

УДК 539.3

© 1997 г. Д.В. Грилицкий, В.И. Паук

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА СТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИ УЧЕТЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

Рассматривается плоская стационарная контактная задача термоупругости при наличии тепловыделения от трения, возникающего при движении бесконечного цилиндрического штампа по поверхности упругого полупространства вдоль своей образующей. Предполагается, что теплообмен между свободной границей полупространства и окружающей средой подчиняется закону Ньютона, а в области взаимодействия тел ставится условие идеального теплового контакта. Задача сводится к системе трех интегральных уравнений относительно тепловых потоков и температуры. Численно изучается влияние тепломеханических свойств цилиндра и полупространства на основные характеристики контакта.

1. Пусть упругий теплопроводящий цилиндр прижимается силой P и скользит вдоль своих образующих с постоянной скоростью V по поверхности упругого теплопроводящего основания (фиг. 1). Вследствие движения цилиндра в области контакта $(-a, a)$ возникают силы трения $\tau_{zy}(x)$, которые подчиняются закону Амонтона и приводят к разогреву трущихся тел. Генерируемое тепло распределяется между ними в зависимости от их свойств и условий контактирования. Вне области контакта осуществляется теплообмен тел с внешней средой по закону Ньютона. Предполагается, что при решении задачи термоупругости для цилиндра его можно заменить полупространством. Считается, что силы трения не влияют на плоскую деформацию полупространства. Термоупругие процессы в телах рассматриваются стационарными.

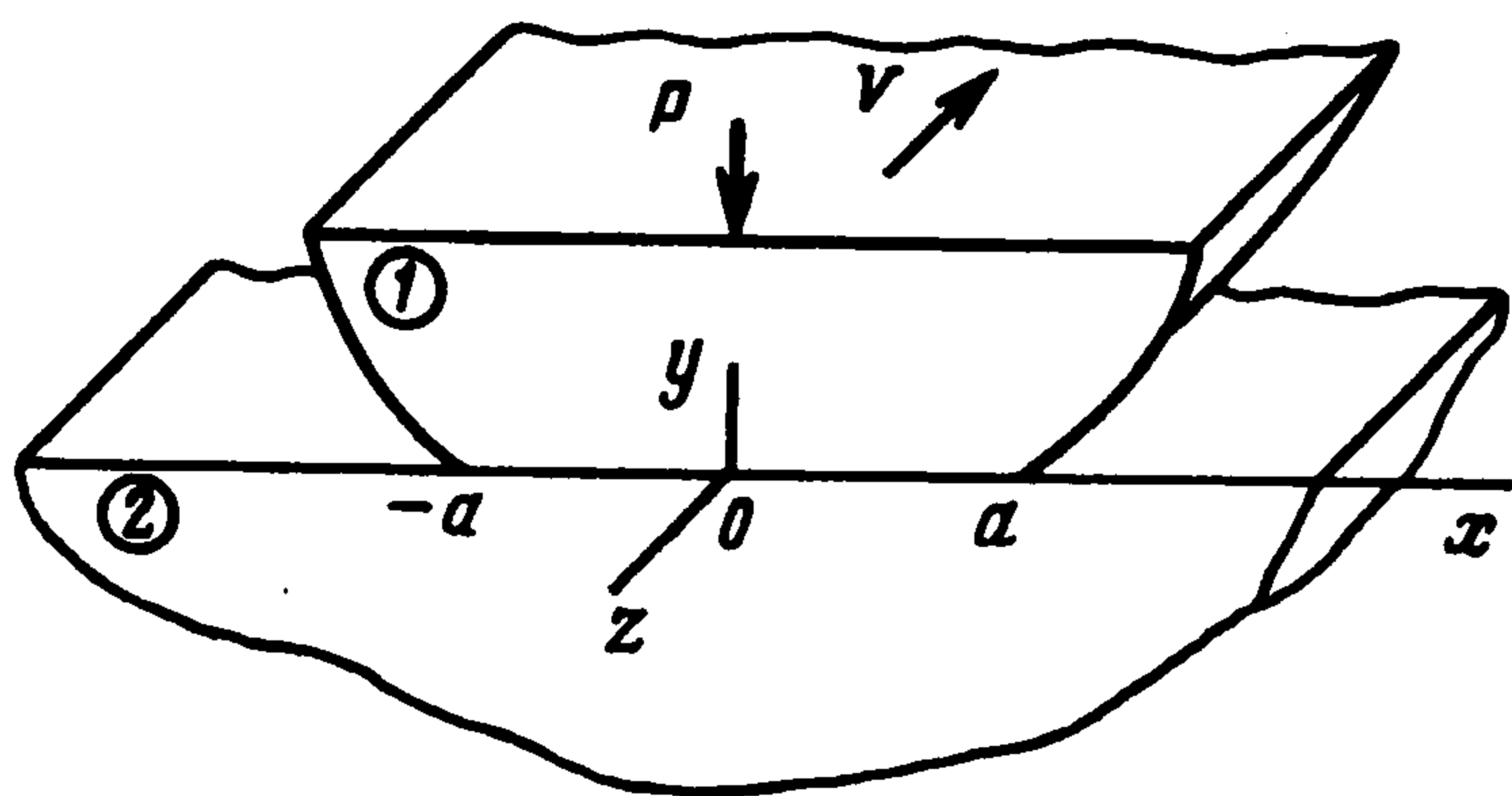
Все характеристики, относящиеся к штампу, отмечаются индексом 1, а к полупространству – индексом 2. При сделанных предположениях требуется определить величину области контакта, распределение контактного давления, тепловых потоков, а также поля температур в соприкасаемых телах.

