

УДК 539.3

© 1997 г. О.Д. Пряхина, О.М. Тукодова, М.Р. Фрейгейт

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД

Дается строгая постановка нестационарной связанной электромеханической задачи о взаимодействии массивного электрода с многослойной пьезоэлектрической средой и предлагается общая формулировка метода ее решения. В качестве примера рассматривается задача для массивного полосового электрода, взаимодействующего с пьезоэлектрической одно-, двух- и трехслойной средой при нестационарном нагружении. Показано влияние электроупругих свойств различных материалов (класса $6mm$ гексагональной сингонии) на смещения электрода и потенциал.

Большинство исследований динамических процессов в электроупругих полугораниченных средах проводятся в предположении, что волновые поля изменяются во времени по гармоническому закону. Однако для практики особый интерес представляет разработка методов решения таких задач при нестационарном электрическом и механическом нагружении пьезоэлектрических сред с учетом их слоистости и массы электрода.

1. Постановка задачи. Рассматривается многослойная пьезоэлектрическая полугораниченная среда, занимающая область $-H \leq z \leq 0$, $-\infty \leq x, y \leq +\infty$, $H = 2(h_1 + \dots + h_N)$, h_i – полутолщина i -го слоя. Нестационарное возбуждение среды осуществляется через одиночный электрод массы m с плоским основанием S , который моделируется жестким штампом. В области контакта S осуществляется полное сцепление. Изменяющаяся во времени t по заданному закону механическая нагрузка, действующая на электрод, приведенная к центру масс с координатами $(0, 0, s)$, разбивается на силовую составляющую $P(t) = \{P_1, P_2, P_3\}$ и момент $M(t) = \{M_1, M_2, M_3\}$. Электрическое возбуждение осуществляется электрическим полем $E(t)$ либо током $I(t)$ по заданному закону. В начальный момент времени система находится в покое. Смещения точек электрода $u^{(0)}(t) = \{u_1^0, u_2^0, u_3^0\}$ определяются в виде $u^{(0)} = u + [\varphi \times r]$, где $u(t) = \{u_1, u_2, u_3\}$, u_1, u_2, u_3 – горизонтальные и вертикальные составляющие смещения центра масс электрода $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ – вектор углов поворота относительно центра масс, $r = \{x_1, x_2, -s\}$ радиус-вектор точек основания электрода.

Уравнения движения твердого тела описываются уравнениями

$$m\ddot{u} = P - Q, \quad J\ddot{\varphi} = M - R$$

где векторы Q, R – усилия и моменты, возникающие в области контакта тела и среды, J – матрица с отличными от нуля только диагональными элементами J_1, J_2, J_3, J_i – главные моменты инерции около осей x_i ; точка означает частную производную по времени t .

Уравнения движения многослойной пьезоэлектрической среды [1, 2] включают в себя линейные уравнения состояния, уравнения движения в напряжениях, уравнения электростатики и соотношения Коши для каждого слоя

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}s_{kl} - e_{kij}E_k, \quad d_i = e_{ikl}s_{kl} + \epsilon_{ik}E_k$$

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j - \rho \ddot{w}_i = 0, \quad \partial d_i / \partial x_i = 0 \quad (1.1)$$

$$s_{kl} = (\partial w_k / \partial x_l + \partial w_l / \partial x_k) / 2, \quad E_k = -\partial \psi / \partial x_k$$

В этих уравнениях для простоты изложения опущен верхний индекс $m = 1, 2, \dots, N$, характеризующий номер соответствующего слоя, σ_{ij}^m – компоненты тензора механических напряжений, s_{ij}^m – компоненты тензора деформаций, E_i^m, d_i^m – компоненты векторов напряженности электрического поля и электрической индукции, w_i^m – компоненты вектора перемещения, ψ^m – электрический потенциал, $c_{ijkl}^m = c_{ijkl}^{mE}$ – компоненты тензора упругих постоянных, измеренных при постоянном электрическом поле, e_{ikl}^m – компоненты тензоров пьезомодулей, $\epsilon_{ik}^m = \epsilon_{ik}^{mS}$ – компоненты тензора диэлектрических проницаемостей при постоянных деформациях, ρ^m – плотность материала. Свойства тензора материальных постоянных описаны в [1] ($i, j, k, l = 1-3$, по повторяющимся индексам проводится суммирование).

Исключая из (1.1) все переменные, кроме w_i и ψ , получаем систему уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} c_{ijkl} \partial^2 w_k / \partial x_l \partial x_j + e_{kij} \partial^2 \psi / \partial x_k \partial x_j - \rho \ddot{w}_i &= 0 \\ e_{ikl} \partial^2 w_k / \partial x_l \partial x_i - \epsilon_{ik} \partial^2 \psi / \partial x_k \partial x_i &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

В дальнейшем наряду с цифровой индексацией координатных осей и векторов, необходимой для тензорной записи, используем и традиционные обозначения $x = \{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$.

К уравнениям (1.2) необходимо добавить начальные и граничные условия задачи. Начальные значения считаем нулевыми. Граничные условия для механических переменных формулируются аналогично условиям в задачах теории упругости.

На поверхности среды $z = 0$ должно выполняться контактное условие

$$w(x, y, 0, t) = u^0(x, y, t) = u + [\varphi \times r], \quad (x, y) \in S$$

Напряжения $q \equiv \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\} \equiv \{q_1, q_2, q_3\}$ вне области контакта S отсутствуют:

$$q(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \notin S$$

Электрические условия на поверхности среды зависят от типа возбуждения.

1°. В случае возбуждения колебаний электрическим полем от генератора напряжения на присоединенном к нему поверхностном электроде задается известное значение потенциала

$$\psi = \psi_0(t), \quad (x, y) \in S$$

2°. Если поверхностный электрод запитывается током известной величины $I(t)$, на нем задается неизвестное значение потенциала $\psi = \psi_0(t)$, которое определяется из условия

$$\dot{D}_3 = I(t), \quad (x, y) \in S$$

Полный заряд на поверхности электрода D_3 определяется через нормальную составляющую вектора электрической индукции

$$D_3 = -\iint_S d_3 dS$$

3°. Если к электроду не подводится и с него не снимается электрическая энергия,

значение $\psi_0(t)$ определяется из условия сохранения заряда

$$\dot{D}_3 = 0, \quad (x, y) \in S$$

На неэлектродированной части поверхности свободные заряды отсутствуют, т.е.

$$d_3 = 0, \quad (x, y) \notin S$$

На границе раздела слоев должны выполняться условия равенства механических смещений, электрического потенциала, а также условия равенства соответствующих компонент упругих напряжений и нормальных компонент электрической индукции:

$$w^m = w^{m+1}, \quad \psi^m = \psi^{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\sigma_{j3}^m = \sigma_{j3}^{m+1}, \quad j = 1-3, \quad d_3^m = d_3^{m+1}, \quad \dot{z} = -2 \sum_{i=1}^m h_i$$

