

УДК 539.378

© 1997 г. И.С. Макарова, Л.А. Сараев

**К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО УПРОЧНЕНИЯ
УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА,
НАПОЛНЕННОГО ИДЕАЛЬНО-УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

Предлагается вариант статистического метода осреднения системы уравнений равновесия упругопластического двухкомпонентного композиционного материала для прогнозирования его макроскопического нелинейного упрочнения. Этот вариант в отличие от метода осреднения, разработанного ранее [1, 2], позволяет моделировать и оценивать степень связности матрицы и включений и учитывать неоднородность распределения и развития пластических деформаций. Построены макроскопические определяющие уравнения, описывающие нелинейное упрочнение композита за пределом упругости, и вычислены его эффективные характеристики.

Пусть изотропный двухкомпонентный композиционный материал, упругопластическая матрица и упругие сферические включения которого соединены с идеальной адгезией, занимает объем V , ограниченный поверхностью S . Взаимное расположение компонентов в пространстве описывается индикаторной случайной изотропной функцией координат $\chi(\mathbf{r})$ (равной нулю на множестве точек матрицы V_1 и единице – на множестве точек включений V_2), с помощью которой локальный закон Гука для рассматриваемого композиционного материала можно записать в виде

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2\mu_1(e_{ij}(\mathbf{r}) - e_{ij}^p(\mathbf{r})) + 2[\mu]\chi(\mathbf{r})e_{ij}(\mathbf{r}) \\ \sigma_{kk}(\mathbf{r}) &= (3K_1 + 3[K]\chi(\mathbf{r}))\epsilon_{kk}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{1}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}, \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk}$$

Здесь σ_{ij} , ϵ_{ij} , e_{ij}^p – компоненты тензоров напряжений, полных и пластических деформаций соответственно; μ_s , K_s ($s = 1, 2$) – модули сдвига и объемные модули материалов компонентов; $[f] = f_2 - f_1$. Пластические деформации удовлетворяют условию несжимаемости $e_{kk}^p(\mathbf{r}) = 0$.

Функция $\chi(\mathbf{r})$, напряжения, полные и пластические деформации предполагаются случайными статистическими однородными и эргодическими полями, и их математические ожидания заменяются средними значениями по полному объему V и объемам компонентов V_s [3]:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle f(\mathbf{r}) \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Для определения эффективных модулей упругости композита и вычисления макроскопических остаточных деформаций, измеряемых после снятия нагрузок с его поверхности, следует осреднить локальные уравнения (1) по полному объему V :

$$\begin{aligned}\langle s_{ij} \rangle &= 2\mu_1 \langle e_{ij} - e_{ij}^p \rangle + 2[\mu]c_2 \langle e_{ij} \rangle_2 \\ \langle \sigma_{kk} \rangle &= 3K_1 \langle \epsilon_{kk} \rangle + 3[K]c_2 \langle \epsilon_{kk} \rangle_2\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $c_2 = V_2V^{-1}$ – объемное содержание включений. Выражения, записанные в правых частях соотношений (2) показывают, что для установления эффективного закона Гука необходимо выразить величины $\langle \epsilon_{ij} \rangle_2$ через макроскопические деформации $\langle \epsilon_{ij} \rangle$ с помощью известного соотношения [2]

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle_2 = \langle \epsilon_{ij} \rangle + c_2^{-1} \langle \kappa' \epsilon'_{ij} \rangle \quad (3)$$

Штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V .

Флуктуации тензоров напряжений, полных и пластических деформаций находятся из уравнений (1), (2)

$$\begin{aligned}s'_{ij}(\mathbf{r}) &= 2\mu_1 (e_{ij}(\mathbf{r}) - e_{ij}^p(\mathbf{r}))' + 2[\mu](\kappa(\mathbf{r})e_{ij}(\mathbf{r}) - c_2 \langle e_{ij} \rangle_2) \\ \sigma'_{kk}(\mathbf{r}) &= 3K_1 \epsilon'_{kk}(\mathbf{r}) + 3[K](\kappa(\mathbf{r})\epsilon_{kk}(\mathbf{r}) - c_2 \langle \epsilon_{kk} \rangle_2)\end{aligned}$$