В математическом плане задача сводится к решению уравнений стационарной термоупругости

$$\begin{aligned} 2(1 - \nu_i) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + (1 - 2\nu_i) \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial y} &= 2(1 + \nu_i) \alpha_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \\ (1 - 2\nu_i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + 2(1 - \nu_i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} &= 2(1 + \nu_i) \alpha_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} &= 0 \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

для штампа ($i = 1$) и для полупространства ($i = 2$) при следующих граничных условиях на линии $y = 0$:

$$q_1(x) + q_2(x) = -V\sigma_{zy}(x), \quad T_1(x) = T_2(x) = T(x), \quad |x| < a \tag{1.2}$$



Фиг. 1

$$(-1)^i K_i \partial T_i / \partial y + h_i T_i(x) = 0, \quad |x| > a \quad (1.3)$$

$$\sigma_{zy}(x) = fp(x), \quad |x| < a \quad (1.4)$$

$$\sigma_{yy}^{(i)}(x) = 0, \quad |x| > a, \quad \sigma_{xy}^{(i)}(x) = 0, \quad |x| < \infty \quad (1.5)$$

$$d(v_1(x) - v_2(x)) / dx = -x / R, \quad |x| < a \quad (1.6)$$

Здесь u_i, v_i – компоненты вектора перемещений; $\sigma_{yy}^{(i)}, \sigma_{xy}^{(i)}, \sigma_{zy}^{(i)}$ – компоненты тензора напряжений; T_i – температура, q_i – тепловой поток; $p(x)$ – контактное давление. Кроме того, $\nu_i, \mu_i, \alpha_i, K_i, h_i$ – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига, коэффициенты линейного температурного расширения, теплопроводности и теплоотдачи для штампа ($i = 1$) и полупространства ($i = 2$); f – коэффициент трения; R – радиус кривизны основания штампа.