Для пакета пьезоэлектрических слоев, нижняя грань которого заземлена и металлизирована, должны выполняться условия

$$w^N(x, y, -H, t) = 0, \quad \psi^N(x, y, -H, t) = 0$$

Для слоистой среды, сцепленной с полупространством, необходимо добавить условия затухания перемещений и потенциала при $z \rightarrow \infty$:

$$w^N(x, y, z, t) \rightarrow 0, \quad \psi^N(x, y, z, t) \rightarrow 0$$

2. Определяющие соотношения. В дальнейшем введем расширенные векторы $w = \{w_1, w_2, w_3, \psi\}$, $q = \{q_1, q_2, q_3, d_3\}$, $u^0 = \{u_1^0, u_2^0, u_3^0, \psi_0\}$. Уравнения (1.2) после применения интегральных преобразований Лапласа и Фурье по переменным t и x, y при учете начальных и граничных условий задачи сводятся к системе четырех интегральных уравнений первого рода

$$\iint_S \mathbf{k}(x-\xi, y-\zeta, p) \mathbf{q}(\xi, \zeta, p) d\xi d\zeta = \mathbf{u}^0(x, y, p), \quad (x, y) \in S \quad (2.1)$$

$$\mathbf{k}(x, y, p) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\sigma_1 \sigma_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta, 0, p) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

относительно неизвестного вектора q ; α, β – параметры преобразования Фурье, p – Лапласа.

Матрица – функция $\mathbf{K}(\alpha, \beta, z, p)$ определяется типом среды и для слоистых сред имеет тот же вид, что и в соответствующих задачах об установившихся колебаниях при замене частоты колебаний ω на ip .

Для пьезоэлектрической среды класса бтт гексагональной сингонии матрица \mathbf{K} имеет структуру

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} \alpha^2 M_1 + \beta^2 N & \alpha\beta(M_1 - N) & i\alpha M_2 & i\alpha M_3 \\ \alpha\beta(M_1 - N) & \beta^2 M_1 + \alpha^2 N & i\beta M_2 & i\beta M_3 \\ -i\alpha K_1 & -i\beta K_1 & K_2 & K_3 \\ -i\alpha R_1 & -i\beta R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

Отметим, что при $z = 0$ имеем $K_1 = M_2$, $R_1 = M_3$, $K_3 = R_2$; M_i, K_i, R_i, N – четные функции параметров λ , $\omega = ip(\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2)$ и регулярны на вещественной оси всюду за исключением одних и тех же для всех этих функций полюсов $\lambda = \pm p_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Контуры интегрирования σ_1, σ_2 выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [3]. При указанных свойствах ядер система (2.1) однозначно разрешима в пространстве L_p в области $S(p > 1)$. Критерии единственности определены в [3, 4].

Обозначим $q^k \{q_1^k, q_2^k, q_3^k, d_3^k\}$ ($k = 1, \dots, 7$) – решения системы интегральных уравнений (2.1) для правой части, когда отлична от нуля лишь одна из компонент $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_0$, при этом имеющая единичное значение. Соответствующие усилия и моменты, возникающие в области контакта электрода и среды, и полные заряды на электроде определяются формулами (интегрирование по поверхности контакта S)

$$R_1^k = \iint (q_3^k x_2 + q_2^k s) dS, \quad R_2^k = \iint (-q_1^k s - q_3^k x_1) dS, \quad R_3^k = \iint (q_2^k x_1 - q_1^k x_2) dS$$

$$Q_i^k = \iint q_i^k dS, \quad i = 1, 2, 3, \quad D_3^k = \iint d_3^k dS \quad (2.3)$$

Отметим, что $q_i^k, Q_i^k, R_i^k, d_3^k, D_3^k$ – функции параметра $p = -i\omega$, что составляет существенную особенность рассматриваемых задач.

Уравнения движения штампа в преобразованиях Лапласа и при учете (2.3) запишем в виде

$$mp^2 u_i = P_i - \sum_{k=1}^3 Q_i^k u_k - \sum_{k=4}^6 Q_i^k \varphi_{k-3} - \psi_0 Q_i^7$$

$$J_i p^2 \varphi_i = M_i - \sum_{k=1}^3 R_i^k u_k - \sum_{k=4}^6 R_i^k \varphi_{k-3} - \psi_0 R_i^7, \quad i = 1-3 \quad (2.4)$$

В зависимости от типа электрического возбуждения в уравнениях (2.4) ψ – заданная величина в случае использования электрических граничных условий 1°, либо неизвестная (условия 2°, 3°). В первом случае система (2.4) содержит шесть неизвестных u_i, φ_i . Во втором случае к уравнениям следует добавить

$$I(p) = -p \left(\sum_{k=1}^3 D_3^k u_k + \sum_{k=4}^6 D_3^k \varphi_{k-3} + \psi_0 D_3^7 \right) \quad (2.5)$$

В итоге получаем систему семи уравнений относительно семи неизвестных u_i, φ_i, ψ_0 .

3. Построение матрицы-функции Грина для многослойной среды. Пусть среда представляет собой пакет из N электроупругих слоев, жестко соединенных между собой, толщины $H = 2(h_1 + \dots + h_N)$ с жестко заземленной нижней гранью и занимает область $-H \leq z \leq 0, -\infty \leq x, y \leq +\infty$.

Введем локальную систему координат для каждого слоя

$$z_k = z + 2 \sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Произведем формальное разделение слоев. Тогда смещение точек k -го слоя w_i^k ($i = 1-3$) и электрический потенциал $w_4^k = \psi$ будут определяться выражением

$$w^k(z_k) = \mathbf{B}_+(z_k) \mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{B}_-(z_k) \mathbf{Q}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

где $\mathbf{Q}_k = \{Q_1, Q_2, Q_3, D_3\}$ – вектор, компоненты которого – усилия и электрическая индукция, характеризующие взаимодействие между слоями, \mathbf{Q}_0 – вектор, заданный на поверхности среды.

Матрицы $\mathbf{B}_{\pm}(z_k)$ строятся методом собственных векторных функций [5] и имеют структуру вида (2.2), подробно описанную [6]. Элементы этих матриц содержат упругие, пьезо- и диэлектрические модули k -го слоя и для конкретных типов сред приведены в [6–8]. Преимущество использования такого представления для каждого слоя

(3.1) состоит в отсутствии в решении для многослойной среды растущих экспоненциальных составляющих, что позволяет исследовать среды с произвольным количеством слоев, каждый из которых может обладать сложными физико-механическими свойствами.