Деформированное состояние упругого изолированного включения при отсутствии пластических деформаций в матрице является однородным и равно своему среднему значению $\langle \epsilon_{ij} \rangle_2$ [3]. При увеличении числа включений и появлении пластических деформаций в объеме V_1 однородность поля деформаций в объеме V_2 нарушается. Тем не менее при статистически однородном распределении микросфер в матрице их влияние друг на друга уравнивается, и деформированное состояние внутри V_2 становится близким к однородному, но его значение будет, естественно, отличаться от среднего значения. Если заменить приближенно в соотношениях для флуктуаций напряжений тензор $\kappa(\mathbf{r})\epsilon_{ij}(\mathbf{r})$ величиной $\kappa(\mathbf{r})\langle \epsilon_{ij} \rangle_2$, то такое допущение в зависимости от знака $[\mu]$ и $[K]$ уменьшает или увеличивает среднюю плотность упругого потенциала в объеме V , что можно компенсировать введением неизвестного параметра χ :

$$\kappa(\mathbf{r})\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) \cong \kappa(\mathbf{r})\chi \langle \epsilon_{ij} \rangle_2.$$

Тогда соотношения для флуктуаций напряжений примут вид:

$$\begin{aligned}s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2\mu_1 (e_{ij}(\mathbf{r}) - e_{ij}^p(\mathbf{r})) + 2[\mu]\kappa(\mathbf{r})\chi \langle e_{ij} \rangle_2 \\ \sigma_{kk}(\mathbf{r}) &= 3K_1 \epsilon_{kk}(\mathbf{r}) + 3[K]\kappa(\mathbf{r})\chi \langle \epsilon_{kk} \rangle_2\end{aligned}\quad (4)$$

Коэффициент χ , характеризующий отличие деформированного состояния включений от своего математического ожидания, описывает взаимодействие включений между собой (связность компонентов).

Для вычисления моментов $\langle \kappa' \epsilon'_{ij} \rangle$ к соотношениям (4) следует присоединить уравнения равновесия

$$\sigma_{ip,p}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5)$$

и формулы Коши

$$2\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) = u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

связывающие компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещений $u_i(\mathbf{r})$. Система уравнений (4)–(6) замкнута относительно напряжений σ_{ij} , полных деформаций ϵ_{ij} и перемещений u_i , пластические деформации ϵ_{ij}^p являются параметрами (предполагается, что в каждой конкретной задаче история нагружения известна).

Граничными условиями для полученной системы служат условия однородности всех величин на поверхности объема V :

$$f(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} = \langle f \rangle$$

С помощью тензора Грина $G_{ik}(\mathbf{r})$ систему уравнений (4)–(6) можно заменить системой интегральных уравнений [2]

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) (2\mu_1 \varepsilon'_{kl}(\mathbf{r}_1) + \chi \langle \tau_{kl} \rangle_2 \kappa'(\mathbf{r}_1)) d\mathbf{r}_1 \quad (7)$$

$$\tau_{kl} = -2[\mu]e_{kl} - \delta_{kl} 3[K]\varepsilon_{pp}$$

Умножение обеих частей уравнений (7) на $\kappa'(\mathbf{r})$ и осреднение по полному объему V дает

$$\langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \rangle = -c_2 \alpha_{ij} + c_1 c_2 (\alpha_1 \langle \tau_{ij} \rangle_2 - \beta_1 \delta_{ij} \langle \tau_{pp} \rangle_2) / 2\mu_1 \quad (8)$$

$$\alpha_1 = \frac{2(4 - 5\nu_1)\chi}{15(1 - \nu_1)}, \quad \beta_1 = \frac{\chi}{15(1 - \nu_1)}, \quad \nu_1 = \frac{3K_1 - 2\mu_1}{6K_1 + 2\mu_1}$$

$$\alpha_{ij} = -\frac{2\mu_1}{c_2} \left\langle \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \kappa'(\mathbf{r}_1) e'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \right\rangle$$

Здесь α_{ij} – компоненты тензора, характеризующего неоднородное распределение и развитие структурных пластических деформаций в матрице, $c_1 = V_1 V^{-1}$ – объемное содержание матрицы.