2. Применяя к решению задачи (1.1), (1.3), (1.5) преобразование Фурье по переменной x , получаем, что температуры поверхностей контактируемых тел удовлетворяют интегральным уравнениям

$$T_i(x) - \frac{h_i}{\pi K_i} \int_{-a}^a T_i(x') M_i(x - x') dx' = \frac{1}{\pi K_i} \int_{-a}^a q_i(x') M_i(x - x') dx'$$

$$M_i(z) = \int_0^\infty \frac{\cos(\xi z)}{\xi + h_i / K_i} d\xi \quad (2.1)$$

а производные вертикальных термоупругих перемещений поверхностей тел вдоль горизонтальной оси имеют вид

$$(-1)^{i+1} \frac{dv_i}{dx} \frac{1 - \nu_i}{\pi \mu_i} \int_{-a}^a \frac{p(x')}{x - x'} dx' + \frac{\delta_i}{\pi} \int_{-a}^a [q_i(x') + h_i T_i(x')] N_i(x - x') dx'$$

$$N_i(z) = \int_0^\infty \frac{\sin(\xi z)}{\xi + h_i / K_i} d\xi, \quad \delta_i = (1 + \nu_i) \frac{\alpha_i}{K_i} \quad (2.2)$$

Отметим два крайних случая:

а) $h_i = 0$ (теплоизолированные поверхности); устремляя в (2.1), (2.2) коэффициенты h_i к нулю, получаем известные результаты [1, 2]

$$T_i(x) = \frac{1}{\pi K_i} \int_{-a}^a q_i(x') M_0(x, x') dx', \quad M_0(x, x') = -\ln |x - x'| + c_i \quad (2.3)$$

$$(-1)^{i+1} \frac{dv_i}{dx} = \frac{1 - \nu_i}{\pi \mu_i} \int_{-a}^a \frac{p(x')}{x - x'} dx' + \frac{\delta_i}{2} \int_{-a}^a q_i(x') \text{sign}(x - x') dx' \quad (2.4)$$

где $c_i = \text{const}$;

б) $h_i \rightarrow \infty$; тогда условия (1.3) имеют вид

$$T_i(x) = 0, \quad |x| > a$$

и решение задачи, полученное методом парных интегральных уравнений, дается соотношениями, аналогичными (2.3), (2.4) при

$$M_0(x, x') = \text{Arsh} \frac{2a^2 - x^2 - x'^2}{|x^2 - x'^2|} - \text{Arsh}(1) \quad (2.5)$$

В двух крайних случаях задачи производные от вертикальных перемещений совпадают.

Удовлетворим при помощи соотношений (2.2) граничному условию (1.6), используя при этом условия (1.2), (1.4) и преобразовав соотношения (2.1) при учете второго условия (1.2), а затем перейдем к безразмерным величинам

$$x = as, \quad x' = ar, \quad p(x) = \frac{P}{a} p^*(s), \quad T(x) = \frac{fPV}{K_1 + K_2} T^*(s)$$

В результате получим систему трех интегральных уравнений относительно температуры и тепловых потоков (звездочки опускаем)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_1(r) \left[\frac{1}{s-r} - \frac{2fPeH}{1+\delta} N_1(s-r) \right] dr + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_2(r) \left[\frac{1}{s-r} - \frac{2\delta fPeH}{1+\delta} N_2(s-r) \right] dr - \\ & - \frac{2fPeH}{\pi} \int_{-1}^1 T(r) \left[\frac{Bi_1}{(1+K)(1+\delta)} N_1(s-r) + \frac{\delta K Bi_2}{(1+K)(1+\delta)} N_2(s-r) \right] dr = \\ & = \frac{2a^2}{\pi a_n^2} \bar{P}s, \quad |s| < 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$T(s) - \frac{Bi_i}{\pi} \int_{-1}^1 T(r) M_i(s-r) dr - \frac{1+K}{\pi \kappa_i} \int_{-1}^1 q_i(r) M_i(s-r) dr = 0$$

Полученную систему интегральных уравнений необходимо решить при условии равновесия штампа, которое при учете первого условия (1.2) можно записать в безразмерном виде:

$$\int_{-1}^1 q_1(r) dr + \int_{-1}^1 q_2(r) dr = 1 \quad (2.7)$$

Здесь

$$Pe = \frac{Va}{2k_1}, \quad Bi_i = \frac{h_i a}{K_i}, \quad \kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = K, \quad K = \frac{K_2}{K_1}, \quad \delta = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

$$H = K_1(\delta_1 + \delta_2) \left(\frac{1-\nu_1}{\mu_1} + \frac{1-\nu_2}{\mu_2} \right)^{-1}, \quad \bar{P} = \frac{P_n}{P}$$

K_i – коэффициенты теплопроводности тел.