Выпишем условия стыковки слоев

$$\mathbf{w}^k(-h_k) = \mathbf{w}^{k+1}(h_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2)$$

и условие на нижней грани пакета слоев

$$\mathbf{w}^N(-h_N) = 0 \quad (3.3)$$

Из (3.2) имеем рекуррентное соотношение

$$\mathbf{B}_+(-h_k)\mathbf{Q}_{k-1} + [\mathbf{B}_-(-h_k) - \mathbf{B}_+(h_{k+1})]\mathbf{Q}_k = \mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{Q}_{k+1} \quad (3.4)$$

Из (3.3) определяем

$$\mathbf{Q}_N = -\mathbf{B}_-^{-1}(-h_N)\mathbf{B}_+(-h_N)\mathbf{Q}_{N-1} \quad (3.5)$$

Используя (3.4), (3.5), выражаем \mathbf{Q}_k через поверхностную нагрузку \mathbf{Q}_0 :

$$\mathbf{Q}_k = (-1)^k \prod_{i=k}^1 \mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{B}_+(-h_i) \mathbf{Q}_0, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad \mathbf{F}_N = \mathbf{B}_-(-h_N)$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{B}_-(-h_k) - \mathbf{B}_+(h_{k+1}) + \mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{F}_{k+1}^{-1}\mathbf{B}_+(-h_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

В результате перемещения точек многослойной среды и электрический потенциал будут определяться выражением

$$\mathbf{w}(z) = \mathbf{K}(\alpha, \beta, z, p) \mathbf{Q}_0, \quad z = z_k - 2 \sum_{i=1}^{k-1} h_i - h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\mathbf{K}(\alpha, \beta, z, p) = (-1)^{k-1} [\mathbf{B}_+(z_k) - \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{B}_+(-h_k)] \prod_{i=k-1}^1 \mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{B}_+(-h_i)$$

Решение задачи о многослойной среде, жестко сцепленной с полупространством легко получить, устремив толщину нижнего слоя к бесконечности, заменив при этом систему координат $z^* = z_N - h_N$. Произведя предельный переход, получим

$$\mathbf{F}_N = 0, \quad \mathbf{F}_{N-1} = \mathbf{B}_-(-h_{N-1}) - \mathbf{B}_+^\infty(0)$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{B}_-(-h_k) - \mathbf{B}_+(h_{k+1}) + \mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{F}_{k+1}^{-1}\mathbf{B}_+(-h_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-2$$

$$z = z_k - 2 \sum_{i=1}^{k-1} h_i - h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \quad z = z^* - 2 \sum_{i=1}^{N-1} h_i, \quad k = N$$

4. Решение контактной задачи. Для отыскания \mathbf{u}^0 , φ , ψ_0 необходимо найти функционалы \mathbf{R}^k , \mathbf{Q}^k , D_3^k , которые связаны с фундаментальными решениями системы интегральных уравнений (2.1) \mathbf{q}^k соотношениями (2.3). Решения $\mathbf{q}^k = \{q_1, q_2, q_3, d_3\}$ строятся методом фиктивного поглощения, который позволяет аналитически учесть все особенности на границе области S .

Согласно методу фиктивного поглощения решение системы интегральных уравнений (2.1) $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ ищем в виде

$$\mathbf{q}(x, y) = \mathbf{p}_0(x, y) + \mathbf{p}_*(x, y) \quad (4.1)$$

Неизвестная функция $\mathbf{p}_*(x, y)$ подбирается из условия равенства функционалов

$$V\mathbf{q}(\pm\alpha_m, \pm\beta_l) = V\mathbf{p}_0(\pm\alpha_m, \pm\beta_l), \quad p_m^2 = \alpha_m^2 + \beta_l^2, \quad m, l = 1, 2, \dots, n$$

Здесь

$$V(\alpha, \beta)f(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

$$V^{-1}(x, y)F(\alpha, \beta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta)e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

$\pm p_m$ – полюса, одни и те же для всех элементов матрицы $K(\alpha, \beta)$.

Вектор – функция $p_*(x, y)$ содержит при своем построении некоторый произвол, который устраняется в окончательном решении всей задачи [4].

Пусть для определенности область S представляет собой прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ ($|x| \leq a, |y| \leq b$). Тогда в качестве $p_*(x, y)$ можно взять дельта-функции Дирака с носителями в точках x_i, y_j

$$p_*(x, y) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} C_{ij} \delta(x - x_i, y - y_j)$$

$C_{ij} = \{c_{ij}^1, c_{ij}^2, c_{ij}^3, c_{ij}^4\}$ – подлежащие определению неизвестные постоянные. $x_i = \pm x_i^0$, $y_j = \pm y_j^0$, x_i^0, y_j^0 – точки, делящие область S_0 ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) на равные прямоугольники.

Представим матрицу $K(\alpha, \beta)$ в виде

$$K(\alpha, \beta) = S(\alpha, \beta) \Pi(\alpha, \beta); \Pi(\alpha, \beta) = E + \Pi_0(\alpha, \beta), \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 \quad (4.2)$$

E – единичная матрица, $\Pi(\alpha, \beta)$ – матрица, элементы которой содержат все особенности элементов матрицы $K(\alpha, \beta)$, $S(\alpha, \beta)$ имеет в качестве элементов убывающие на бесконечности функции при $\lambda \rightarrow \infty$, которые не содержат особенностей на вещественной оси [4].

Введем новую неизвестную вектор – функцию $t(x, y)$ соотношением

$$V(\alpha, \beta)t(x, y) = \Pi(\alpha, \beta)V(\alpha, \beta)p_0(x, y) \quad (4.3)$$

что соответствует

$$T(\alpha, \beta) = \Pi(\alpha, \beta)P_0(\alpha, \beta)$$

В результате система интегральных уравнений (2.1) после постановки (4.1), (4.2) и при учете (4.3) преобразуется к виду

$$K_0 t = \iint_S k_0(x - \xi, y - \zeta)t(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = g(x, y), \quad (x, y) \in S \quad (4.4)$$

$$k_0(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} S(\alpha, \beta)e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

$$g(x, y) = f(x, y) - \frac{1}{4\pi^2} \iint_S k(x - \xi, y - \zeta)p_*(\xi, \zeta) d\xi d\zeta$$

Для прямоугольной области контакта

$$g(x, y) = f(x, y) - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} k(x - x_i, y - y_j)C_{ij}$$

Наиболее важной частью метода фиктивного поглощения является построение оператора K_0 , описывающего поведение волн в средах с сильным поглощением, либо возникающим при решении задач типа статических, так как $S(\alpha, \beta)$ не содержит особенностей на вещественной оси и убывает степенным образом на бесконечности.

