УДК 539.374 + 532.59

© 1997 г. О.Ю. Динариев, В.Н. Николаевский

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С МИКРОВРАЩЕНИЯМИ

Результаты авторов [1, 2] распространяются на случай среды Коссера с наследственностью (тензор силовых напряжений и тензор моментных напряжений зависят от истории деформации и вращения частицы среды). В линейном приближении определяющие соотношения имеют функциональный вид сверток по времени с некоторыми релаксационными ядрами. Получены ограничения на ядра, следующие из общих термодинамических принципов. Исследовано распространение слабых возмущений. Указана общая функциональная форма ядер, соответствующая экспериментальным данным по вязкоупругости горных пород.

1. В значительной степени будут использоваться обозначения предыдущих работ [1, 2]. Символ t означает время в некоторой инерциальной системе отсчета, x_i – декартовы координаты. Латинские индексы соответствуют координатам и пробегают значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам производится суммирование, если не оговорено противное.

Пусть частица среды, имевшая в момент времени t_0 координаты x_{i0}, в момент времени t_1 перемещается в точку с координатами

$$x_{i1} = X_i(t_1, t_0, x_{i0}) \tag{1.1}$$

При этом соответствующий полный поворот частицы задается матрицей $G(t_1, t_0, x_{i0}) \in SO(3)$, отнесенной к выбранным декартовым координатам. Очевидно, что

$$X_i(t_0, t_0, x_{i0}) = x_{i0}, \quad G(t_0, t_0, x_{i0}) = 1$$

Напомним, что любой элемент G группы $SO(3)$ можно представить в виде

$$G = \exp(\omega_i \tau_i) \tag{1.2}$$

где $\omega_i = \omega_i(G)$ – действительные числа, τ_i – такие базисные элементы алгебры Ли $so(3)$, что если в формуле (1.2) только одно из чисел φ_i отлично от нуля, то матрица g задает поворот на угол φ_i вокруг соответствующей оси.

Определим поле скоростей и поле угловых скоростей

$$v_i(t, x_j) = \partial_t X_i(t, t_0, x_j)\Big|_{t_0=t}$$

$$\Omega(t, x_j) = \partial_t G(t, t_0, x_j)\Big|_{t_0=t} \in so(3)$$

По полю угловых скоростей можно определить компоненты угловой скорости

$$\Omega_i(t, x_j) = \mathrm{Tr}(\tau_i \Omega(t, x_j))$$

Для матрицы $F \in G_+L(3)$ с элементами

$$F_{ij}(t_1, t_0, x_{k0}) = \frac{\partial}{\partial x_{j0}} X_i(t_1, t_0, x_{k0}) \tag{1.3}$$

возможно представление: $F = OD$, где $O \in SO(3)$, $D = D^T > 0$. Таким образом, по матрице (1.3) можно определить матрицы поворота и деформации вмороженной системы координат

$$O = O(t_1, t_0, x_{k0}), \quad D = D(t_1, t_0, x_{k0})$$

Относительный поворот частицы за промежуток времени от t_0 до t_1 задается матрицей

$$R(t_1, t_0, x_{k0}) = O^{-1}(t_1, t_0, x_{k0}) G(t_1, t_0, x_{k0})$$

Пусть $\rho = \rho(t, x_i)$ – массовая плотность, $T = T(t, x_i)$ – абсолютная температура среды. Имеют место уравнения неразрывности, импульса, момента импульса и энергии [2]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} = 0, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = p_{ij,j} + f_i \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k + J\Omega_i) + (\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k + J\Omega_i) v_{l,l} = (\varepsilon_{ikl} x_k p_{lj} + \pi_{ij})_{,j} + \varepsilon_{ijk} x_j f_k + m_i + M_i \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dt}(K + \rho U) + (K + \rho U) v_{i,i} = (v_i p_{ij})_{,j} + (\Omega_i \pi_{ij})_{,j} + f_i v_i + m_i \Omega_i - q_{i,i} + \varepsilon \tag{1.6}$$

$$K = \frac{1}{2}\rho v_i v_i + \frac{1}{2} J \Omega_i \Omega_i, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Здесь p_{ij} – компоненты тензора силовых напряжений, π_{ij} – компоненты симметричного тензора моментных напряжений, f_i – компоненты внешних объемных сил, m_i – компоненты момента внешних сил, M_i – компоненты момента внутренних сил, J – плотность момента инерции (размерности масса x длина$^{-1}$), которую будем считать постоянной, K – плотность кинетической энергии, U – внутренняя энергия частицы на единицу массы, q_i – компоненты вектора потока тепла, ε – тепловыделение в единице объема.