Полудлина области контакта a_n и прижимающая сила P_n в соответствующей задаче Герца связаны соотношением [3]

$$a_n^2 = \frac{2P_n R}{\pi} \left(\frac{1-\nu_1}{\mu_1} + \frac{1-\nu_2}{\mu_2} \right)$$

Ядра системы интегральных уравнений имеют вид

$$M_i(z) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \zeta z}{\zeta + Bi_i} d\zeta, \quad N_i(z) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \zeta z}{\zeta + Bi_i} d\zeta$$

Для их вычислений используются представления через интегральный синус и косинус [4]

$$M_i(z) = -\text{Ci}(|z| Bi_i) \cos(z Bi_i) - \text{si}(|z| Bi_i) \sin(|z| Bi_i)$$

$$N_i(z) = [\text{Ci}(|z| Bi_i) \sin(|z| Bi_i) - \text{si}(|z| Bi_i) \cos(z Bi_i)] \text{sign}(z)$$

Ядра $N_i(z)$ регулярны, а $M_i(z)$ имеют логарифмическую особенность.

В системе интегральных уравнений (2.6) неизвестной является также область контакта. Ее можно определять итерационным путем, проверяя выполнение условия (2.7). Здесь использован более простой путь: задавалась полудлина области контакта (например, $a/a_n = 1$, что соответствует изотермической области контакта), а из системы (2.6), (2.7) определялось отношение \bar{P} , необходимое для поддержания заданной площадки контакта. Такой подход использовался в [2].

После решения системы интегральных уравнений (2.6), (2.7) безразмерное контактное давление определяется из соотношения

$$p(s) = -[q_1(s) + q_2(s)], \quad |s| < 1$$

Считая полупространство абсолютно жестким ($\mu_2 \rightarrow \infty$, $\delta_2 = 0$) и нетеплопроводным ($K_2 = 0$), из (2.6), (2.7) получаем систему двух уравнений задачи для одного тела [5].

3. Из системы интегральных уравнений задачи (2.6), (2.7) видно, что оператор на функции тепловых потоков является оператором Коши первого рода, а на температуру – оператором Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром. Поэтому тепловые потоки представим в виде

$$q_i(s) = \varphi_i(s)(1 - s^2)^{1/2} \quad (3.1)$$

где $\varphi_i(s)$ – регулярные функции, а температуру ищем в пространстве ограниченных функций.

Для дискретизации полученной системы интегральных уравнений используем квадратурные формулы Гаусса–Чебышева [6] для интегралов с тепловыми потоками и квадратурные формулы трапеций для интегралов с температурой. В результате получаем замкнутую систему линейных алгебраических уравнений для определения отношения \bar{P} , а также значений искомых функций $\varphi_i(s)$ и $T(s)$ в дискретных точках области контакта. Полученная система решается на ЭВМ.

4. Входными параметрами задачи являются коэффициенты Био: Bi_1 , Bi_2 , отношения δ и K , а также комплексная характеристика $f \text{ Re } H$. Вместо величины δ удобно рассматривать параметр

$$\kappa = (1 + \delta K) / [(1 + K)(1 + \delta)]$$

роль которого показана ниже.

Для изучения термического контакта тел важное значение имеет коэффициент распределения тепловых потоков между телами

$$q = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{q_1(x) - q_2(x)}{q_1(x) + q_2(x)} dx$$