Не нарушая общности, положим $f(x, y) = Ae^{-\eta_1 x - \eta_2 y}$, η_1, η_2 – постоянные, $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ и пусть $t_\eta(x, y) = \chi_\eta(x, y)A$ – решение $K_0 t = f$, построенное одним из многочисленных методов решения для задач статики или для сред с сильным затуханием (метод факторизации, асимптотические методы, методы ортогональных полиномов и др. [3, 4, 9–11]). Тогда, используя принцип суперпозиции, можно убедиться, что решением системы (2.1) $Kq = f$ является вектор-функция

$$q(x, y) = \left\{ \chi_\eta(x, y) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} (\Pi^{-1}(\alpha, \beta) - E) X_\eta(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \right\} A - \\ - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \left\{ \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \Pi^{-1}(\alpha, \beta) L_{ij}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} + \right. \\ \left. + (\Pi^{-1}(\alpha, \beta) - E) e^{-i(\alpha(x-x_i) + \beta(y-y_j))} d\alpha d\beta \right\} C_{ij} \quad (4.5)$$

$$L_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{S^{-1}(\alpha, \beta)}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} (K(\eta_1, \eta_2) - S(\eta_1, \eta_2)) S(\alpha, \beta) X_\eta(\alpha, \beta) e^{i(\eta_1 x_i + \eta_2 y_j)} d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.6)$$

Соответственно

$$Q(\alpha, \beta) = Vq(x, y) = \Pi^{-1}(\alpha, \beta) \left\{ X_\eta(\alpha, \beta) A - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} L_{ij}^*(\alpha, \beta) C_{ij} \right\} \quad (4.7)$$

$$L_{ij}^*(\alpha, \beta) = L_{ij}(\alpha, \beta) - (\Pi(\alpha, \beta) - E) e^{i(\alpha x_i + \beta y_j)}, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 = \eta^2$$

Отметим, что $L_{ij}^*(\alpha, \beta)$ и интегралы в решении (4.5), (4.6) вычисляются по теории вычетов и формулам операционного исчисления.

Из (4.3) следует

$$p_0 = V^{-1}(x, y) \Pi^{-1}(\alpha, \beta) T(\alpha, \beta)$$

Для того чтобы вектор-функция p_0 была из L_p и имела носитель лишь в области S , согласно методу фиктивного поглощения должны выполняться соотношения

$$T(\pm\alpha_k, \pm\beta_m) = 0, \quad \alpha_k^2 + \beta_m^2 = z_k^2, \quad m, k = 1, 2, \dots, n$$

где $\pm z_k$ – полюса обратной матрицы $\Pi^{-1}(\alpha, \beta)$, одни и те же для всех элементов матрицы.

В результате имеем систему алгебраических уравнений для определения вектора C_{ij}

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} L_{ij}^*(\alpha_k, \beta_m) C_{ij} = T_\eta(\alpha_k, \beta_m), \quad \alpha_k = \pm \sqrt{z_k^2 - \beta_m^2}$$

Для построения приближенного решения требуется выполнение соотношения лишь при дискретных значениях $\beta_m = \pm m$.

5. Окончательное решение задачи. Функционалы Q^k, R^k, D_3^k в (2.4), (2.5) связаны с решением (4.7) уравнения $Kq = Ae^{-\eta_1 x - \eta_2 y}$ следующими соотношениями:

$$Q^1 = Q, \quad A = \{1, 0, 0, 0\}, \quad Q^2 = Q, \quad A = \{0, 1, 0, 0\}$$

$$Q^3 = Q, \quad A = \{0, 0, 1, 0\}, \quad Q^7 = Q, \quad A = \{0, 0, 0, 1\}$$

$$Q^4 = i \frac{\partial Q^3}{\partial \eta_2} + s Q^2, \quad Q^5 = -i \frac{\partial Q^3}{\partial \eta_1} - s Q^1, \quad Q^6 = -i \frac{\partial Q^1}{\partial \eta_2} + i \frac{\partial Q^2}{\partial \eta_1}$$

$$R_1^k = -i \frac{\partial Q_3^k}{\partial \beta} + s Q_2^k, \quad R_2^k = i \frac{\partial Q_3^k}{\partial \alpha} - s Q_1^k, \quad R_3^k = -i \frac{\partial Q_2^k}{\partial \alpha} + i \frac{\partial Q_1^k}{\partial \beta}$$

$$k = 1, \dots, 7$$

При этом всюду в формулах $Q(\alpha, \beta) \equiv Q(\alpha, \beta, \eta_1, \eta_2)$ следует положить $\alpha = \beta = \eta_1 = \eta_2 = 0$.

После определения функционалов, находим смещения центра масс $u_i(p)$, углы поворота электрода $\varphi_i(p)$ и электрический потенциал $\psi_0(p)$ из системы (2.4) – (2.5).

Реакция основания $Q_i(p)$, моменты $R_i(p)$, напряжения $q_i(x, y, p)$ в области контакта S , полный заряд $D_3(p)$ и электрическая индукция $d_3(x, y, p)$ будут определяться выражениями

$$f(p) = \sum_{k=1}^3 f^k u_k + \sum_{k=4}^6 f^k \varphi_{k-3} + \psi_0 f^7, \quad f = f(q_i, Q_i, R_i, d_3, D_3)$$

Для определения перемещений точек среды w_i и потенциала ψ необходимо воспользоваться выражением

$$w(x, y, z, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{\sigma_1 \sigma_2} K(\alpha, \beta, z, p) Q(\alpha, \beta, p) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

$$w = \{w_1, w_2, w_3, \psi\}$$

Методом фиктивного поглощения эти интегралы приводятся к виду

$$w(x, y, z, p) = - \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \operatorname{Res}_{\substack{\operatorname{Im} \alpha_m \leq 0 \\ \operatorname{Im} \beta_l \leq 0}} [K(\alpha_m, \beta_l, z, p)] P_*(\alpha_m, \beta_l, p) e^{-i(\alpha_m x + \beta_l y)}$$

Для прямоугольной области контакта имеем

$$w(x, y, z, p) = - \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \operatorname{Res}_{\substack{\operatorname{Im} \alpha_m \leq 0 \\ \operatorname{Im} \beta_l \leq 0}} [K(\alpha_m, \beta_l, z, p)] \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} C_{ij} e^{-i(\alpha_m(x-x_i) + \beta_l(y-y_j))}, \quad x > a, \quad y > b$$

Для получения окончательного решения во времени t необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа. Заменой $p = -i\omega$ соответствующий интеграл сводится к интегралу Фурье

$$F(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} f(i\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} f(i\omega) \sin \omega t d\omega \quad (5.1)$$

Для вычисления интегралов типа (5.1) применяется модифицированный метод Файлона [9].