Подстановка формул (3), (8) в соотношение (2) и выделение девиаторной и объемной частей приводит к эффективному закону Гука для рассматриваемого композиционного материала

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\mu^* (\langle e_{ij} \rangle - e_{ij}^*), \quad \langle \sigma_{pp} \rangle = 3K^* (\langle \varepsilon_{pp} \rangle - \varepsilon_{pp}^*) \quad (9)$$

$$\mu^* = \mu_1 \left(1 + \frac{c_2(m-1)}{1 + c_1 \alpha_1 (m-1)} \right)$$

$$K^* = K_1 \left(1 + \frac{c_2(q-1)}{1 + c_1 \gamma_1 (q-1)} \right)$$

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad q = \frac{K_2}{K_1}, \quad \gamma_1 = \frac{(1 + \nu_1)\chi}{3(1 - \nu_1)}$$

Здесь μ^*, K^* – эффективные сдвиговой и объемный модули композита; ε_{ij}^* – остаточные деформации, которые измеряются после снятия нагрузок с поверхности объема V . Связь остаточных и пластических деформаций определяется из соотношений (2), (3), (8), если в них положить $\langle \sigma_{ij} \rangle = 0$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^*$:

$$\langle e'_{ij} \rangle = m^* (e_{ij}^* - a_{ij}) + a_{ij}, \quad \alpha_{pp} = q^* / (q^* - 1) \varepsilon_{pp}^* \quad (10)$$

$$m^* = \mu^* / \mu_1; \quad q^* = K^* / K_1; \quad a_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{pp}$$

Выражения для эффективных модулей упругости μ^* и K^* существенно зависят от параметра связности χ . При $\chi = 1$ получается модель Кернера для единичной микросферы. Кроме того, в зависимости от знака величин $[\mu]$ и $[K]$ эта модель совпадает либо с верхней, либо с нижней границами Хашина – Штрикмана [3].

Предельное значение $\chi = 0$ соответствует максимальной связности компонентов, при которой эффективные модули совпадают со средними значениями (верхняя граница Фойгта): $\mu^* = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2$, $K^* = K_1 c_1 + K_2 c_2$.

Соотношения (9), (10) показывают, что несмотря на пластическую несжимаемость материала матрицы, в целом композиционный материал приобретает качественно новое свойство – некоторую необратимую сжимаемость, которой не имеют составляющие компоненты в отдельности. Эта сжимаемость обусловлена различием значений объемных модулей K_1, K_2 и исчезает только в том случае, когда $K_1 = K_2$.

Пусть пластические свойства материала матрицы задаются поверхностью текучести Мизеса $s_{ij}(\mathbf{r})s_{ij}(\mathbf{r}) = k^2$, $\mathbf{r} \in V_1$, и ассоциированным с ней законом пластического течения

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = k \frac{\dot{e}_{ij}^p(\mathbf{r})}{\sqrt{\dot{e}_{kl}^p(\mathbf{r})\dot{e}_{kl}^p(\mathbf{r})}}, \quad \mathbf{r} \in V_1 \quad (11)$$

Здесь k – предел текучести материала матрицы на сдвиг, \dot{e}_{ij}^p – скорости пластических деформаций.

Для дальнейшего применения описанного выше метода осреднения нелинейное локальное уравнение (11) необходимо линеаризовать, сделав определенные допущения. Следуя процедуре, описанной ранее [4], будем пренебрегать флуктуациями инварианта тензора скоростей пластических деформаций в пределах объема матрицы V_1 . Тогда закон течения (11) принимает вид

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{k}{\Lambda} \dot{e}_{ij}^p, \quad \mathbf{r} \in V_1, \quad \Lambda = \sqrt{\langle \dot{e}_{kl}^p \dot{e}_{kl}^p \rangle_1} \quad (12)$$

Было показано [4], что сделанное предположение увеличивает среднюю плотность диссипации энергии и для некоторых типов структур приводит к верхним оценкам эффективных констант композитной среды.