Будем использовать неравенство Клазиуса – Дюгема [3, 4]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \, dt \geqslant 0, \quad \sigma = \rho \frac{ds}{dt} - T^{-1}\varepsilon + (q_i T^{-1})_{,i} \tag{1.7}$$

где σ – производство энтропии в частице среды, s – энтропия в частице среды на единицу массы. Интегрирование в (1.7) осуществляется по состояниям частицы среды, причем предполагается, что при $t \to \pm\infty$ среда находится в одном и том же состоянии покоя.

Для замыкания динамической модели нужно конкретизировать выражения для p_{ij}, π_{ij}, q_i, M_i, U.

Пусть при $t \to -\infty$ состояние среды является ненапряженным состоянием покоя. Введем обозначения

$$D^0(t, x_i) = D(-\infty, t, x_i), \quad R^0(t, x_i) = R(-\infty, t, x_i)$$

Предположим, что внутренняя энергия частицы среды U зависит от параметров T, D_{ij}^0, R_{ij}^0. Зависимость от ρ можно не вводить, поскольку из первого уравнения (1.4) следует соотношение

$$\rho(t_1, x_{i1}) \operatorname{Det} D(t_1, t_0, x_{i0}) = \rho(t_0, x_{i0}) \tag{1.8}$$

для точек x_{i0}, x_{i1}, связанных условием (1.1).

Из второго закона термодинамики следует соотношение

$$Ids = dU - \rho^{-1}(\sigma_{ij}dD_{ij}^0 + \nu_{ij}dR_{ij}^0) \tag{1.9}$$

где σ_{ij} – статический тензор напряжений, ν_{ij} – тензорная термодинамическая сила, связанная с микроструктурой среды.

Подчеркнем, что дифференциальное равенство (1.9) связывает функции, определенные для бесконечно близких равновесных состояний среды. Поэтому в правой части этого соотношения для рассматриваемой вязкоупругой среды с микроструктурой учитывается работа только упругих сил, связанных с трансляционными и вращательными степенями свободы. Уравнению (1.9) можно придать форму, учитывающую в явном виде диссипативные эффекты, если подставить выражение для dU из уравнения (1.6).

Согласно (1.9), будем иметь

$$\sigma_{ij} = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial D_{ij}^0}\right)_s, \quad \nu_{ij} = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial R_{ij}^0}\right)_s \tag{1.10}$$

Для чисто упругой среды при отсутствии теплопроводности уравнение (1.9) в силу (1.6), (1.10) приводит к нулевой диссипации. Для чисто вязкой несжимаемой среды величины (1.10) тождественно обращаются в нуль, и диссипирует вся работа внутренних сил.

Что касается компонент p_{ij}, π_{ij}, q_i, M_i, то их значения в момент t_0 в точке x_{i0} в пространственно-локальной теории с наследственностью определяются предысторией частицы среды, т.е. зависят от функций параметра t_1

$$T(t_1, x_1), \quad D(t_1, t_0, x_{i0}), \quad G(t_1, t_0, x_{i0})$$

($t_1 \leqslant t_0$, имеет место (1.1)) и от производных этих функций по x_{i0}.

