

УДК 539.3 : 629.7

© 1997 г. Н.А. Остапенко, Г.Е. Якунина

## ДИНАМИКА ТОНКИХ ТЕЛ В ПЛОТНЫХ СРЕДАХ В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В рамках локальной модели взаимодействия построена асимптотическая теория плоского движения тонкого заостренного тела вращения после полного погружения в плотную среду при безотрывном обтекании его боковой поверхности. В предположении, что в начальный момент времени в условиях поступательного движения тела без угла атаки динамическая составляющая нормального напряжения намного превосходит прочностную составляющую, найдена область изменения определяющих параметров, отвечающая асимптотически устойчивым типам движения.

Трудности расчета движения жесткого тела в плотных средах, к которым относятся, например, различные типы грунта, обусловлены, в частности, нестационарным характером задачи, изменением скорости центра масс тела в широких пределах относительно характерной скорости распространения возмущений в среде, возможностью существования режимов движения с отрывом среды от поверхности тела и т.д. Поэтому во многих случаях для упрощения вместо совместной задачи движения тела и среды рассматривается движение тела под действием силы и момента, рассчитанных с использованием локальных моделей взаимодействия, содержащихся в известных приближенных решениях задач проникания, либо определенных эмпирически [1]. Однако и при указанном упрощении решение задачи Коши может быть получено лишь численным интегрированием системы уравнений движения твердого тела, а анализ устойчивости движения в зависимости от определяющих параметров и начальных условий представляет собой сложную проблему.

Ниже для вычисления давления на поверхности контакта тела со средой используется двучленная модель локального взаимодействия, содержащая динамический член, пропорциональный квадрату полной скорости рассматриваемой точки поверхности тела, и постоянное слагаемое, характеризующее сопротивляемость среды деформированию. Касательные напряжения на поверхности контакта определяются в рамках кулоновской модели трения при любой величине нормальных напряжений. Это позволяет оценить максимально возможное влияние трения на динамику тела. Предположения о тонкости тела вращения и превалирующей величине динамического члена в модели нормального напряжения в начальный момент времени являются принципиальными для получения аналитического решения задачи, а также критерия асимптотически устойчивого движения, справедливого при произвольных начальных значениях специальных фазовых переменных из области, отвечающей безотрывному обтеканию тела. Принимая во внимание, что трение является стабилизирующим фактором, результат, полученный с использованием модели трения Кулона, можно трактовать как "оценку сверху" границы области устойчивости тонкого тела, а при коэффициенте сухого трения, равном нулю, – как "оценку снизу".

**1. Модель взаимодействия. Сила и момент.** Нормальное напряжение на поверхности контакта тела со средой в двучленной модели локального взаимодействия задается соотношением

$$\sigma_n = A(\mathbf{v}\mathbf{n})^2 + C > 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_m + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}_m$  и  $\mathbf{v}$  – скорости центра масс и поверхности тела в рассматриваемой точке,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела;  $A$  и  $C$  – постоянные

параметры локальной модели, зависящие от характеристик среды согласно формулам, полученным в приближенных теориях, либо являющиеся экспериментальными константами [1];  $\omega$  – вектор угловой скорости тела, имеющий в случае плоского движения одну отличную от нуля компоненту –  $\omega$ ;  $r$  – радиус-вектор, проведенный из центра масс тела в некоторую точку его поверхности.

В отличие от движения тела в газе, где сила сопротивления, действующая на элементарную площадку  $\Delta S$  тонкого тела, в главных членах определяется соотношением  $\Delta f \sim q(c_p \beta + c_f) \Delta S$  ( $c_p$  и  $c_f$  – коэффициенты давления и трения,  $\beta$  – величина, пропорциональная половине относительной толщины тела, если наклон образующей тела вращения меняется слабо,  $q$  – скоростной напор), в котором коэффициентом трения во многих случаях можно пренебречь, при движении тела в плотной среде для кулоновской модели трения на поверхности контакта, когда  $\Delta f \sim \sigma_n(\beta + \mu) \Delta S$  ( $\mu$  – коэффициент трения), трение вносит в сопротивление вклад того же порядка, что и давление, и им нельзя пренебречь. Таким образом, при учете (1.1) выражения для векторов силы и момента относительно центра масс, действующих на движущееся тело, запишем в виде

$$\mathbf{F} = \iint_S \sigma_n (-\mathbf{n} + \mu \mathbf{t}) dS \quad (1.2)$$

$$\mathbf{M} = \iint_S \sigma_n (-[\mathbf{r} \times \mathbf{n}] + \mu [\mathbf{r} \times \mathbf{t}]) dS \quad (1.3)$$

$$\mathbf{t} = [(\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] / |(\mathbf{v} \times \mathbf{n})| \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{t}$  – единичный касательный вектор к поверхности тела в рассматриваемой точке;  $S$  – в общем случае часть поверхности тела, по которой в текущий момент времени реализуется контакт со средой. Если не ограничивать круг возможных режимов движения, допуская существование срыва среды с поверхности тела по некоторой, заранее неизвестной кривой, ограничивающей область интегрирования  $S = S(v_m, \alpha, \omega)$ , где  $\alpha$  – угол атаки, то задача динамики тела становится аналитически неразрешимой. Предположим, что контакт тела со средой осуществляется по всей его лобовой поверхности. Это накладывает ограничение на область возможного изменения начальных и текущих значений переменных  $v_m$ ,  $\alpha$  и  $\omega$ , которые при безотрывном обтекании тела в рамках локальной модели взаимодействия должны удовлетворять неравенству

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) > 0 \quad (1.5)$$

Дальнейшее исследование требует задания формы тела.

**2. Тонкий конус. Постановка задачи.** Введем две правые прямоугольные системы координат с началом в центре масс тела:  $(\tau, n, z)$ , связанную с телом и с осью  $\tau$ , совпадающей с осью конуса и направленной к его вершине, и  $(v, w, z)$ , скоростную, направление оси  $v$  которой совпадает с направлением вектора  $v_m$ . Координатные плоскости  $(\tau, n)$  и  $(v, w)$  совпадают с плоскостью движения тела. Угол атаки  $\alpha$  – угол между осями  $v$  и  $\tau$  – будем считать положительным, если ось  $\tau$  повернута относительно оси  $v$  против часовой стрелки. Нормальный вектор  $\mathbf{n}$  к поверхности конуса с полууглом при вершине  $\beta$ , радиус-вектор  $\mathbf{r}$  и скорость  $\mathbf{v}$  (1.1) в связанной системе координат запишутся в виде (ниже все линейные размеры отнесены к высоте конуса  $L$ )

$$\mathbf{n} = \{\sin \beta, \cos \beta \cos \varphi, \cos \beta \sin \varphi\} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r} = L\{\tau, R \cos \varphi, R \sin \varphi\} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v} = \{v_m \cos \alpha - \omega R L \cos \varphi, -v_m \sin \alpha + \omega L \tau, 0\} \quad (2.3)$$

Здесь  $c_m$  – относительное расстояние от вершины конуса до его центра масс,  $(\tau, R, \varphi)$  – цилиндрические координаты.