Учитывая, что в условиях активного нагружения композита за пределом упругости величина Λ всегда положительна, вводим замену переменной t : $d\tau = \Lambda dt$. Тогда соотношение (12) принимает вид

$$s_{ij} = k de_{ij}^p / d\tau \quad (13)$$

Подставляя в уравнение (13) закон Гука для материала первого компонента, получаем

$$k de_{ij}^p / d\tau = 2\mu_1 (e_{ij}(\mathbf{r}) - e_{ij}^p(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in V_1 \quad (14)$$

Умножая обе части уравнения (14) на величину

$$-2\mu_1 c_2^{-1} G_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \kappa'(\mathbf{r}) d\mathbf{r}_1$$

интегрируя их в области V по переменным \mathbf{r}_1 и \mathbf{r} и используя свойства вторых производных тензора Грина, находим [2]

$$kd\alpha_{ij} / d\tau = 2\mu_1 \gamma_1 (\langle \epsilon_{ij} \rangle_2 - \langle \epsilon_{ij} \rangle) + 2[\mu]c_1 \alpha_1 \langle e_{ij} \rangle_2 + \delta_{ij} [K]c_1 (\alpha_1 - 3\beta_1) \langle \epsilon_{pp} \rangle_2$$

Выделяя отсюда девиаторную и объемную части, а также учитывая формулы (7), (9) и соотношение (3), получаем

$$m^* k \frac{da_{ij}}{d\tau} = \xi \langle s_{ij} \rangle + 2\mu^* \xi e_{ij}^* - 2\mu^* (\xi + \gamma_1) a_{ij}$$

$$\frac{q^* k}{\alpha_1 - 3\beta_1} \frac{d\epsilon_{pp}^*}{d\tau} = (q^* - 1) \left(\frac{qw}{q^*} - 1 \right) \langle \sigma_{pp} \rangle - 3K_2 w \epsilon_{pp}^* \quad (15)$$

$$\xi = c_1 \alpha_1 (m - 1) (1 - \gamma_1) / (1 + c_1 \alpha_1 (m - 1))$$

$$w = 1 / (1 + c_1 \gamma_1 (q - 1))$$

Поскольку в любой точке композиционного материала, как при активном нагружении, так и при разгрузке, напряжения $s_{ij}(\mathbf{r})$ не превосходят величины $kde_{ij}^p(\mathbf{r})/d\tau$, то имеют место неравенства

$$\langle s_{ij} \rangle_s \leq kd \langle e_{ij}^p \rangle_1 / d\tau \quad (s = 1, 2)$$

из которых следует верхняя оценка макроскопического ассоциированного закона течения

$$\langle s_{ij} \rangle = kc_1^{-1} d \langle e_{ij}^p \rangle / d\tau \quad (16)$$

Исключая из соотношений (9), (15), (16) компоненты тензоров $\langle e_{ij}^p \rangle$, a_{ij} , находим эффективные определяющие уравнения композита за пределами упругости

$$p_1 \frac{d \langle s_{ij} \rangle}{d\tau} + p_0 \langle s_{ij} \rangle = q_1 \frac{de_{ij}^*}{d\tau} + q_2 \frac{d^2 e_{ij}^*}{d\tau^2}$$

$$\langle \sigma_{pp} \rangle = n_0 \epsilon_{pp}^* + n_1 \frac{d\epsilon_{pp}^*}{d\tau} \quad (17)$$

Здесь

$$p_0 = 2\mu^* c_1 (\xi + \gamma_1) k^{-1}, \quad p_1 = m^* c_1 + \xi (m^* - 1)$$

$$q_1 = 2\mu^* (\gamma_1 m^* + \xi), \quad q_2 = km^{*2}, \quad n_0 = \frac{3K_2 w q^*}{(q^* - 1)(qw - q^*)}$$

$$n_1 = \frac{kq^{*2}}{(\alpha_1 - 3\beta_1)(q^* - 1)(qw - q^*)}$$

Уравнения нелинейного упрочнения композита за пределом упругости (17) содержат неизвестный параметр связности компонентов χ . Его можно вычислить из уравнений упругого деформирования среды (9), если считать известным экспериментальное значение одного из эффективных модулей упругости композита, например модуль Юнга:

$$\frac{9K^* \mu^*}{3K^* + 2\mu^*} = E_{\text{exp}}^* \quad (18)$$

Полученное отсюда значение χ может использоваться в дальнейшем в нелинейных уравнениях (17), так как при малых деформациях структура композита существенно не изменяется.