6. Решение плоской задачи. В качестве примера рассмотрим случай, когда электрод моделируется полосовым штампом ширины $2a$. Не нарушая общности, считаем, что центр масс штампа совпадает с началом координат, т.е. $s = 0$. Система интегральных уравнений (2.1) в плоской постановке имеет вид

$$Kq = f = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 - x\varphi \\ \psi_0 \end{Bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ d \end{Bmatrix}$$

Пусть q^k – решения:

$$Kq^k = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ -x \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Для электрических граничных условий типа 1° ψ_0 – заданная функция. При учете симметрии функций систему (2.4) запишем в виде

$$S_1^1 u_1 = P_1 - \varphi Q_1^3, \quad S_2^2 u_2 = P_2 - \psi_0 Q_2^4, \quad R^3 \varphi = M - u_1 Q_1^3 \quad (6.1)$$

$$S_i^i = Q_i^i + m p^2, \quad Q_i^k = \int_{-a}^a q_i^k(x) dx, \quad R^3 = \int_{-a}^a q_2^3(x) dx + J p^2$$

$$i = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Смещения и угол поворота определяются выражениями

$$u_1 = \frac{P_1 R^3 - Q_1^3 M}{\Delta_1}, \quad u_2 = \frac{P_2 - \psi_0 Q_2^4}{S_2^2}, \quad \varphi = \frac{M S_1^1 - Q_1^3 P_1}{\Delta_1} \quad (6.2)$$

$$\Delta_1 = S_1^1 R^3 - (Q_1^3)^2$$

Для электрических граничных условий типа 2° и 3° $\psi_0(p)$ – неизвестная функция. К уравнениям (6.1) следует добавить уравнение (2.5). При учете четности функций d^k имеем

$$-p(u_2 D^2 + \psi D^4) = I(p), \quad D^k = \int_{-a}^a d^k dx, \quad k = 2, 4 \quad (6.3)$$

Решение системы (6.1), (6.3) имеет следующий вид: выражения для u_1 и φ совпадают с приведенными в (6.2), а

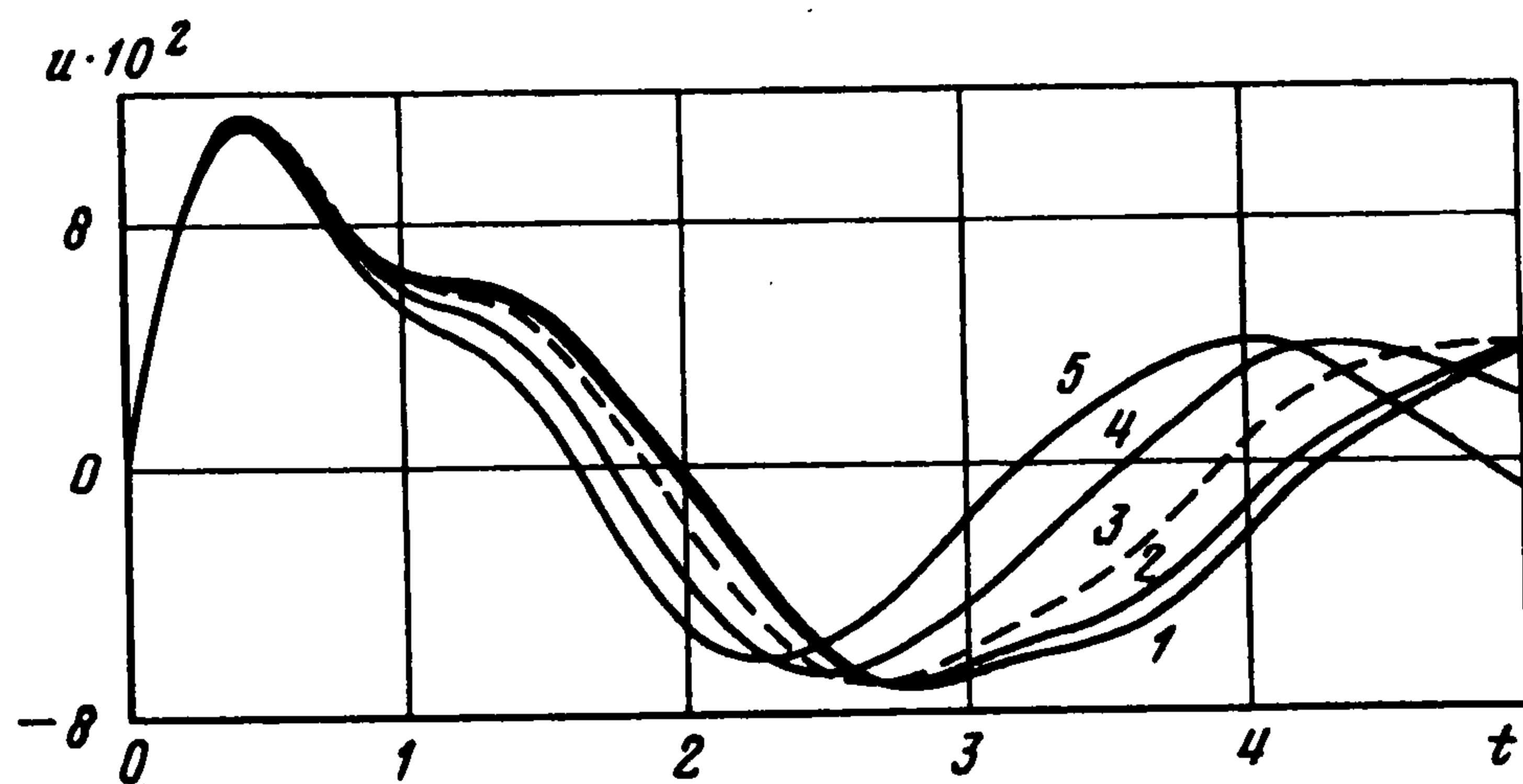
$$u_2 = -\frac{p D^4 P_2 + I Q_2^4}{\Delta_2}, \quad \psi_0 = \frac{I S_2^2 + p D^2 P_2}{\Delta_2}; \quad \Delta_2 = -p[D^4 S_2^2 - D^2 Q_2^4] \quad (6.4)$$

Построенные решения позволяют в полном объеме исследовать связанные электро-механические задачи с учетом различных факторов: масса и моменты инерции электрода, сцепление в области контакта электрода и подстилающей среды, различные типы нестационарных электрических и механических воздействий на систему. Отметим также, что использование собственных форм колебаний тел конечных размеров в сочетании с предлагаемым подходом решения нестационарных задач для жестких электродов позволяет рассматривать взаимодействие с многослойными основаниями гибких электродов с различным типом граничных условий.