Подставляя (2.1) и (2.3) в (1.5), найдем, что область безотрывного обтекания конуса в плоскости переменных

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}, \quad k_1 = \frac{\omega L}{v_m \sin \beta \cos \beta \cos \alpha} \quad (2.4)$$

зависящих от геометрии тела и переменных  $v_m, \alpha$  и  $\omega$ , является параллелограмм с одной парой противоположных вершин, расположенных на оси  $k_1 = 0$  ( $k = \pm 1$ ), и другой – на прямых  $k_1 = \pm 2$ ; причем

$$-2 < k_1 \leq 0, \quad (c_m \cos^2 \beta - 1)k_1 - 1 < k < c_m \cos^2 \beta k_1 + 1 \quad (2.5)$$

$$0 \leq k_1 < 2, \quad c_m \cos^2 \beta k_1 - 1 < k < (c_m \cos^2 \beta - 1)k_1 + 1$$

Поскольку задача о плоском движении конуса будет рассмотрена в приближении тонкого тела ( $\beta^2 \ll 1$ ), то, учитывая условие  $|k| \leq 1$  (2.5), в дальнейшем будем пренебрегать членами  $\alpha^2$  по сравнению с единицей. В указанном приближении с использованием (2.1)–(2.5) и дифференциальной связи  $dS = (c_m - \tau)\beta L^2 d\tau d\varphi$  найдем вектор  $\mathbf{t}$  (1.4), а также компоненты векторов силы (1.2) и момента (1.3) в связанной системе координат

$$\mathbf{t} = \left\{ -1, \beta \left[ \cos \varphi + (k - \tau k_1) \sin^2 \varphi \right], \beta \sin \varphi \left[ 1 - (k - \tau k_1) \cos \varphi \right] \right\}$$

$$F_\tau = -\pi B (\beta + \mu) \left[ 1 + D + \frac{1}{2} K^2(k, k_1) + \frac{1}{36} k_1^2 \right] \quad (2.6)$$

$$F_n = \pi B \left\{ K \left[ 1 + \frac{1}{2} \beta \mu \left( D - 1 + \frac{1}{4} K^2 + \frac{1}{24} k_1^2 \right) \right] - \frac{1}{1080} \beta \mu k_1^3 \right\} \quad (2.7)$$

$$M_z = -\pi B L \left\{ z_y k + K_0 k_1 + \beta \mu \left[ \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} (D - 1) z_y \right) K + \frac{1}{36} (1 + D) k_1 + \frac{1}{8} \left( z_y K^3 + \frac{1}{6} K^2 k_1 - \frac{1}{6} \left( \frac{2}{15} - z_y \right) K k_1^2 + \frac{1}{135} (1 - z_y) k_1^3 \right) \right] \right\} \quad (2.8)$$

Здесь

$$B = A v_m^2 L^2 \beta^3, \quad D = C / (A v_m^2 \beta^2), \quad z_y = \frac{2}{3} - c_m$$

$$K = k + z_y k_1, \quad K_0 = 1/18 + z_y^2 \quad (2.9)$$

Параметр  $D$  (2.9) характеризует относительный вклад в давление на поверхности тела (1.1) деформационной и динамической составляющих при его поступательном движении под нулевым углом атаки, а  $z_y$  представляет собой в принятом приближении запас статической устойчивости конуса в газе [2] при квазистационарной модели взаимодействия ( $\omega = 0$ ). Из (2.7), (2.8) в квазистационарном приближении можно найти запас статической устойчивости конуса с учетом в модели взаимодействия кулоновского трения

$$z_y^\tau = z_y + \frac{2}{3} \beta \mu \left[ 1 - \frac{1}{2} \beta \mu \left( 1 - D - \frac{1}{4} k^2 \right) \right]^{-1} \quad (2.10)$$

Выражения (2.6)–(2.8), выписанные в приближении тонкого тела, могут быть при определенных дополнительных предположениях значительно упрощены, что позволяет найти эффективное решение системы уравнений движения твердого тела.

Пусть  $D_0 \equiv D(v_{m0}) = C / (\dot{A} v_{m0}^2 \beta^2) \ll 1$ , что соответствует превалирующей роли динамической составляющей в модели взаимодействия в начальный момент времени. Заметим, что при этом условии потерей скорости на этапе входа тонкого тела в среду до полного погружения можно пренебречь [3]. Опуская оценки, отметим, что при указанном допущении в уравнениях движения могут быть отброшены члены, связанные с силой земного тяготения, которые становятся значимыми, лишь когда в модели взаимодействия (1.1) начинает превалировать член, характеризующий сопротивляемость среды деформированию. Поскольку для грунтов  $\mu \sim 0,2$ , пренебрежем в (2.7), (2.8) членами  $O(\beta\mu)$  по сравнению с единицей, что реально не ухудшает приближения тонкого тела. Согласно (2.7), (2.8) и выражениям для компонент вектора силы  $\mathbf{F}$  в скоростной системе координат  $F_v = F_\tau - \alpha F_n$ ,  $F_w = \alpha F_\tau + F_n$ , для сохранения точности принятого приближения в отброшенных членах должно быть  $D \ll 1$ . Как будет видно из дальнейшего, прежде чем  $D$  при уменьшении скорости выйдет из интервала  $[D_0, 1)$ , угловое движение тела около центра масс практически прекратится.

С учетом указанных упрощений систему уравнений движения запишем в виде

$$\dot{v}_m = -\frac{v_m^2 \beta^2}{L} A_k \left\{ \left( 1 + \frac{\mu}{\beta} \right) \left[ 1 + D + \frac{1}{2} K^2 + \frac{1}{36} k_1^2 \right] + kK \right\} \equiv \frac{1}{M_0} F_v, \quad A_k = 3 \frac{A}{\rho_0} \quad (2.11)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_m \beta}{L} A_k K \equiv \frac{1}{M_0 v_m} F_w \quad (2.12)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{v_m^2 \beta}{IL^2} A_k K_0 K_\omega \equiv \frac{1}{I_z} M_z \quad (2.13)$$

$$K_\omega = k_1 - p_\omega k, \quad p_\omega = -\frac{z_y^T}{K_0}, \quad I = \frac{I_z}{M_0 L^2}$$

$$\dot{k} = \frac{v_m}{L} K_1 K_\alpha, \quad K_1 = 1 - z_y A_k, \quad K_\alpha = k_1 - p_\alpha k, \quad p_\alpha = \frac{A_k}{K_1} \quad (2.14)$$

Точка означает дифференцирование по времени  $t$ . Уравнения (2.11), (2.12) описывают движение центра масс,  $\theta$  – угол между направлением одной из осей абсолютной системы координат, в качестве которой может быть выбрана ось  $x$  правой системы координат  $(x, y)$ , совпадающая, например, со свободной поверхностью среды, занимающей полупространство  $y < 0$ , и направлением скорости центра масс  $\mathbf{u}_m$ . Уравнение (2.13) описывает угловое движение около центра масс, а уравнение (2.14) – следствие кинематической связи  $\dot{a} = \omega - \dot{\theta}$  и уравнения (2.12). В (2.13)  $z_y^T = z_y + 2\beta\mu/3$ , что следует из (2.10) в принятом приближении;  $I_z$  – момент инерции конуса относительно оси  $z$ ;  $M_0$  и  $\rho_0$  – масса и средняя плотность конуса.

От уравнения для  $\dot{\omega}$  (2.13) с использованием (2.4), (2.11) и (2.14) перейдем к уравнению для  $\dot{k}_1$

$$\dot{k}_1 = -\frac{v_m}{L} \chi A_k \left[ k_1 - (p_\omega + A_j k_1^2) k \right] \quad (2.15)$$

$$\chi = \frac{K_0}{I}, \quad A_j = \frac{\beta^2}{A_k \chi}$$

Учитывая, что параметр  $A$  в модели локального взаимодействия имеет порядок плотности среды [1], согласно (2.11) заключаем, что для плотных сред  $A_k \sim 1$ . Поскольку кроме того  $l \sim 10^{-1}$ , то в уравнении (2.15) в приближении тонкого тела и для  $k, k_1$ , принадлежащих области (2.5), член  $A_j k_1^2$ , вообще говоря, может быть отброшен. О характере его влияния на область изменения определяющих параметров, соответствующую устойчивым решениям, будет сказано ниже.