Уравнения нелинейного упрочнения (17) необходимо дополнить уравнениями начальной и предельной поверхностей текучести. Поскольку включения всегда находятся в упругом состоянии и являются концентраторами напряжений, то можно

считать, что пластическое течение в матрице начнется вблизи поверхности включений, когда девиаторные компоненты тензора напряжений в области V_2 достигнут предела текучести матрицы: $\langle s_{ij} \rangle_2 \langle s_{ij} \rangle_2 = k^2$, или с учетом закона Гука $4\mu_2 \langle e_{ij} \rangle_2 \langle e_{ij} \rangle_2 = k^2$. Подставляя сюда выражения $\langle e_{ij} \rangle_2 = (1 + c_1 \alpha_1 (m - 1))^{-1} \langle e_{ij} \rangle$ и используя эффективный закон Гука (9), находим начальную макроскопическую поверхность и предел текучести

$$\langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle = k_0^{*2}, \quad k_0^* = km^{-1} (1 + (m - 1)(c_1 \alpha_1 + c_2)) \quad (19)$$

Предельная поверхность текучести композита соответствует пластическим деформациям, значительно превосходящим упругие, поэтому при определении максимального эффективного предела текучести упругими деформациями можно пренебречь. Тогда нахождение предельной поверхности текучести композита сводится к решению жесткопластической задачи для композита с абсолютно жесткими включениями. Связь напряжений и скоростей деформаций в этом случае задается уравнением [4]

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = k\Lambda^{-1} \dot{e}_{ij}(\mathbf{r}) + \langle s_{ij} \rangle_2 \kappa(\mathbf{r}) \quad (20)$$

Макроскопические напряжения получаются после осреднения (20) по полному объему V

$$\langle s_{ij} \rangle = k\Lambda^{-1} \langle \dot{e}_{ij} \rangle + c_2 \langle s_{ij} \rangle_2 \quad (21)$$

Флуктуации напряженно-деформированного состояния при учете параметра связности χ связаны соотношением

$$s'_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{k}{\Lambda} \dot{e}'_{ij}(\mathbf{r}) + \kappa'(\mathbf{r}) \chi \langle s_{ij} \rangle_2 \quad (22)$$

Применение к уравнению (22) описанной выше процедуры определения эффективных свойств композита (5)–(8) вместе с формулой (21) дает

$$\langle s_{ij} \rangle = \frac{k}{\Lambda} \frac{5 - c_1(5 - 2\chi)}{2c_1\chi} \langle \dot{e}_{ij} \rangle \quad (23)$$

Величина Λ находится из известного соотношения для средней плотности диссипации энергии [4]

$$\langle D \rangle = \langle s_{ij} \rangle \langle \dot{e}_{ij} \rangle = k\Lambda \quad (24)$$