Из (1.4)–(1.6), (1.9), (1.10) вычислим скорость изменения энтропии

$$\rho T\frac{ds}{dt} = (p_{ij} - \sigma_{ij})\upsilon_{i,j} + \pi_{ij}\Omega_{i,j} - M_i\Omega_i - \nu_{ij}\frac{d}{dt}R_{ij}^0 + \varepsilon_{ijk}p_{jk}\Omega_i + \varepsilon - q_{i,i} \tag{1.11}$$

Тензор вязких напряжений с компонентами

$$\tau_{ij} = p_{ij} - \sigma_{ij}$$

состоит из симметричной $\tau_{ij} = \tau_{(ij)}$ и антисимметричной части $\tau_{ij}^a = \tau_{[ij]}$. Теперь из соотношений (1.7) и (1.11) можно вычислить производство энтропии

$$\sigma = T^{-1}\left(\tau_{ij}^s\upsilon_{(i,j)} + \tau_{ij}^a(\upsilon_{[i,j]} + \varepsilon_{ijk}\Omega_k) + \pi_{ij}\Omega_{i,j} - M_i\Omega_i - \nu_{ij}\frac{d}{dt}R_{ij}^0\right) + q_i(T^{-1})_{,i} \tag{1.12}$$

Будем искать выражения для диссипативных членов в рамках линейной неравновесной термодинамики. Тогда примем для зависимости (1.1) функциональную форму

$$X_i(t_1, t_0, x_{j0}) = x_{i0} + u_i(t_0, x_{j0}) - u_i(t_1, x_{j0})$$

где $u_i = u_i(t, x_j)$ – малый вектор перемещений. Для матрицы поворота примем функциональную форму

$$G_{ij}(t_1, t_0, x_{k0}) = \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}(\varphi_k(t_0, x_{j0}) - \varphi_k(t_1, x_{j0}))$$

где $\varphi_i = \varphi_i(t, x_j)$ – малый вектор поворота. Тогда

$$\upsilon_i(t, x_j) = \frac{\partial}{\partial t}u_i(t, x_j), \quad \Omega_i(t, x_j) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_i(t, x_j) \tag{1.13}$$

При этом матрица относительного поворота имеет вид

$$R_{ij}(t_1,t_0,x_{k0}) = \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}(\varphi_k^0(t_0,x_{j0}) - \varphi_k^0(t_1,x_{j0}))$$

$$\varphi_i^0 = \varphi_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}u_{j,k}$$

где $\varphi_i^0 = \varphi_i^0(t,x_j)$ – вектор относительного поворота.

Введем новые обозначения

$$e = v_{i,i}, \quad e_{ij} = v_{(i,j)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e$$

$$\tau = \tau_{ii}^s, \quad s_{ij} = \tau_{ij}^s - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau$$

$$\psi = \Omega_{i,i}, \quad \psi_{ij} = \Omega_{(i,j)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\psi$$

$$\gamma = \pi_{ii}, \quad \gamma_{ij} = \pi_{(ij)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\gamma$$

$$\nu_i = \varepsilon_{ijk}\nu_{jk}, \quad \mu_i = -M_i, \quad \xi_i = \varepsilon_{ijk}\tau_{jk}^a - \nu_i$$

$$\Omega_i^0 = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_i^0, \quad \varkappa_i = -T^{-1}T_{,i}$$

С учетом этих обозначений, а также (1.13), выражение (1.12) преобразуем к виду

$$\sigma = T^{-1}(\tau e + s_{ij}e_{ij} + \gamma\psi + \gamma_{ij}\psi_{ij} + \mu_i\Omega_i + \xi_i\Omega_i^0 + q_i\varkappa_i) \tag{1.14}$$

Предположим, что величины τ, s_{ij}, γ, γ_{ij}, μ_i, ξ_i, q_i являются линейными функционалами от значений переменных e, e_{ij}, ψ, ψ_{ij}, Ω_i^0, Ω_i, $\varkappa_i$ в частице среды. В силу трансляционной инвариантности по времени эти функционалы должны иметь вид сверток по времени с некоторыми релаксационными ядрами. Для изотропной среды из локальной $SO(3)$ – инвариантности получаем