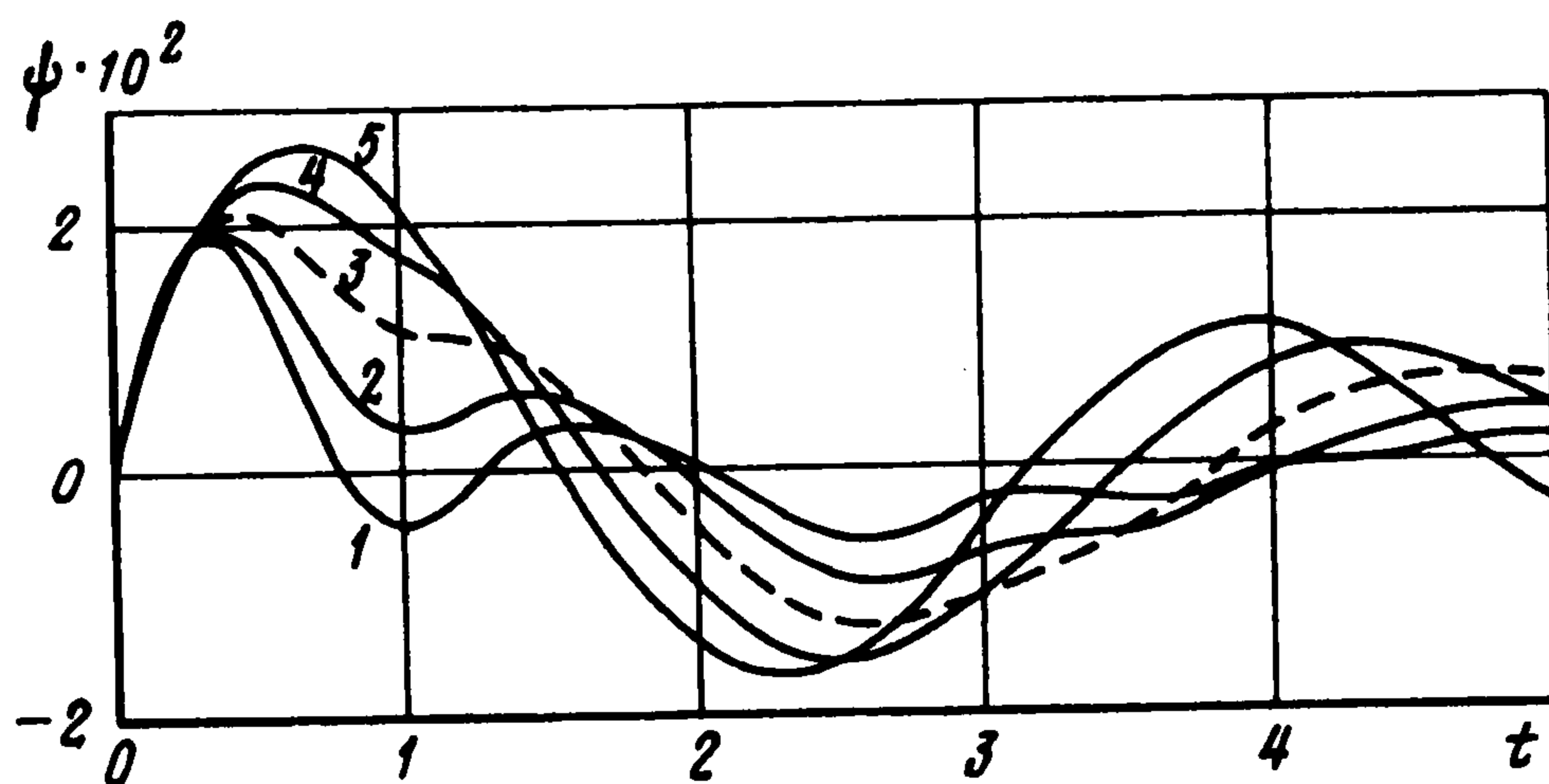
7. Численный анализ. Численный анализ проведен для массивного полосового электрода ширины $2a$, подвергающегося действию механической нагрузки вида $P(t) = \{0, P(t)\}$, приложенной в центре масс $(0, 0)$ и для двух типов электрического возбуждения: а) при заданном значении потенциала $\psi = \psi_0$; б) при подключении к электроду генератора напряжения с заданным значением тока $I(t)$.

Остановимся на результатах, показывающих влияние электроупругих свойств материалов на поведение свободного электрода (внешняя цепь отсутствует, т.е. $I(t) = 0$), взаимодействующего с двух- и трехслойной средой.

На фиг. 1 представлены графики вертикальных смещений, а на фиг. 2 – графики потенциала при действии нагрузки вида $P(t) = H(t) - H(t - 0, 1)$ ($H(t)$ – функция Хевисайда) на электрод единичной массы, взаимодействующий без трения с двухслойной средой толщины $H = 2$ ($h_1 = h_2 = 1/2$). Нижняя грань пакета заземлена и металлизирована. За основу использована пьезокерамика ЦТС-19 [12]. Варьировался пьезоэлектрический коэффициент e_{33}^2 в нижнем слое. Кривые 1–5 соответствуют значениям $e_{33}^2 = 0, e_{33}^1/2, e_{33}^1, 3e_{33}^1/2, 2e_{33}^1$ (кривая 3 соответствует однородному слою толщины $H = 2$). Поскольку свойства верхнего слоя не изменялись, кривые 1–5 совпадают до времени прихода волны, отраженной от линии раздела сред. Увеличение значения параметра e_{33}^2 нижнего слоя по отношению к верхнему