Таким образом, необходимо найти решение автономной системы уравнений (2.11), (2.12), (2.14), (2.15) при начальных данных  $v_{m0}, \theta_0, \omega_0, \alpha_0$ . При этом начальные условия должны обеспечивать попадание начальной точки в пространстве  $(k, k_1)$  в область, определяемую неравенствами (2.5), а параметры системы (2.14), (2.15) – соответствующую траекторию в этой же области пространства, входящую в точку покоя  $(0, 0)$  [4].

**3. Движение около центра масс. Анализ устойчивости.** Правые части уравнений (2.14), (2.15) содержат одинаковый множитель  $v_m$ , определяемый из уравнения (2.11), который влияет лишь на скорость перемещения точки по траектории в фазовой плоскости  $(k, k_1)$  [4]. Следовательно, в рамках локальной модели взаимодействия (1.1) с кулоновским трением устойчивость движения тела в плотной среде при безотрывном обтекании может быть исследована в пространстве  $(k, k_1)$  независимо от движения центра масс. Это справедливо и без приближения тонкого тела. Достаточно, чтобы на соответствующем интервале времени членами, содержащими  $D = C/[Av_m^2 \sin^2 \beta \cos^2(\arctg(k \operatorname{tg} \beta))]$ , можно было пренебречь.

Введем переменную

$$\eta = \frac{k_1}{k}, \quad \dot{\eta} \equiv \frac{1}{k}(\dot{k}_1 - \eta \dot{k}) = -\frac{v_m}{L} K_1 \zeta(\eta) \quad (3.1)$$

$$\zeta(\eta) = \eta^2 + p_\alpha(\chi - 1)\eta - \chi p_\alpha p_\omega$$

Переходя в уравнениях (2.11), (2.12), (2.14), (2.15), (3.1) от переменной  $t$  к безразмерному пути  $s$ , пройденному центром масс, согласно связи  $ds = v_m dt/L$  получим

$$\frac{dv_m^2}{ds} = -2v_m^2 \beta^2 A_k \left\{ \left(1 + \frac{\mu}{\beta}\right) \left[1 + D + \frac{1}{2} K^2 + \frac{1}{36} k_1^2\right] + kK \right\} \quad (3.2)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \beta A_k K \quad (3.3)$$

$$\frac{dk}{ds} = K_1 K_\alpha, \quad \frac{dk_1}{ds} = -\chi A_k K_\omega \quad (3.4)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -K_1 \zeta(\eta) \quad (3.5)$$

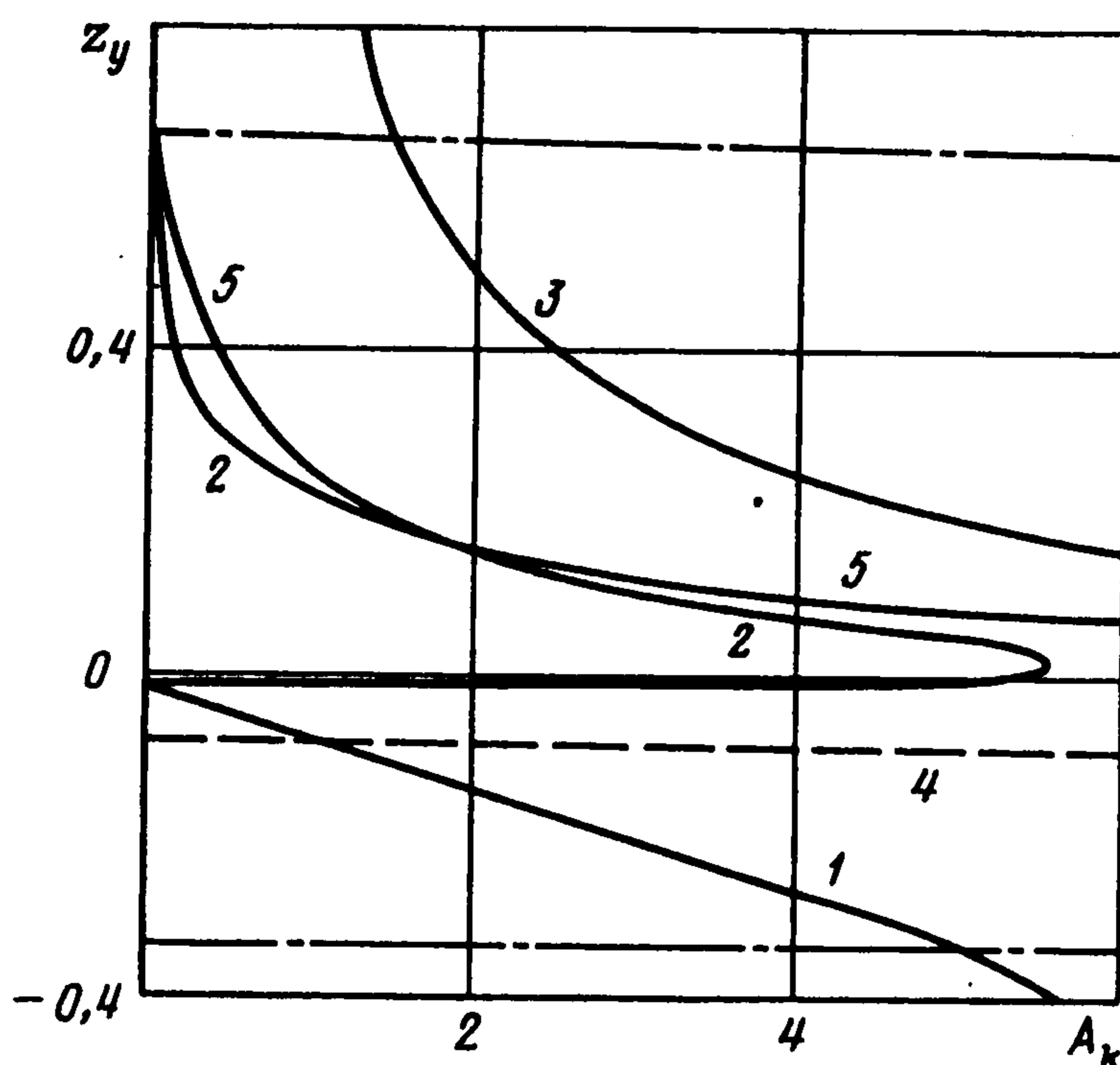
Фазовые траектории системы линейных однородных дифференциальных уравнений (3.4) в плоскости  $(k, k_1)$  в окрестности (2.5) особой точки покоя  $(0, 0)$  удобно искать в параметрическом виде

$$\frac{dk}{d\eta} = -\frac{k(\eta - p_\alpha)}{\zeta(\eta)}, \quad k_1 = k\eta \quad (3.6)$$

Нули знаменателя в (3.6) и корни  $\lambda_{1,2}$  векового уравнения системы (3.4) определяются формулами

$$\eta_{1,2} = p_\alpha \left[ -(\chi - 1) \pm \sqrt{\Delta} \right] / 2, \quad \Delta = (\chi - 1)^2 + 4\chi p_\omega / p_\alpha \quad (3.7)$$

$$\lambda_{1,2} = A_k \left[ -(\chi + 1) \pm \sqrt{\Delta} \right] / 2, \quad \lambda_1 \lambda_2 = A_k^2 \chi (1 - p_\omega / p_\alpha) \quad (3.8)$$



Фиг. 1

Тип особой точки зависит от знака дискриминанта  $\Delta$ , а при  $\Delta > 0$  также от знаков корней векового уравнения и их произведения.