$$\begin{aligned}
&\tau = K_{11}^1 * e + K_{12}^1 * \psi, \quad \gamma = K_{21}^1 * e + K_{22}^1 * \psi \\
&s_{ij} = K_{11}^2 * e_{ij} + K_{12}^2 * \psi_{ij}, \quad \gamma_{ij} = K_{21}^2 * e_{ij} + K_{22}^2 * \psi_{ij} \\
&\xi_i = K_{11}^3 * \Omega_i^0 + K_{12}^3 * \Omega_i, \quad \mu_i = K_{21}^3 * \Omega_i^0 + K_{22}^3 * \Omega_i \\
&q_i = K^3 * \varkappa_i
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Релаксационные ядра $K_{AB}^\alpha = K_{AB}^\alpha(t)$ обращаются в нуль при $t < 0$ (причинность). Кроме того, они должны удовлетворять еще ряду условий, следующих из общих физических закономерностей. Существует стандартный метод получения таких условий [5]. Если им воспользоваться, то получим

Аналог соотношений Онзагера (следствие обратимости на микроуровне) $K_{AB}^\alpha(t) = K_{BA}^\alpha(t)$;

Условие диссипативности (следствие соотношений (1.7), (1.14), (1.15)): если $L_{AB}^\alpha(\omega)$ – фурье-образы функций $K_{AB}^\alpha(t)$, то матрица Re $L_{AB}^\alpha(\omega)$ является положительно определенной при $\alpha = 1, 2, 3$ и любых действительных ω.

На этом построение модели вязкоупругой среды с микроструктурой можно считать законченным, так как сформулирована полная система уравнений и определяющих соотношений и удовлетворены общие механические и термодинамические законы.

Дальнейшая детализация модели возможна при задании конкретных выражений для внутренней энергии и релаксационных ядер, что должно делаться на основе дополнительной информации о природе рассматриваемой среды. Возможность вывода результатов из общих постулатов исчерпана.

Отметим, что общие определяющие соотношения для моделей сред с микроструктурой без наследственности исследовались M. Misicu [6].

2. Исследуем распространение малых возмущений в однородной среде. Для этого нужно задать выражение для внутренней энергии U и линеаризовать уравнения (1.4)–(1.6). Первое уравнение (1.4) несущественно в силу (1.8). Будем обозначать $\vartheta = T - T_0$.

Отметим, что $D_{ij}^0 = \delta_{ij} - \varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}$.

Примем для U выражение, квадратичное по компонентам тензора деформаций и углам поворота:

$$U(T,\varepsilon_{ij},\varphi_i^0) = U_0(T) + \frac{1}{2}\rho_0^{-1}(\lambda_1(\varepsilon_{ii})^2 + \lambda_2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \zeta\varphi_i^0\varphi_i^0);$$

$$C_V = \frac{d}{dT}U_0(T_0); \quad \lambda_1,\lambda_2,\zeta > 0 \qquad (2.1)$$

Для произвольной функции $f = f(t, x_i)$ будем обозначать символом f_F преобразование Фурье

$$f_F(\omega,k_i) = \int \exp(-i\omega t - ik_ix_i)f(t,x_i)dt\,dx_j$$

Линеаризуем систему уравнений (1.4)–(1.6) с учетом соотношений (1.10), (1.15), (2.1) и применим преобразование Фурье. Без потери общности можно принять для волнового вектора выражение $k_i = k\delta_{i1}$. Получаем однородную систему семи линейных алгебраических уравнений относительно семи неизвестных величин u_{iF}, φ_{iF}, ϑ_F:

$$\rho_0 i\omega v_{iF} - ik_jp_{ijF} = A_{ij}^1u_{jF} + B_{ij}^1\varphi_{jF} = 0$$

$$Ji\omega\Omega_{iF} + \varepsilon_{ijl}p_{jlF} - ik_j\pi_{ijF} - M_{iF} = A_{ij}^2u_{jF} + B_{ij}^2\varphi_{jF} + C_i^2\vartheta_F = 0 \qquad (2.2)$$

$$\rho_0C_Vi\omega\vartheta_F + ik_iq_{iF} = B_i^3\varphi_{iF} + C^3\vartheta_F = 0$$