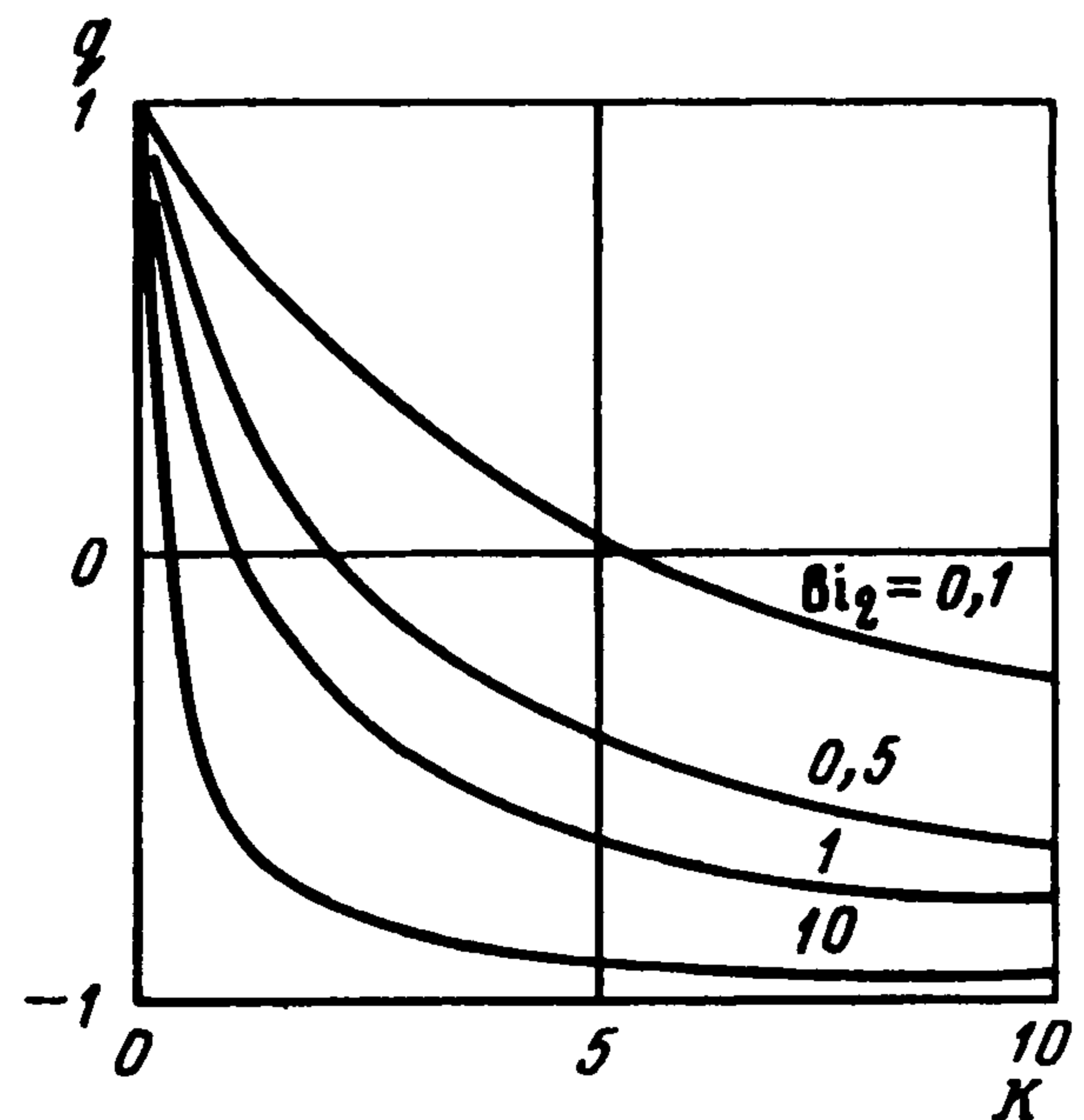
На фиг. 2 приведена его зависимость от параметра K при фиксированном $Bi_1 = 1$ для различных значений коэффициента Bi_2 . В случае $Bi_1 = Bi_2$ из системы интеграль-

ных уравнений (2.6) получаем

$$q = (1 - K)/(1 + K)$$

Фигура 2 показывает, что увеличение теплообмена на свободной поверхности одного из тел приводит к увеличению теплового потока, идущего в то же тело. Проведенные расчеты позволяют подобрать комбинации параметра K и коэффициентов Био для получения необходимого распределения тепловых потоков между телами.