Фиг. 1



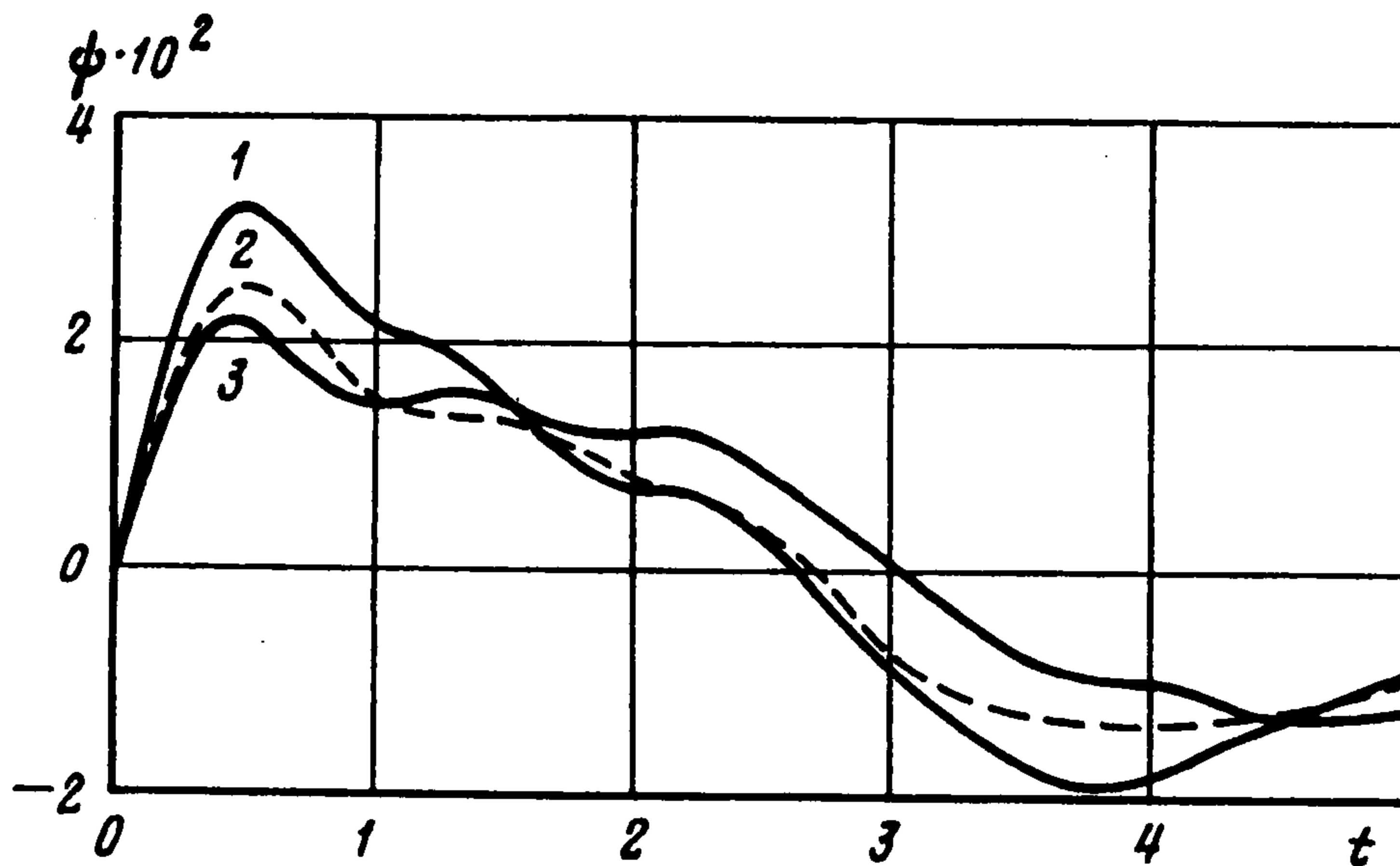
Фиг. 2

приводит к уменьшению периода собственных колебаний системы после снятия нагрузки. С ростом e_{33}^2 механическая "жесткость" системы увеличивается. Из фиг. 2 видно, что с увеличением значения e_{33}^2 нижнего слоя амплитуда ψ растет и меняется характер изменения электрического поля.

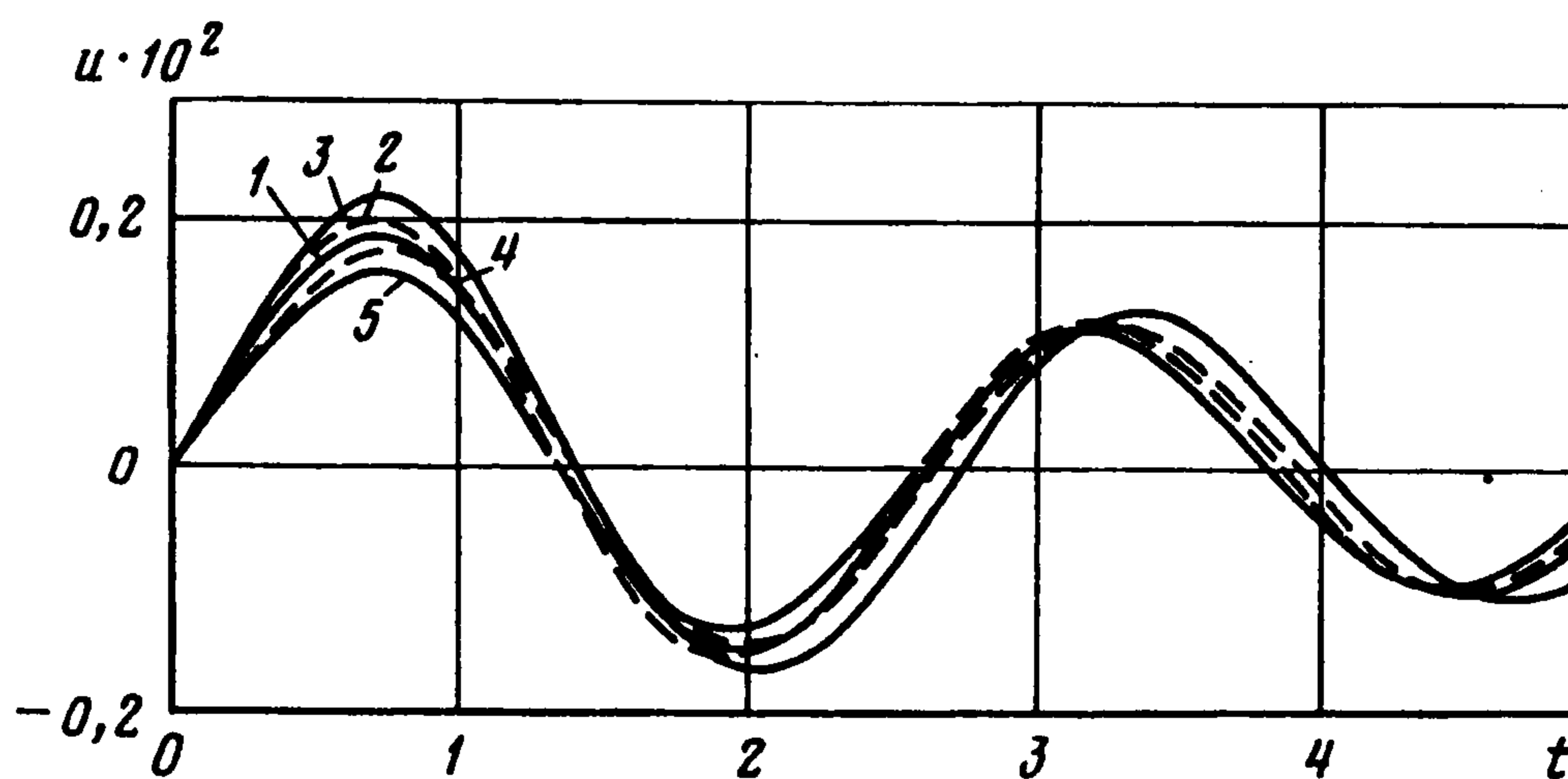
На фиг. 3 приведены зависимости $\psi(t)$ при взаимодействии электрода единичной массы с трехслойной средой $N = 3$ ($h_1 = h_2 = h_3 = 1/2$), $P(t) = N(t) - N(t - 0, 1)$, $K(t) = 0$. Все параметры слоев соответствуют ЦТС-19, за исключением коэффициента c_{33} , который изменялся в верхнем и нижнем слое относительно значения в среднем слое. Кривая 1 соответствует пакету со значениями $c_{33}/2, c_{33}, 3c_{33}/2$ (ступенчато увеличивающаяся жесткость с глубиной), кривая 2 соответствует однородному слою и кривая 3 соответствует значениям $3c_{33}/2, c_{33}, c_{33}/2$ (ступенчато уменьшающаяся жесткость с глубиной). Видно, что определяющим в характере изменения потенциала является соотношение жесткостей двух соседних слоев, а для всего пакета в целом – жесткость верхнего слоя. Качественная картина изменения смещений электрода во времени аналогична графикам, представленным на фиг. 3.