Здесь использованы следующие сокращенные обозначения для коэффициентов:

$$A_{ij}^1 = A^{11}\delta_{ij} + A^{12}k_ik_j$$

$$B_{ij}^1 = B^{11}\delta_{ij} + B^{12}k_ik_j + B^{13}\varepsilon_{kij}ik_k$$

$$A_{ij}^2 = A^{21}\delta_{ij} + A^{22}k_ik_j + A^{23}\varepsilon_{kij}ik_k$$

$$B_{ij}^2 = B^{21}\delta_{ij} + B^{22}k_ik_j, \quad C_i^2 = ik_iC^2, \quad B_i^3 = ik_iB^3$$

$$A^{11} = -\rho_0\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda_2 + \frac{1}{2}\zeta\right)k^2 + \frac{1}{2}\left(L_{11}^2 + \frac{1}{2}L_{11}^3\right)i\omega k^2$$

$$A^{12} = \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{4}\zeta + \left(\frac{1}{6}L_{11}^2 + L_{11}^1 + \frac{1}{4}L_{11}^3\right)i\omega$$

$$B^{11} = L_{12}^2 i\omega k^2, \quad B^{12} = \left(\frac{1}{6}L_{12}^2 + L_{12}^1\right)i\omega k^2$$

$$B^{13} = \frac{1}{2}((L_{11}^3 + L_{12}^3)i\omega + \zeta), \quad A^{21} = \frac{1}{2}L_{21}^2 i\omega k^2$$

$$A^{22}=\left(\frac{1}{6}L_{21}^{2}+\frac{1}{3}L_{21}^{1}\right)i\omega,\quad A^{23}=\frac{1}{2}L_{11}^{3}i\omega+\frac{1}{2}\zeta$$

$$B^{21}=-J\omega^{2}+\zeta+(L_{11}^{3}+L_{12}^{3}+L_{21}^{3}+L_{22}^{3})i\omega+\frac{1}{2}L_{22}^{2}i\omega k^{2}$$

$$B^{22}=\left(\frac{1}{6}L_{22}^{2}+\frac{1}{3}L_{22}^{1}\right)i\omega k^{2},\quad C^{2}=0$$

$$B^{3}=0,\quad C^{3}=\rho_{0}C_{V}i\omega+T_{0}^{-1}L_{33}^{3}k^{2}$$

Непосредственное вычисление дает выражение для определителя системы (2.2)

$$\Delta=P_{1}P_{2}$$

$$P_{1}=B^{21}C^{3}(A^{11}+k^{2}A^{12})+(A^{11}+k^{2}A^{12})(B^{22}C^{3}+C^{2}B^{3})k^{2}- \tag{2.3}$$

$$-(A^{21}+k^{2}A^{22})(B^{11}+k^{2}B^{12})C^{3}$$

$$P_{2}=(A^{11}B^{21}-A^{21}B^{11}-k^{2}A^{23}B^{13})^{2}-(A^{23}B^{11}+A^{21}B^{13})^{2}k^{2}$$

Дисперсионное соотношение $P_1=0$ описывает динамику продольных трансляционных и вращательных колебаний, а также эффекты теплопроводности. Дисперсионное соотношение $P_2=0$ описывает динамику связанных поперечных трансляционных и вращательных мод. Чтобы удостовериться в этих утверждениях, удобно вычислить P_1, P_2 в бездиссипативном приближении на основании выражений (2.3)

$$P_{1}=Q_{1}Q_{2}Q_{3},\quad P_{2}=Q_{4}^{2}$$

$$Q_{1}=\rho_{0}C_{V}i\omega,\quad Q_{2}=-\omega^{2}J+\zeta$$

$$Q_{3}=\rho_{0}(-\omega^{2}+V_{1}^{2}k^{2}),\quad V_{1}=\rho_{0}^{-1/2}(\lambda_{1}+\lambda_{2})^{1/2}$$

$$Q_{4}=\left(-\rho_{0}\omega^{2}+\frac{1}{2}\left(\lambda_{2}+\frac{1}{2}\zeta\right)k^{2}\right)(-J\omega^{2}+\zeta)-\frac{1}{4}\zeta^{2}k^{2}$$

Дисперсионные соотношения $Q_A=0$ (A = 1, 2, 3) описывают соответственно: отсутствие переноса тепла, вращательные колебания неволновой природы, имеющие частоту $\omega_0=(\zeta/J)^{1/2}$, продольные упругие волны, имеющие скорость V_1.