Распределение температуры в области контакта при $Bi_1 = Bi_2$ приведено на фиг. 3, а. Увеличение теплоотдачи приводит к существенному понижению уровня температуры на контакте. Штриховая линия соответствует случаю $Bi_1, Bi_2 \rightarrow \infty$ и показывает распределение температуры, рассчитанное при помощи формул (2.3), (2.5). Отметим, что в другом крайнем случае $Bi_1 = Bi_2 = 0$ температуры в телах могут быть рассчитаны по формуле (2.3) только после задания дополнительного условия, определяющего постоянные c_i . Распределение температуры в случае $Bi_1 = Bi_2$ не зависит от параметра K . Если же постоянные Био разные: $Bi_1 = 1, Bi_2 = 0,1$ (фиг. 3, б), то распределение температуры зависит от отношения коэффициентов теплопроводности тел K . В связи с симметричным характером температуры она приведена только на одной половине контактной зоны.



Фиг. 2

При решении задачи определялось также отношение \bar{P} , которое дает возможность сравнивать величину полученной области контакта с соответствующим решением задачи Герца. Для одного тела при условиях теплоизоляции поверхности вне области контакта было показано [7], что зона контакта меньше, чем в соответствующей задаче Герца. Кроме того, было обнаружено, что существует критическое значение параметра $fRe H$, при котором $\bar{P} = 0$ (т.е. необходимо приложить бесконечно большую силу P , чтобы получить область контакта, такую же, как в задаче без теплообразования). Проведенный здесь численный анализ дает возможность выяснить влияние теплоотдачи на величину \bar{P} , а значит, и на область контакта.

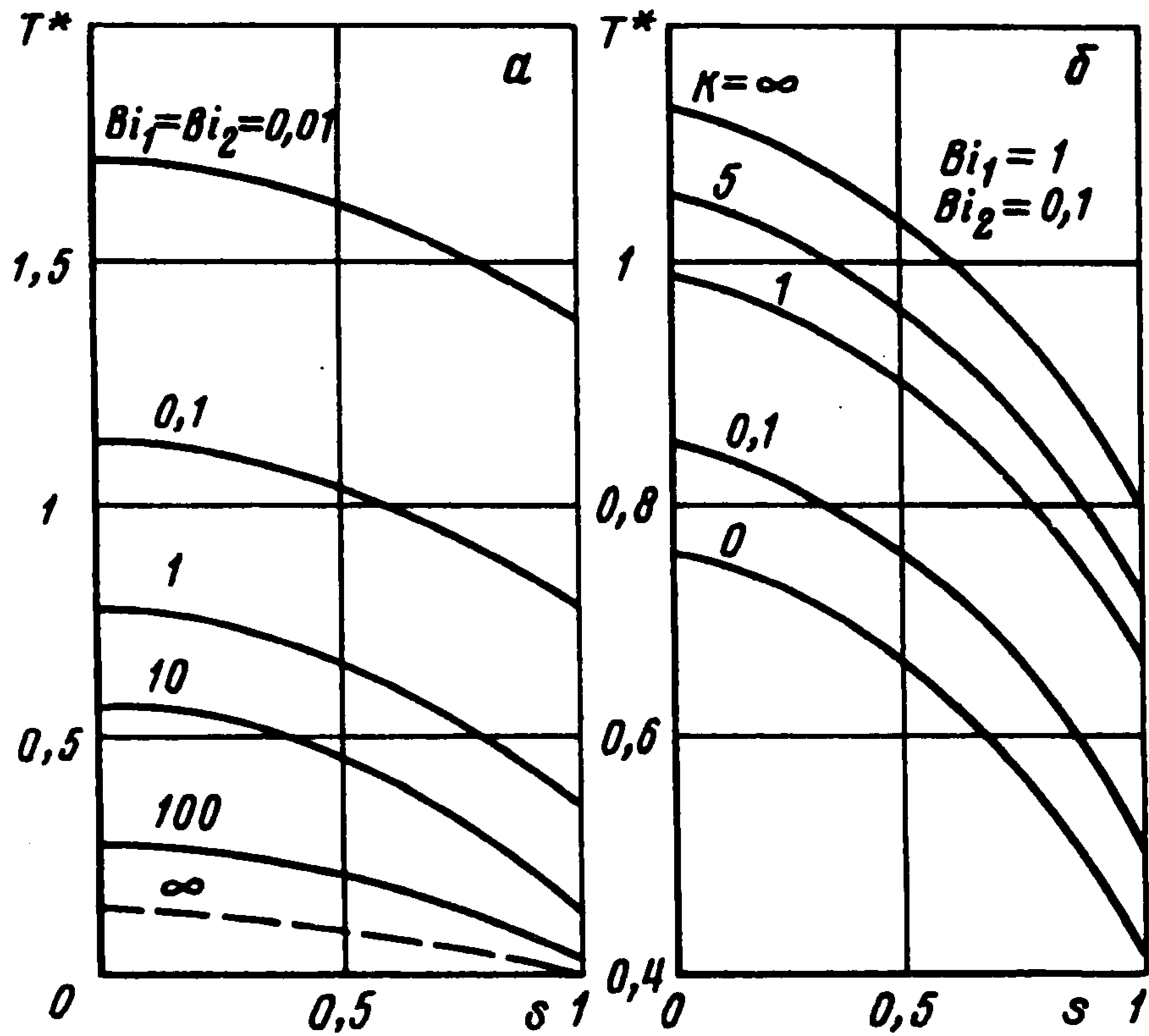
Отметим, что существуют такие комбинации входных параметров задачи, при которых теплоотдача не влияет на величину области контакта. Один из таких случаев получается при $K = 0$ и $\kappa = 1$, что соответствует контакту упругого теплопроводного цилиндра с жестким теплоизолированным основанием.