Для определенности рассмотрим тонкий конус с однородным распределением массы на длине  $l$  от его вершины. В этом случае

$$\frac{l}{L} = \frac{4}{3} \left( \frac{2}{3} - z_y \right), \quad I = \frac{1}{15} \left( \frac{2}{3} - z_y \right)^2 \quad (3.9)$$

$$\chi = 15K_0 / \left( \frac{2}{3} - z_y \right)^2 > 1, \quad 0 < \frac{l}{L} \leq 1, \quad \frac{2}{3} > z_y \geq -\frac{1}{12}$$

Нулю дискриминанта  $\Delta$  (3.7) в плоскости параметров  $(A_k, z_y)$  при учете (2.13), (2.14), (3.9) будет соответствовать кривая

$$A_k = 4z_y^T I / \left[ (K_0 - I)^2 + 4z_y z_y^T I \right] \quad (3.10)$$

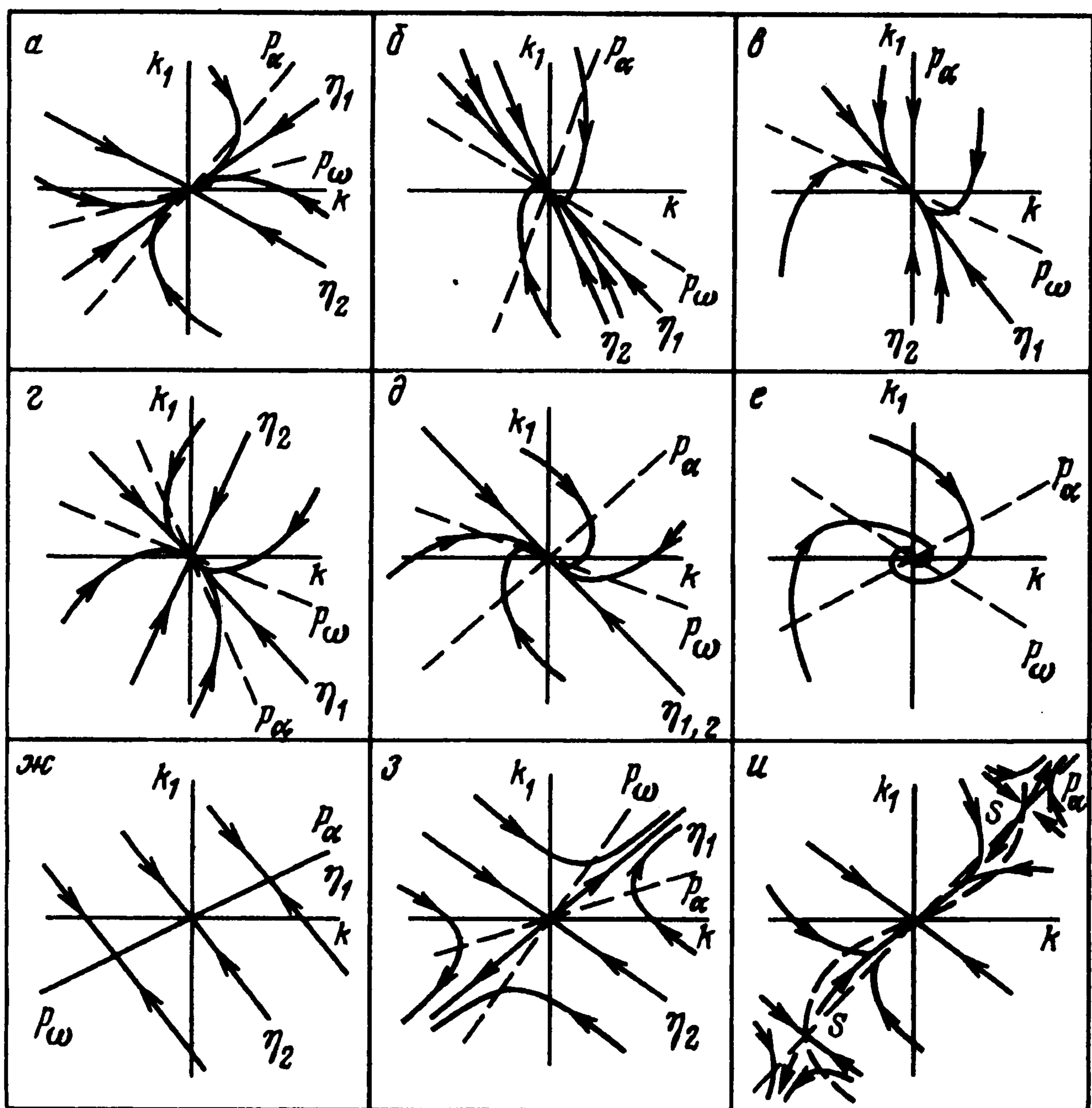
Согласно (2.13), (2.14),  $p_\alpha = p_\omega > 0$  при

$$z_y = -(A_k + 12\beta\mu) / \left[ 18 \left( 1 - \frac{2}{3} \beta\mu A_k \right) \right] \equiv f(A_k) \quad (3.11)$$

Зависимость (3.11) представлена на фиг. 1 кривой 1. Там же приведена кривая 2, отвечающая  $\Delta = 0$  (3.10), построенная для  $\beta\mu = 0,03$ . Кривая 3 соответствует разрыву второго рода параметра  $p_\alpha$  (2.14). Прямая 4 —  $z_y = -1/12$  отвечает однородному конусу при  $l = L$  (3.9).

В общем случае при произвольном распределении массы внутри конуса смысл имеют лишь точки (фиг. 1), расположенные между штрихпунктирными прямыми, верхняя из которых соответствует  $z_y = 2/3$ , а нижняя —  $z_y = -1/3$ . Заметим также, что кривая  $\Delta = 0$  (3.10) всегда располагается слева от кривой 3, где  $p_\alpha$  и  $p_\omega$  имеют разные знаки.

Точкам, лежащим выше кривой 1 (3.11) и ниже прямой  $z_y = -2\beta\mu/3$  ( $z_y^T = 0$ ,  $p_\omega = 0$ ), проходящей через точку пересечения кривых 1 и 2, отвечают значения  $p_\alpha > p_\omega > 0$  и  $\Delta > 0$ . При этом согласно [4] точка покоя  $(0, 0)$  в фазовой плоскости  $(k, k_1)$  представ-



Фиг. 2

ляет собой устойчивый узел, так как  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  и  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  (3.8). Траектории системы (3.4), отвечающие этому случаю, изображены на фиг. 2, а сплошными линиями. Стрелками указаны направления перемещения точек по траекториям при увеличении  $s$ , определенные согласно знакам правых частей уравнений (3.4), нули которых нанесены соответственно штриховыми прямыми с угловыми коэффициентами  $p_\alpha$  и  $p_\omega$ . Траектории-прямые  $\eta = \eta_1$  и  $\eta = \eta_2$  отвечают нулям (3.7) знаменателя уравнения (3.6). Все траектории, за исключением прямой  $\eta = \eta_2$ , касаются в точке покоя прямой  $k_1 = \eta_1 k$ . При  $z_y = -2\beta\mu/3$  (фиг. 1)  $p_\omega = \eta_1 = 0$ , поскольку  $\chi > 1$  (3.9), и все траектории, кроме  $\eta = \eta_2$ , будут касаться оси  $k_1 = 0$ .