Кривая 3 на фиг. 4 соответствует вертикальным смещениям закороченного электрода (электрическая цепь замкнута), контактирующего со слоем PZT5H, нижняя грань которого заземлена и металлизирована. Кривые 1, 2, 4, 5 показывают влияние изменения параметров e_{33}, ϵ_{33} (таблица) на амплитуду и период колебаний после снятия нагрузки. Фиг. 4 иллю-

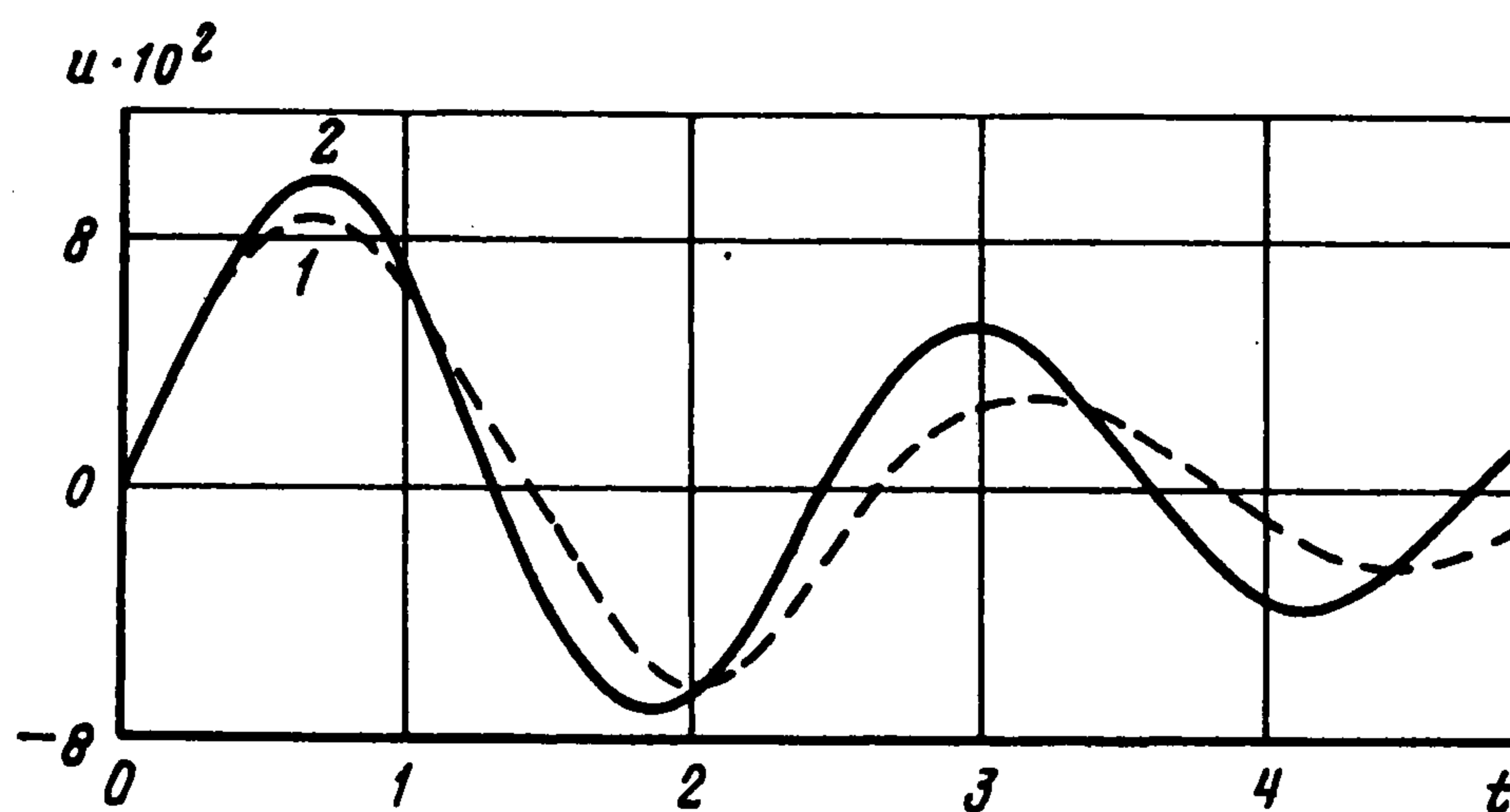
Коэффициент	Номер кривой				
	1	2	3 (PZT5H)	4	5
$e_{33}, \text{ Кл/м}^2$	23,3	17,6	23,3	30,3	23,3
$\epsilon_{33}, 10^{-8} \text{ Ф/м}$	2,26	1,3	1,3	1,3	0,772
k	0,412	0,412	0,513	0,612	0,612



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

стрирует тот факт, что влияние коэффициента e_{33} на смещения электрода менее значительны, чем влияние ϵ_{33} . Изменение коэффициента электромеханической связи $k^2 = \kappa / (1 + \kappa)$, $\kappa = e_{33}^2 / (c_{33}\epsilon_{33})$ за счет изменения коэффициента ϵ_{33} (кривые 1, 5) приводит не только к большим изменениям амплитуды, но и изменению периода колебаний системы. Аналогичная картина наблюдается и у "слабых" пьезоэлектриков, но в менее выраженном виде.

Фиг. 5 иллюстрирует поведение массивного штампа, контактирующего с двумя различными средами. Кривая 1 соответствует пьезокерамике PZT5Н, 2 – трансверсально-изотропной среде с упругими параметрами, соответствующими PZT5Н. Хорошо видны отличия в характере смещений штампа при отсутствии у среды пьезоэлектрических свойств. Наличие

пьезоэлектрических свойств уменьшает амплитуду и увеличивает период колебаний системы после снятия нагрузки. На фиг. 4, 5 нагрузка $P(t) = te^{-10t}$, $m = 1$, $H = 2h = 1$, $\psi_0 = 0$.

Расчеты приведены в безразмерном виде для вязкоупругих сред [12]. В этом случае $\omega = ipe^{-is}$, ζ – параметр вязкости среды, $0 \leq 2\zeta \leq 1$ (упругие постоянные – комплексные величины вида $c_{ij}e^{2i\zeta}$). На фиг. 1–5 $\zeta = 0,2$. Смещения отнесены к a , потенциал – к al ($l = 10^{10}$ и имеет размерность электрического поля), время – к a/V (V – скорость распространения поперечных волн в верхнем слое).

Авторы благодарят И.И. Воровича и В.А. Бабешко за внимание к работе и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00362).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
2. *Жарий О.Ю., Улитко А.Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Киев: Вищ. шк., 1988. 184 с.
3. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
5. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
6. *Ворович И.И., Пряхина О.Д., Тукодова О.М., Фрейгейт М.Р.* Об одном подходе к решению динамических задач для слоистых электроупругих и анизотропных сред // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 652–661.
7. *Пряхина О.Д., Фрейгейт М.Р.* О методе расчета динамики массивного штампа на многослойном основании // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 114–122.
8. *Пряхина О.Д., Фрейгейт М.Р.* Решение нестационарных контактных задач при наличии сил сцепления // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 129–138.
9. *Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А.* Колебаний и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.
10. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
11. *Попов Г.Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев; Одесса: Вищ. шк., 1982. 167 с.
12. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
9.I.1996