Второй случай имеет место для всех значений K при $Bi_1 = Bi_2$. Тогда отношение \bar{P} линейно уменьшается с ростом $fRe H$ и кроме того зависит только от параметра κ :

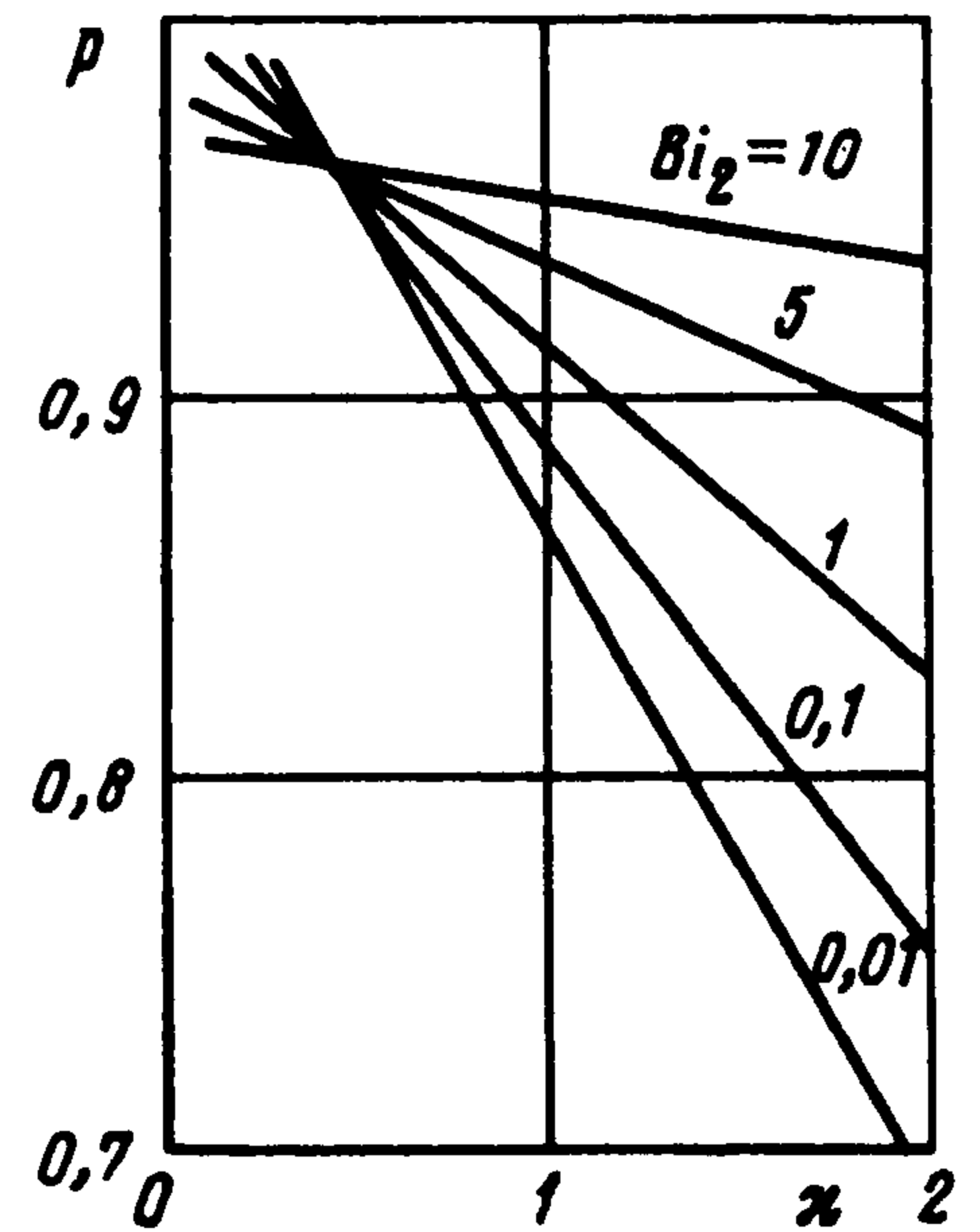
$$\bar{P} = 1 - \kappa fRe H / [fRe H]_0$$