В области значений параметров  $(A_k, z_y)$ , соответствующей точкам, расположенным выше прямой,  $z_y = -2\beta\mu/3$ , между кривыми 2 и 3 (фиг. 1),  $p_\alpha > 0, p_\omega < 0$ . Точка покоя — устойчивый узел (фиг. 2, б). При  $1 - z_y A_k \rightarrow 0$  ( $p_\alpha \rightarrow +\infty$ ) тип особой точки не меняется, прямолинейные траектории  $\eta = \eta_2$  совпадают с осью  $k = 0$  (фиг. 2, в). В области значений  $(A_k, z_y)$ , отвечающей точкам, расположенным над кривой 3 (фиг. 1),  $p_\alpha < p_\omega < 0, \eta_1 < 0, \eta_2 > 0, \lambda_1 \lambda_2 > 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ . Следовательно, и в этих случаях траектории представляют собой устойчивый узел (фиг. 2, г). Если точку  $(A_k, z_y)$  из области между кривыми 2 и 3 устремить к кривой 2 ( $\Delta = 0$ ), то траектории в фазовой плоскости примут вид, изображенный на фиг. 2, д и являющийся предельным для картины траекторий на фиг. 2, б при  $\eta_1 \rightarrow \eta_2$ .

Когда дискриминант  $\Delta < 0$  (3.7), что соответствует точкам, расположенным внутри области, ограниченной кривой 2 (фиг. 1), точка покоя является фокусом с траекториями в форме правых спиралей (фиг. 2, е).

Если точку  $(A_k, z_y)$  (фиг. 1) устремить сверху к кривой 1, соответствующей равенству  $p_\alpha = p_\omega$  (3.11), придем от картины фазовых траекторий, изображенной на фиг. 2, а, к вырожденному случаю (фиг. 2, ж), когда прямая  $k_1 = p_\alpha k$  состоит из точек покоя, что следует из уравнений (3.4). Траекториями являются прямые, удовлетворяющие дифференциальному уравнению  $dk_1/dk = -\chi p_\alpha$ , параллельные направлению  $\eta_2$  (3.7) и входящие в линию покоя. Если точка  $(A_k, z_y)$  расположена ниже кривой 1 (фиг. 1), то  $p_\omega > p_\alpha > 0$  и  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  (3.8). Точка покоя для системы (3.4) представляет собой седло, в которое входят лишь две траектории по взаимно противоположным направлениям – прямые с угловым коэффициентом  $\eta_2$  (фиг. 2, з).

Проинтегрировав уравнения (3.5) и (3.6), найдем

$$\Delta > 0, \quad s - s_0 = -\frac{1}{A_k \sqrt{\Delta}} \ln \frac{u}{u_0} \quad (3.12)$$

$$k = k_0 \left( \frac{u}{u_0} \right)^\gamma \frac{(1-u)}{(1-u_0)}$$

$$r = r_0 \left( \frac{u}{u_0} \right)^\gamma \sqrt{\frac{(1-u)^2 + (\eta_1 - u\eta_2)^2}{(1-u_0)^2 + (\eta_1 - u_0\eta_2)^2}}, \quad r = \sqrt{k^2 + k_1^2}$$

$$u = \frac{\eta - \eta_1}{\eta - \eta_2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\chi + 1}{\sqrt{\Delta}} - 1 \right)$$

$$\Delta = 0, \quad s - s_0 = \frac{\xi}{K_1}, \quad \xi = \frac{\eta_0 - \eta}{(\eta - \eta_1)(\eta_0 - \eta_1)} \quad (3.13)$$

$$k = k_0 \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta - \eta_1} \exp(-\gamma_1 \xi)$$

$$r = r_0 \left| \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta - \eta_1} \right| \sqrt{\frac{1 + \eta^2}{1 + \eta_0^2}} \exp(-\gamma_1 \xi), \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} (\chi + 1) p_\alpha$$

$$\Delta < 0, \quad s - s_0 = -\frac{2}{A_k \sqrt{-\Delta}} (\varphi - \varphi_0) \quad (3.14)$$

$$k = k_0 \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \exp[\gamma_2 (\varphi - \varphi_0)], \quad \gamma_2 = \frac{\chi + 1}{\sqrt{-\Delta}}$$

$$r = r_0 \sqrt{\frac{\Phi(\varphi)}{\Phi(\varphi_0)}} \exp[\gamma_2 (\varphi - \varphi_0)]$$

$$\Phi(\varphi) = \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} p_\alpha^2 \left( \sqrt{-\Delta} \sin \varphi - (\chi - 1) \cos \varphi \right)^2, \quad \eta = \frac{1}{2} p_\alpha \left[ \sqrt{-\Delta} \operatorname{tg} \varphi - (\chi - 1) \right]$$

Величины с нулевым индексом отвечают начальному состоянию.

Нетрудно убедиться, что все качественно описанные выше типы траекторий в окрестности точки покоя  $(0, 0)$  в фазовой плоскости  $(k, k_1)$  (фиг. 2) содержатся в полученном решении. В частности, переход от узловой к седловой особой точке в (3.12) осуществляется при изменении знака у параметра  $\gamma$  с плюса на минус. Изменение переменной  $u$  происходит в соответствии с ее зависимостью от переменной

$\eta$  и направлением движения точки по траектории, зависящим от величин параметров  $p_\alpha$  и  $p_\omega$ , начальной точки  $(k_0, \eta_0)$  и расположения луча  $\eta_0$  относительно направлений  $\eta_1, \eta_2$ . Однако во всех случаях справедливо предельное соотношение  $|u| \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \eta_1$ .

Обратимся к вопросу о влиянии неучтенного в проведенном анализе члена с коэффициентом  $A_j$  в правой части уравнения (2.15). Не приводя здесь исследования кривых – нулей выражения в квадратных скобках (2.15), укажем лишь, что кроме  $(0, 0)$  при  $A_j \neq 0$  общими нулями у правых частей уравнений (2.14) и (2.15) являются точки с координатами

$$k = \pm \frac{1}{p_\alpha} \sqrt{\frac{p_\alpha - p_\omega}{A_j}}, \quad k_1 = \pm \sqrt{\frac{p_\alpha - p_\omega}{A_j}} \quad (3.15)$$

Как видно из (3.15), еще две особые точки системы дифференциальных уравнений (2.14), (2.15) существуют, если  $p_\alpha > p_\omega$ , что, согласно фиг. 2, может быть лишь при  $p_\alpha > 0$ , и являются, в чем нетрудно убедиться, седловыми точками. Траектории, соответствующие случаю  $p_\alpha > p_\omega > 0$  с двумя седловыми точками  $S$ , качественно изображены на фиг. 2, *и*. Указанные особые точки должны быть учтены в случаях, когда определяющие параметры и начальные условия допускают их попадание в область безотрывного обтекания конуса (2.5).