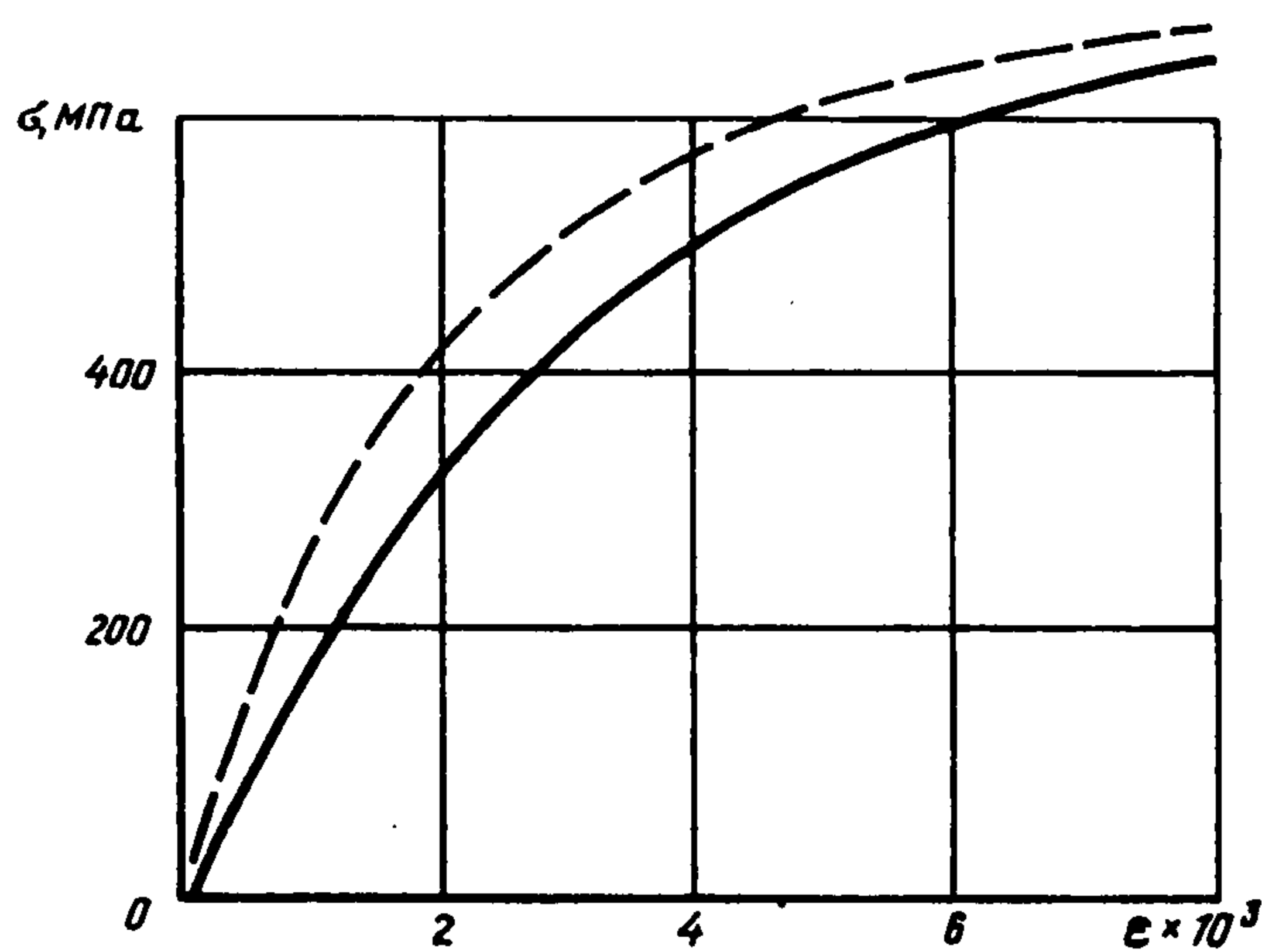
Исключая из соотношений (23), (24) величину Λ , находим макроскопическую предельную поверхность текучести и соответствующий ей эффективный предел текучести

$$\langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle = k_\infty^2, \quad k_\infty = k \left[\frac{5 - c_1(5 - 2\chi)}{2c_1\chi} \right]^{1/2} \quad (25)$$