где $[fRe H]_0 = 1,16$ – критическое значение параметра $fRe H$, полученное в [7] для случая одного термоупругого тела. С ростом параметра κ величина \bar{P} уменьшается, следовательно, уменьшается и область контакта.

На фиг. 4 показана зависимость отношения \bar{P} от параметра κ при фиксированных значениях $fRe H = 0,1$ и $Bi_1 = 1$ для различных значений параметра Bi_2 . Видно, что при $\kappa = 0,5$ отношение \bar{P} также не зависит от теплоотдачи, причем это имеет место для всех значений K .



Фиг. 2



Фиг. 3

В общем случае отношение \bar{P} зависит от параметра $f Re H$ линейно:

$$\bar{P} = 1 - f Re H / [f Re H]$$

где критическое значение $[f Re H]$ – функция коэффициентов Bi_i . Влияние теплоотдачи на величину $[f Re H]$ приведено ниже для двух значений параметра κ и $K = 0,5$:

Bi_2	0,01	0,1	1,0	5,0	10,0
$[f Re H]$ при $\kappa = 2,0$	0,33	0,41	0,57	0,84	1,13
$[f Re H]$ при $\kappa = 0,4$	3,64	3,25	2,86	2,63	2,52

При получении этих результатов значение одного параметра Био фиксировалось $Bi_1 = 1$, а параметр Bi_2 изменялся. В случае $\kappa = 2$ увеличение теплоотдачи на поверхности одного из тел приводит к увеличению $[f Re H]$, а значит, к увеличению \bar{P} и области контакта. В другом случае ($\kappa = 0,4$) имеют место противоположные эффекты. Такое явление связано с переходом параметра κ через значение $\kappa = 0,5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлслюй Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
2. Barber J.R. Indentation of the semi-infinite solid by a hot sphere // Int. J. Mech. Sci. 1973. V. 15. P. 813–819.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
4. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
5. Paik V.J. Plane contact problem involving heat generation and radiation // J. Theor. and Appl. Mech. 1994. V. 32, № 4. P. 829–939.
6. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.
7. Barber J.R. Some thermoelastic contact problems involving frictional heating // Q.J. Mech. and Appl. Math. 1976. V. 29. P. 1–13.

Львов

Поступила в редакцию
17.I.1995