Дисперсионное соотношение

$$Q_{4}=0 \tag{2.4}$$

описывает связанные поперечные трансляционно-вращательные волны. При малых волновых числах уравнение (2.4) имеет четыре решения для частоты со следующими асимптотиками: $\omega=\pm\omega_0+o(1)$ (оптические моды), $\omega=\pm V_2k+o(k)$, $V_2=(2\rho_0)^{-1/2}\lambda_2^{1/2}$ (акустические моды).

3. Рассмотрим теперь функциональный вид релаксационных ядер, фигурирующих в определяющих соотношениях для вязкоупругой среды Коссера.

Пусть $K=K(t)$ – типичное ядро, $L=L(\omega)$ – его преобразование Фурье. Функция $L=L(\omega)$ является граничным значением функции, голоморфной в комплексной полуплоскости $\operatorname{Im}\omega\leqslant 0$ (теорема Пэли–Винера [7]). При продолжении из нижней комплексной полуплоскости в верхнюю функцию $L=L(\omega)$ будет иметь особенности. Они соответствуют внутренним релаксационным процессам, протекающим в изучаемой среде. Детальное описание этих процессов возможно лишь на более фундаментальном уровне исследования по сравнению с уровнем модели сплошной среды. При используемом в настоящей работе феноменологическом подходе внутренние релаксационные процессы характеризуются вкладами, которые они вносят в функцию $L = L(\omega)$.

В широком классе случаев имеется семейство экспоненциально затухающих процессов (без осцилляций) с некоторым спектром внутренних времен релаксации. Это соответствует функциональной форме ядра

$$K(t) = \int_0^{+\infty} \frac{A(\chi)}{\chi} \exp\left(-\frac{t}{\chi}\right) d\chi \tag{3.1}$$

Ядро (3.1) имеет фурье-образ

$$L(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{A(\chi)}{1 + i\chi\omega} d\chi \tag{3.2}$$

Если считать, что выполняется неравенство для весовой функции $A(\chi) \geqslant 0$, то автоматически выполняется условие диссипативности для $L(\omega)$ на действительной оси (см. конец разд. 1): $\operatorname{Re} L(\omega) \geqslant 0$.

Распространены реологические модели, в которых весовая функция $A(\chi)$ представляет собой конечную сумму δ-образных распределений, что соответствует конечному множеству внутренних релаксационных процессов. При этом реологические соотношения могут быть записаны в функциональной форме [8, 9]

$$H_1\left(\frac{d}{dt}\right) f = H_2\left(\frac{d}{dt}\right) z$$

где $z = z(t)$ – некоторая степень свободы материала, $f = f(t)$ – внешняя сила, H_1, H_2 – полиномы.

Представляет интерес найти вид весовой функции $A(\chi)$ для реальных сред. Для этого можно использовать эксперименты по вязкоупругому поведению материалов под действием постоянной силы. Если рассматривать поведение степени свободы z под действием мгновенно приложенной силы f_0, то для линейного вязкоупругого материала реализуется зависимость

$$z(t) = f_0(r_0 + r(t)), \qquad r(0) = 0 \tag{3.3}$$

где r_0 – постоянная, характеризующая упругие свойства материала, $r = r(t)$ – монотонно возрастающая функция. Имеет место реологическая связь

$$f_0 \vartheta(t) = \lambda z + K * \dot{z} \tag{3.4}$$

где λ = соответствующий модуль упругости.