Найдем условие, при котором седловые точки  $S$  (фиг. 2, *и*) не попадают в область (2.5), которую для простоты определим более сильными неравенствами

$$|k| < 1, \quad |k_1| < 2 \quad (3.16)$$

Подкоренное выражение в (3.15) можно представить в виде

$$\frac{p_\alpha - p_\omega}{A_j} = p_\alpha Q \quad (3.17)$$

$$Q = \left[ z_y \left( 1 - \frac{2}{3} \beta \mu A_k \right) + \frac{1}{18} A_k + \frac{2}{3} \beta \mu \right] (I \beta^2)^{-1}$$

Очевидно, что для непопадания седловых точек (3.15) в область (3.16) достаточно потребовать выполнения следующих систем неравенств при  $p_\alpha \geq 2$  (2.14) и  $p_\alpha < 2$  соответственно:

$$\begin{aligned} p_\alpha \geq 2, \quad p_\alpha Q &> 4 \\ p_\alpha < 2, \quad Q/p_\alpha &> 1 \end{aligned}$$

Обе системы неравенств могут быть заменены более сильным условием  $Q > 2$ , которое при учете (3.17), (3.11) запишем в виде

$$z_y > f(A_k) + 2I \beta^2 / (1 - \frac{2}{3} \beta \mu A_k) \quad (3.18)$$

Принимая во внимание выражения для  $I$  (3.9) и  $f(A_k)$  (3.11), можно сделать вывод, что при  $A_k \sim 1$ , что отвечает широкому диапазону соотношений плотности среды и средней плотности тела, второе слагаемое в (3.18) пренебрежимо мало. Оно становится значимым лишь при малых значениях параметра  $A_k$ . Так, в случае движения конуса в воздухе, когда  $A_k \sim 10^{-3}$  и  $\mu = 0$ , второе слагаемое в (3.18), по меньшей мере, имеет тот же порядок, что и  $f(A_k)$ , и должно быть учтено.

Из проведенного анализа следует важный качественный результат, что при безотрывном движении тонкого конуса в плотных средах, к которым относятся различные типы грунта, в рамках модели локального взаимодействия (1.1) требование к запасу

статической устойчивости в значительной мере ослаблено, тогда как для устойчивого движения в воздухе, вообще говоря, необходим положительный запас статической устойчивости (3.18).

Таким образом, движение тонкого конуса в плотных средах при  $D_0 \ll 1$  и  $D \ll 1$  будет заведомо устойчивым, если определяющие параметры обеспечивают попадание точки в плоскости  $(A_k, z_y)$  (фиг. 1) выше кривой 1 (3.18), а траектория в фазовой плоскости  $(k, k_1)$  целиком лежит в области безотрывного обтекания (2.5). Об особенностях движения тела около центра масс при  $D > 1$  будет сказано ниже.

**4. Движение центра масс.** В разд. 2 были сделаны допущения, что  $D_0 \ll 1$ , а  $D \ll 1$  на некотором отрезке времени. Это позволило не учитывать в уравнениях (2.12)–(2.14) члены порядка  $O(\beta^2 D)$  и  $O(\beta \mu D)$  по сравнению с единицей и получить решение (3.12)–(3.14) для движения тела около центра масс. На этом же характерном отрезке времени с использованием (3.5), (3.12)–(3.14) общее решение уравнения (3.3) для угла  $\theta$ , определяющего направление скорости центра масс в неподвижной системе координат, запишется в форме

$$\Delta > 0, \quad \theta - \theta_0 = \frac{k_0 \beta}{(1 - u_0) \sqrt{\Delta}} \left\{ \frac{1}{\gamma} K_2(\eta_1) \left[ 1 - \left( \frac{u}{u_0} \right)^\gamma \right] - \frac{u_0}{(1 + \gamma)} K_2(\eta_2) \left[ 1 - \left( \frac{u}{u_0} \right)^{1+\gamma} \right] \right\}, \quad K_2(\eta) = 1 + z_y \eta \quad (4.1)$$

$$\Delta = 0, \quad \theta - \theta_0 = \frac{2k_0 \beta}{(1 + \chi)} \left\{ K_2(\eta_0) [1 - \exp(-\gamma_1 \xi)] + \frac{1}{\gamma_1} K_2(\eta_1) (\eta_0 - \eta_1) [1 - (1 + \gamma_1 \xi) \exp(-\gamma_1 \xi)] \right\} \quad (4.2)$$

$$\Delta < 0, \quad \theta - \theta_0 = -\frac{k_0 \beta}{2\chi \cos \varphi_0} \frac{\sqrt{-\Delta} p_\alpha}{(p_\alpha - p_\omega)} \{ \Phi_1(\varphi) - \Phi_1(\varphi_0) \} \quad (4.3)$$

$$\Phi_1(\varphi) = \left\{ K_2(p_\alpha) \sin \varphi + \gamma_2 \left[ K_2(p_\alpha) - \frac{2\chi}{1 + \chi} z_y (p_\alpha - p_\omega) \right] \cos \varphi \right\} \exp[\gamma_2 (\varphi - \varphi_0)]$$

Переменные  $u$ ,  $\xi$  и  $\varphi$  в (4.1)–(4.3) определены в (3.12)–(3.14).

Заметим, что согласно (3.3) траектория движения центра масс будет прямой:  $\theta = \theta_0$ , если  $\eta = -1/z_y$ . Это может иметь место лишь в случаях, когда соответствующий луч совпадает с прямолинейными траекториями в фазовой плоскости, т.е.  $\eta_{1,2} = -1/z_y$  ( $\Delta \geq 0$ ). Анализ показывает, что такой тип движения центра масс будет существовать у конуса со специальным распределением массы по объему (3.9) при

$$A_k = 6 \left( \frac{2}{3} - z_y \right)^2 / [5(1 - 12\beta \mu z_y) z_y]$$

Соответствующая зависимость приведена на фиг. 1 отрезками кривой 5, как и кривая 2, для  $\beta \mu = 0,03$ . Причем, на отрезке, выходящем из точки  $(0, 2/3)$ , прямолинейная траектория центра масс будет реализовываться при  $\eta_0 = \eta_2 = -1/z_y$ , а на втором отрезке кривой 5 – при  $\eta_0 = \eta_1 = -1/z_y$ .

Рассмотрим уравнение для модуля скорости центра масс (3.2). Пусть на некотором отрезке времени справедлива оценка  $D \ll 1$ . Тогда общее решение уравнения (3.2) с использованием (3.5), (3.12)–(3.14) примет вид

$$\Delta > 0, \quad v_m = v_{m0} \left( \frac{u}{u_0} \right)^{\gamma_3} \exp \left\{ \frac{\gamma_3 k_0^2}{(1-u_0)^2} [R_1(u) - R_1(u_0)] \right\} \quad (4.4)$$

$$R_1(u) = \left[ \frac{a_1}{\gamma} - \frac{1}{1+2\gamma} (a_2 + a_3) \left( u - \frac{1+2\gamma}{2\gamma} \right) + \frac{1}{2} a_3 (u-1)^2 \right] \left( \frac{u}{u_0} \right)^{2\gamma}$$

$$a_1 = \frac{1}{4} \Delta p_\alpha^2 K_0, \quad a_2 = \sqrt{\Delta} p_\alpha (a_4 + \eta_2 K_0), \quad a_4 = \left( 1 + \frac{\beta}{\beta + \mu} \right) z_y$$

$$a_3 = \frac{1}{1+\gamma} \left\{ \left[ \frac{\beta}{\beta + \mu} + \frac{1}{2} K_2(\eta_2) \right] K_2(\eta_2) + \frac{1}{36} \eta_2^2 \right\}, \quad \gamma_3 = \frac{\beta(\beta + \mu)}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\Delta = 0, \quad v_m = v_{m0} \exp \left\{ \beta(\beta + \mu) p_\alpha \left[ \frac{k_0^2}{2\gamma_1} (R_2(\xi) - R_2(0)) - \xi \right] \right\} \quad (4.5)$$

$$R_2(\xi) = \left\{ \frac{1}{4\gamma_1^2} (\eta_0 - \eta_1)^2 \left( \frac{1}{2} K_0 \eta_1^2 + a_4 \eta_1 + a_5 \right) [1 + (1 + 2\gamma_1 \xi)^2] + \right.$$

$$+ \frac{1}{2\gamma_1} (\eta_0 - \eta_1) [K_0 \eta_0 \eta_1 + a_4 (\eta_0 + \eta_1) + 2a_5] (1 + 2\gamma_1 \xi) +$$