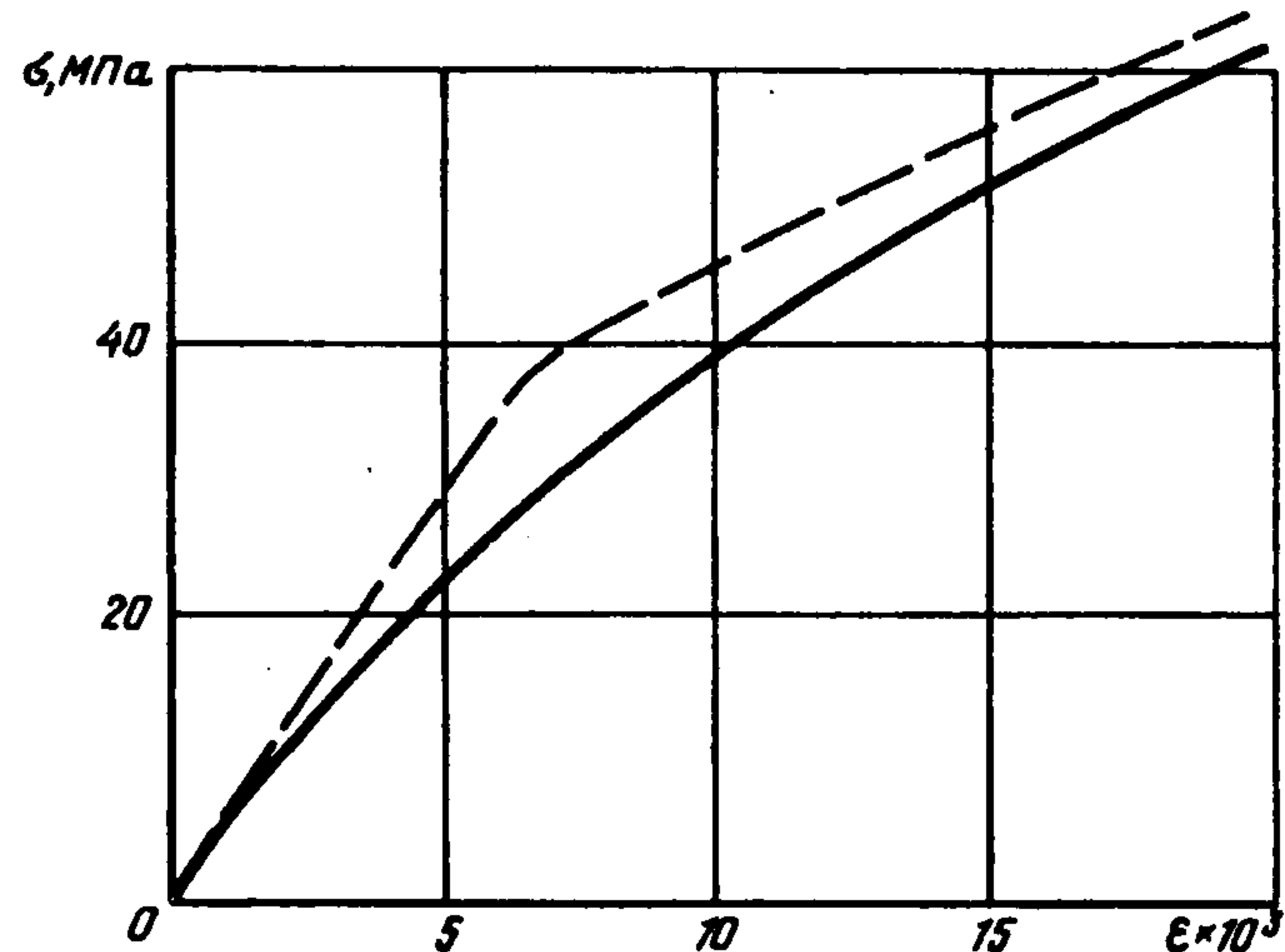
В частности, при $\chi = 1$ формулы (25) совпадают с аналогичными результатами работы [4].

Применим формулы (17), (19), (25) для расчета нелинейного упрочнения композиционного материала в случае простого одноосного нагружения ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$). Для главных значений деформаций имеем $\epsilon_1^* \neq 0$, $\epsilon_2^* = \epsilon_3^*$. В случае простого нагружения остаточные деформации подчиняются закону

$$\epsilon_1^* = \epsilon_1^0 \tau, \quad \epsilon_1^0 = \text{const} \quad (26)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда соотношения (17) принимают вид

$$p_1 \frac{d\sigma_1}{d\tau} + p_0 \sigma_1 = q_1 \left(\varepsilon_1^0 - \frac{d\varepsilon_2^*}{d\tau} \right) - q_2 \frac{d^2\varepsilon_2^*}{d\tau^2}$$

$$\sigma_1 = n_0 (\varepsilon_1^0 \tau + 2\varepsilon_2^*) + n_1 \left(\varepsilon_1^0 + 2 \frac{d\varepsilon_2^*}{d\tau} \right) \quad (27)$$

Исключая из (27) величину σ_1 , получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно ε_2^* с граничными условиями:

$$\frac{d^2\varepsilon_2^*}{d\tau^2} + a_1 \frac{d\varepsilon_2^*}{d\tau} + a_0 \varepsilon_2^* = f_0 \quad (28)$$

$$\varepsilon_2^*(0) = 0, \quad \sigma_1(0) = \sigma_0, \quad \sigma_1(\infty) = \sigma_\infty$$

Здесь

$$a_1 = b_1 + 2b_2, \quad a_0 = \frac{2p_0 n_0}{2p_1 n_1 + q_2}$$

$$b_1 = \frac{q_1}{2p_1 n_1 + q_2}, \quad b_2 = \frac{p_1 n_0 + p_0 n_1}{2p_1 n_1 + q_2}$$

$$f_0 = -\frac{a_0}{2} \varepsilon_1^0 \tau + (b_1 - b_2) \varepsilon_1^0, \quad \sigma_0 = \sqrt{3/2} k_0^*, \quad \sigma_\infty = \sqrt{3/2} k_\infty^*$$