Исключая из уравнений (3.3), (3.4) функцию $z(t)$, можно выразить функцию $K(t)$ через функцию $r(t)$. В самом деле, обозначим фурье-образ функции $r(t)$ символом $R(\omega)$. Тогда из (3.3), (3.4) получаем соотношение

$$1 = (\lambda + i\omega L) \ (r_0 + i\omega R) \tag{3.5}$$

Очевидно, что $\lambda r_0 = 1$. Далее из (3.5) получаем

$$L = -\lambda R(r_0 + i\omega R)^{-1} \tag{3.6}$$

Рассматривая поведение функции (3.2) вблизи мнимой оси и используя формулу Сохоцкого–Племеля, выведем выражение для скачка

$$L(iy + \varepsilon) - L(iy - \varepsilon) = -2\pi i y^{-1} A(y^{-1}), \ \ y > 0 \tag{3.7}$$

Применяя эту формулу к правой части равенства (3.6), можно определить весовую функцию $A(\chi)$, а затем в принципе и ядро $K(t)$.

Известно, что геолого-геофизические экспериментальные данные [10] хорошо описываются следующими функциями:

$$r(t)=a(t/\chi_0)^{\alpha},\quad 0<\alpha<1;\quad r(t)=a\ln(1+t/\chi_0) \tag{3.8}$$

Исследуем последовательно эти два случая. Определяем фурье-образ первой функции (3.8) с помощью формулы № 3.381.4 [11]

$$R(\omega)=R_0(i\omega)^{-(1+\alpha)},\quad R_0=a\chi_0^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha)$$

считая при этом, что разрез проходит вдоль положительной мнимой полуоси. Используя теперь формулы (3.6), (3.7), находим весовую функцию

$$A(\chi)=(2\pi)^{-1}R_0\sin(\alpha\pi)\chi^{\alpha}((r_0\cos(\alpha\pi)+R_0\chi^{\alpha})^2+(r_0\sin(\alpha\pi))^2)^{-1}$$

Таким образом, внутренние релаксационные процессы распределены непрерывно. Вклад релаксационных процессов с временами $\chi\to 0,\chi\to+\infty$ стремится к нулю соответственно, как χ^{α} и $\chi^{-\alpha}$.

Обратимся теперь ко второй функции (3.9). Применяя формулу № 4.331.2 из [11], получаем

$$R(\omega)=-a\exp(-i\omega\chi_0)(i\omega)^{-1}\operatorname{Ei}(-i\omega\chi_0)$$

Здесь $\operatorname{Ei}(z)$ – интегральная показательная функция. Снова используя формулы (3.6), (3.7), находим

$$A(\chi)=a\exp(-\chi_0/\chi)(a^2\pi^2+(r_0\exp(-\chi_0/\chi)-a\operatorname{Re}\operatorname{Ei}(\chi_0/\chi))^2)^{-1}$$

Видно, что в модели, соответствующей второй функции (3.8), также реализуется непрерывный спектр внутренних релаксационных процессов, и процессы с малыми и большими временами подавлены.

Приведенные примеры показывают, что при описании реальных сред предпочтительно использование релаксационных ядер с непрерывным спектром внутренних времен релаксации.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (NP1000 и NP1300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Ползучесть горных пород как источник сейсмического шума // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 6. С. 739–741.
2. *Динариев О.Ю., Николаевский В.Н.* Нестационарный режим микровращений // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 175–180.
3. *Дэй У.А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 190 с.
4. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
5. *Динариев О.Ю.* О некоторых свойствах релаксационных ядер в системах с наследственностью // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 3. С. 615–618.
6. *Misicu M.* Mecanica medulor deformabile. Fundamentele elasticitatii structurale. Bucuresti: Acad. RSR, 1967. 365 p.
7. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
8. *Алфрей Т., Гарни Е.Ф.* Динамика вязкоупругого поведения // Реология. Теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 459–507.
9. *Nikolaevskii V.N.* Dynamics of viscoelastic media with internal oscillators // Lecture Notes in Engineering. Berlin: Springer, 1989. V. 39. P. 210–221.
10. *Ranalli G.* Rheology of the Earth. Boston: Allen and Unwin, 1987. 366 p.
11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XI.1994