$$\left. + \left( \frac{1}{2} K_0 \eta_0 + a_4 \right) \eta_0 + a_5 \right\} \exp(-2\gamma_1 \xi), \quad a_5 = \frac{a_4}{z_y} - \frac{1}{2}$$

$$\Delta < 0, \quad v_m = v_{m0} \exp \left\{ \frac{2\beta(\beta + \mu)}{\sqrt{-\Delta}} \left[ \varphi - \varphi_0 + \frac{k_0^2}{4 \cos^2 \varphi_0} (R_3(\varphi) - R_3(\varphi_0)) \right] \right\} \quad (4.6)$$

$$R_3(\varphi) = \left\{ \frac{a_6}{\gamma_2} - \frac{\Delta}{(1+\gamma_2^2)} [a_7 (\gamma_2 \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) + \right.$$

$$\left. + a_8 (\gamma_2 \sin 2\varphi - \cos 2\varphi) \right\} \exp[2\gamma_2 (\varphi - \varphi_0)]$$

$$a_6 = a_5 + \frac{1}{2} (1 - \chi) p_\alpha a_4 + \frac{1}{2} a_1 \left[ \frac{(1 - \chi)^2}{\Delta} - 1 \right]$$

$$a_7 = a_1 + a_6, \quad a_8 = \sqrt{-\Delta} \left[ \frac{(1 - \chi)}{\Delta} a_1 + \frac{1}{2} p_\alpha a_4 \right]$$

Определим  $u = u_1$  ( $\Delta > 0$ ) (3.12), когда  $D$  и сумма остальных переменных членов в квадратной скобке уравнения (3.2) совпадают по величине. С использованием (3.12) и (4.4) получим

$$D_0 = \frac{1}{2} \frac{k_0^2}{(1-u_0)^2} \left( \frac{u_1}{u_0} \right)^{2(\gamma+\gamma_3)} \exp \left\{ \frac{2\gamma_3 k_0^2}{(1-u_0)^2} [R_1(u) - R_1(u_0)] \right\} \times$$

$$\times \left\{ [(1-u_1) K_2(\eta_2) + z_y p_\alpha \sqrt{\Delta}]^2 + \frac{1}{18} [p_\alpha \sqrt{\Delta} + \eta_2 (1-u_1)]^2 \right\} \quad (4.7)$$

Из (4.7) найдем, что при  $\gamma \gg \gamma_3$ , или, что то же, при

$$1 - \frac{p_\infty}{p_0} \gg \frac{\chi}{(\chi+1)\beta(\beta+\mu)} \quad (4.8)$$

порядок правой части равенства (4.7) определяется множителем  $(u_1/u_0)^{2\gamma}$ , поскольку  $|u| \rightarrow 0$  и аргумент экспоненты по порядку величины не превосходит  $\gamma_3$ . Отсюда следует важный вывод. Если определяющие параметры задачи таковы, что точка  $(A_k, z_\gamma)$  не располагается в малой окрестности на кривой  $z_\gamma = f(A_k)$  (3.11) (кривая  $l$  на фиг. 1), на которой реализуется выроджденный случай движения около центра масс (фиг. 2, ж), то за время, по истечении которого  $D$  и сумма остальных переменных членов в квадратной скобке уравнения (3.2) становятся равными,  $u_{m1}/u_{m0}$  продолжает оставаться величиной порядка единицы. В главном приближении из (4.7) найдем  $u_1$ , а из (4.4) и (3.12) — соответствующие значения  $u_{m1}$  и  $s_1$ . Получим

$$\frac{u_1}{u_0} = \left( \frac{2D_0}{r_0^2} \right)^{1/(2\gamma)}$$

$$\frac{u_{m1}}{u_{m0}} = 1 + \frac{\beta\sqrt{\Delta}}{\beta(\beta+\mu)} \ln \left( \frac{u_1}{u_0} \right) [1 + O(\beta(\beta+\mu) \ln D_0)] \quad (4.9)$$

$$s_1 - s_0 = - \frac{A_k \sqrt{\Delta}}{1} \ln \left( \frac{u_1}{u_0} \right)$$

Таким образом, если выполняется условие (4.8), то при  $u > u_1$  (4.9) члены в правой части уравнения (3.2), связанные с движением тела около центра масс, вносят в торможение тела вклад, который по порядку величины не превосходит  $O(D_0)$ , и поэтому могут быть отброшены. Начиная с указанного момента, скорость тела может определяться из уравнения

$$\frac{dv_m^2}{ds} = -2v_m^2 \beta(\beta+\mu) A_k (1+D) \quad (4.10)$$

при начальном условии  $u_m = u_{m1}$ , определяемом из (4.9).

Проводя аналогичные рассуждения с использованием соотношений (3.13), (4.5) и (3.14), (4.6), найдем соответственно величины  $\xi_1$  и  $\Phi_1$

$$\Delta = 0, \quad \xi_1 = - \frac{2\gamma_1}{1} \ln \frac{r_0}{2D_0} \quad (4.11)$$

$$\frac{u_{m1}}{u_{m0}} = 1 - \beta(\beta+\mu) p^\alpha \xi_1$$

$$s_1 - s_0 = - \frac{A_k(1+\chi)}{1} \ln \frac{r_0}{2D_0}$$

$$\Delta > 0, \quad \Phi_1 - \Phi_0 = \frac{2\gamma_2}{1} \ln \frac{r_0}{2D_0} \quad (4.12)$$

$$\frac{u_{m1}}{u_{m0}} = 1 + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\beta(\beta+\mu)} (\Phi_1 - \Phi_0)$$

В случае  $\Delta > 0$  (4.12) выражение для  $s_1 - s_0$  имеет тот же вид, что и при  $\Delta = 0$  (4.11).

Итак, показано, что при  $s \geq s_1$  скорость центра масс с принятой точностью подчиняется дифференциальному уравнению (4.10), решение которого запишем в форме

$$s - s_1 = \frac{1}{2\beta(\beta + \mu) A_k} \ln \left[ \frac{\left( 1 + \frac{1}{D_0} \left( \frac{v_{m1}}{v_{m0}} \right)^2 \right)}{\left( 1 + \frac{1}{D_0} \left( \frac{v_m}{v_{m0}} \right)^2 \right)} \right] \quad (4.13)$$

В то время, как решение для  $v_m$  (4.4)–(4.6) справедливо согласно (4.9), (4.11), (4.12) при  $0 < s - s_0 \leq s_1 - s_0 \sim -\ln D_0$ , решения для  $k$  и  $r$  (3.12)–(3.14) и  $\theta$  (4.1)–(4.3) имеют необходимую точность при  $D \leq 1$ . Отметим также, что  $r_1 \sim r_0 \sqrt{D_0}$  при  $s_1 - s_0 \sim -\ln D_0$ .

