{u_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\text{ch } \lambda}{2\epsilon_2}\right) \frac{d\lambda}{\text{ch } \lambda}$$

Параметр u_0 , характеризующий границу раздела между жидкостью разрыва и пластовой жидкостью, может быть найден из балансового соотношения

$$2(2\pi)^n \int_0^l \int_0^l v_L(x, t) dx dt = mS; \quad v_L(x, t) = -\frac{2k^0}{\mu} \frac{\partial p(x, 0, t)}{\partial y}, \quad |x| \leq l(t) \quad (3.5)$$

где $v_L(x, t)$ – скорость утечек жидкости разрыва из трещины в пласт, m – пористость и k° – проницаемость пласта, μ – вязкость жидкости разрыва, S – площадь области занятой жидкостью разрыва.

Выражение (3.5) в безразмерных переменных может быть переписано в виде

$$\Lambda_n(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \varepsilon_1^2 \beta \frac{\exp(-1/2\varepsilon_1)}{\operatorname{sh}(2u_0) \operatorname{ch}^n(2u_0)}, \quad \beta = p_0(K_p^{-1} + K_m^{-1}) \quad (3.6)$$

где K_p^{-1}, K_m^{-1} – модули сжимаемости жидкости разрыва и пористой среды соответственно.

Таким образом, параметр $u_0 = u_0(\beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ является корнем трансцендентного уравнения (3.6). Соответствующая зависимость показана на фигуре при $\varepsilon_1 = 1, n = 0$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-0748).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nolte K.G., Smith M.B.* Interpretation of fracturing processes // *J. Petrol. Technol.* 1981. V. 33. № 9. P. 1767–1775.
2. *Reservoir stimulation / Eds: M. J. Economides, K.G. Nolte.* Houston: Schlumberger Educat. Services. 1987. 300 p.
3. *Щелкачев В.Н.* Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М.: Гостоптехиздат, 1959. 468 с.
4. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
5. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.* М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.XII.1996

В декабре 1997 г. выходит в свет двухтомный сборник

А.А. Дородницын

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

Сборник включает работы по обыкновенным дифференциальным уравнениям, метеорологии, аэродинамике крыла, пограничному слою, сверхзвуковым течениям, численным методам для уравнений с частными производными и по информатике, а также биографию и список научных трудов автора.

Справки о приобретении сборника по тел. (095) 135-65-22.