Решение системы (27), (28) дает

$$\varepsilon_1^* = \frac{2p_0}{3q_1} \sigma_\infty \tau, \quad \varepsilon_2^* = \frac{\sigma_\infty}{2n_0} - \frac{p_0}{3q_1} \sigma_\infty \tau + \xi_+(\tau) + \xi_-(\tau) \quad (29)$$

$$\sigma_1 = \sigma_\infty + \eta_+(\tau) + \eta_-(\tau)$$

Здесь

$$\xi_\pm(\tau) = (2n_0 n_1 (r_\pm - r_\mp))^{-1} (\sigma_0 n_0 + n_1 \sigma_\infty r_\mp) \exp(r_\pm \tau)$$

$$\eta_\pm(\tau) = 2(n_0 + n_1 r_\pm) \xi_\pm(\tau)$$

$r_\pm = -a_1/2 \pm \sqrt{(a_1/2)^2 - a_0}$ – корни характеристического уравнения дифференциального уравнения (28).

Исключая из системы (29) параметр τ , находим зависимость между поперечной и продольной остаточными деформациями

$$\varepsilon_2^* = -\nu^*(\varepsilon_1^*)\varepsilon_1^* \quad (30)$$

и закон одноосного нелинейного упрочнения композита за пределом упругости

$$\sigma_1 = E^*(\varepsilon_1^*)\varepsilon_1^* \quad (31)$$

Здесь

$$\nu^*(\varepsilon_1^*) = 1/2 - (\sigma_\infty / (2n_0) + \zeta_+(\varepsilon_1^*) + \zeta_-(\varepsilon_1^*)) / \varepsilon_1^*$$

$$E^*(\varepsilon_1^*) = (\sigma_\infty + \psi_+(\varepsilon_1^*) + \psi_-(\varepsilon_1^*)) / \varepsilon_1^*$$

$$\zeta_\pm(\varepsilon_1^*) = (2n_0n_1(r_\pm - r_\mp))^{-1}(\sigma_0n_0 + n_1\sigma_\infty r_\mp) \exp\left(\frac{3r_\pm q_1 \varepsilon_1^*}{2p_0\sigma_\infty}\right)$$

$$\psi_\pm(\varepsilon_1^*) = 2(n_0 + n_1r_\pm)\zeta_\pm(\varepsilon_1^*)$$

($\nu^*(\varepsilon_1^*)$ – уругопластический коэффициент Пуассона, $E^*(\varepsilon_1^*)$ – модуль пластичности растяжения (сжатия)).

На фиг. 1 приведено сравнение теоретических диаграмм одноосного растяжения образцов композиционного материала на основе медной матрицы и спеченного каркаса из порошка вольфрама (штриховая линия), рассчитанных по формулам (9), (18), (30), (31), с экспериментальными данными, приведенными в [5] (сплошная линия). Расчетные значения механических характеристик: $E_1 = 1,12 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 3,6 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_1 = 0,369$, $\nu_2 = 0,2$, $c_2 = 0,66$, $k = 250$ МПа, $E_{\text{exp}}^* = 2,46 \cdot 10^5$ МПа, вычисленное значение $\chi = 1,406$.

По формулам (9), (18), (30), (31) была также рассчитана диаграмма одноосного растяжения для эпоксидной матрицы, упрочненной стеклянными микросферами. Диаграмма растяжения материала матрицы аппроксимировалась кусочной диаграммой идеально – уругопластического тела. Расчетные значения величин: $E_1 = 0,307 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 7,35 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,45$, $\nu_2 = 0,21$, $c_2 = 0,76$, $k = 69$ МПа, $E_{\text{exp}}^* = 0,613 \cdot 10^4$ МПа, вычисленное значение $\chi = 0,659$.

На фиг. 2 показано сравнение теоретической диаграммы (штриховая линия) с экспериментальной диаграммой (сплошная линия), построенной по данным работы [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сараев Л.А. Эффективные свойства многокомпонентных уругопластических композиционных материалов // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 697–702.
2. Сараев Л.А. Уравнения уругопластического деформирования двухкомпонентного композиционного материала // Моделирование процессов деформирования и разрушения твердых тел. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 86–91.
3. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. Сараев Л.А. Границы эффективных пределов текучести многокомпонентных композиционных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 125–129.
5. Современные композиционные материалы / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. М.: Мир, 1970. 672 с.
6. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.

Самара

Поступила в редакцию
6.IV.1995