Найдем порядок  $r$  при  $D = 1$ , что равносильно  $(v_{m2}/v_{m0})^2 = D_0$ . Из (4.13) определим путь, пройденный центром масс за время, в течение которого скорость уменьшилась от  $v_{m1}$  до  $v_{m2}$ . Имеем

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{2\beta(\beta + \mu) A_k} \ln \left[ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{D_0} \left( \frac{v_{m1}}{v_{m0}} \right)^2 \right] \right] \quad (4.14)$$

С использованием (4.9), (4.11), (4.12) и (4.14) получим оценку для  $s_2 - s_0$

$$\begin{aligned} \Delta > 0, \quad s_2 - s_0 = & -\frac{1}{(1 + \chi - \sqrt{\Delta}) A_k} \ln \frac{2D_0}{r_0^2} + \\ & + \frac{1}{2\beta(\beta + \mu) A_k} \ln \left[ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{D_0} \left( \frac{v_{m1}}{v_{m0}} \right)^2 \right] \right] \sim -\frac{\ln D_0}{2\beta(\beta + \mu) A_k} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\Delta \leq 0, \quad s_2 - s_0 = -\frac{1}{(1 + \chi) A_k} \ln \frac{2D_0}{r_0^2} + s_2 - s_1 \sim -\frac{\ln D_0}{2\beta(\beta + \mu) A_k}$$

Учитывая (4.15), найдем при  $s = s_2$  оценку для расстояния  $r$  (3.12)–(3.14) от точки на фазовой траектории до точки покоя

$$\Delta > 0, \quad r \sim r_0 (D_0)^{\gamma_4}, \quad \gamma_4 = \frac{\gamma}{2\gamma_3} \quad (4.16)$$

$$\Delta \leq 0, \quad r \sim r_0 (D_0)^{\gamma_5}, \quad \gamma_5 = \frac{1 + \chi}{4\beta(\beta + \mu)}$$

Согласно (4.16) и (4.8), можно сделать вывод, что движение около центра масс при  $s = s_2$  практически прекратилось. Однако при дальнейшем торможении тела может оказаться, что члены, содержащие  $D$  и отброшенные в (2.12)–(2.15), стремятся к бесконечности быстрее, чем  $k$  и  $k_1$  к нулю. В этих условиях правые части уравнений движения около центра масс (3.4) будут неограниченно расти, что приведет к разрушению "установившегося" движения на заключительном этапе торможения тела –  $v_m/v_{m0} \leq \sqrt{D_0}$ ; причем ответственным за это будет член в модели локального взаимодействия, характеризующий сопротивляемость среды деформированию.

Анализ показывает, что при учете соотношений (3.12), (4.9), (4.13), (4.14) и (4.16) указанное разрушение движения может произойти лишь при выполнении условия

$$1 - \frac{P_\omega}{P_\alpha} \leq \frac{\chi + 1}{\chi} \beta (\beta + \mu)$$

Таким образом, разрушение движения может реализоваться только в малой окрестности вырожденного случая движения (фиг. 2, ж), которому отвечает кривая  $I$  на

фиг. 1, и иметь два характерных типа. Первый, когда движение около центра масс, почти прекратившись (4.16), начнет "расти"; второй, когда вышедшие на некоторые асимптоты  $k$  и  $k_1$  (фиг. 2, ж) начнут удаляться от них при  $D > 1$ .

Подставляя  $s_2 - s_0$  (4.15) при учете связей (3.12)–(3.14) в соотношения для  $\theta$  (4.1)–(4.3), можно убедиться, что члены, ответственные за изменение угла наклона траектории, становятся внепорядковыми. Отсюда следует, что при  $s > s_2$  центр масс конуса движется по прямой, угол наклона которой определяется формулами

$$\Delta > 0, \quad \theta - \theta_0 = \frac{k_0 \beta}{(1 - u_0) \sqrt{\Delta}} \left[ \frac{1}{\gamma} K_2(\eta_1) - \frac{u_0}{1 + \gamma} K_2(\eta_2) \right] \quad (4.17)$$

$$\Delta = 0, \quad \theta - \theta_0 = \frac{2k_0 \beta}{1 + \chi} \left[ K_2(\eta_0) + \frac{1}{\gamma_1} (\eta_0 - \eta_1) K_2(\eta_1) \right]$$

$$\Delta < 0, \quad \theta - \theta_0 = \frac{k_0 \beta \sqrt{-\Delta} p_\alpha}{2\chi \cos \varphi_0 (p_\alpha - p_\omega)} \left\{ (\sin \varphi_0 + \gamma_2 \cos \varphi_0) K_2(p_\alpha) - \frac{2\gamma_2 \chi}{1 + \chi} z_y (p_\alpha - p_\omega) \cos \varphi_0 \right\}$$

**5. Выводы и замечания.** Резюмируя проведенное исследование динамики жесткого тонкого тела вращения со слабо изменяющимся наклоном продольного контура (конуса) в плотной среде при его безотрывном обтекании, следует прежде всего заметить, что асимптотика тонкого тела в рамках модели локального взаимодействия, учитывающей влияние угловой скорости вращения и кулоновское трение, с динамической составляющей давления на поверхности контакта, значительно превосходящей в начальный момент времени сопротивляемость среды деформированию, позволила свести плоскую задачу к отдельному анализу движения тела около центра масс в специальных фазовых переменных и на этой основе движения центра масс.

Существенно, что в рамках указанной модели взаимодействия область изменения определяющих параметров с асимптотически устойчивым движением тела содержит подобласть с отрицательными значениями запаса статической устойчивости, что не имеет места при движении в газе. В частности, статически неустойчивый тонкий конус с равномерным распределением массы по объему ( $z_y = -1/12$ , прямая 4 на фиг. 1) в плотной среде может двигаться устойчиво при  $A_k \geq 1$  (2.11).

Полученные результаты ставят под сомнение существующее убеждение, что движение тонких тел в плотных средах неустойчиво, базирующееся на экспериментальных данных, которые существенно зависят, по меньшей мере, от следующих факторов: условий подхода тела к границе плотной среды, определяющих начальные параметры движения при полном погружении тела в среду, наличия изотропии среды и прочности тела. Наконец, согласно проведенному анализу (разд. 4), дезорганизация в действительности асимптотически устойчивого движения тела может произойти на заключительном этапе, если  $kD$  и (либо)  $k_1 D \rightarrow \infty$  при  $u_m \rightarrow 0$ .

Исследование позволило установить, что устойчивое движение тонкого тела можно разделить на три характерных этапа. На первом, который назовем переходным режимом, реализующемся при  $s_0 \leq s \leq s_1$  ( $s_1 - s_0 \sim -\ln D_0$ ), скорость тела меняется слабо, движение около центра масс существенно затухает ( $1 \geq r/r_0 \geq \sqrt{D_0}$ ), завершается основное изменение угла наклона траектории центра масс ( $\beta \geq |d\theta/ds| \geq \beta \sqrt{D_0}$ ).

На втором этапе, который назовем регулярным режимом, реализующемся при  $s_1 \leq s \leq s_2$  ( $s_2 - s_1 \sim -\ln D_0 / [2\beta(\beta + \mu) A_k]$ ), тело проходит максимальный отрезок пути, движение тела около центра масс прекращается ( $\sqrt{D_0} \geq r/r_0 \geq 0$ ), угол наклона траектории выходит на асимптоту ( $\beta \sqrt{D_0} \geq |d\theta/ds| \geq 0$ ).

На третьем, заключительном этапе, который назовем прямолинейным режимом, реализуемся при  $s_2 \leq s \leq s_3$  ( $s_3 - s_2 \sim \ln 2/[2\beta(\beta + \mu) A_k]$ ), когда сопротивляемость среды деформированию превалирует над динамической составляющей в модели взаимодействия, тело при отсутствии движения около центра масс проходит второй по величине отрезок пути, перемещаясь по прямолинейной траектории до полной остановки либо до заключительного этапа дезорганизации устойчивого движения.

Траектория центра масс тела строится по формулам

$$x = x_0 + L \int_{s_0}^s \cos \theta ds, \quad y = y_0 + L \int_{s_0}^s \sin \theta ds$$

Полученное решение может быть использовано как в случае устойчивых, так и неустойчивых траекторий в фазовой плоскости (фиг. 2), пока точка  $(k, k_1)$  располагается в области безотрывного обтекания (2.5).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомоян А.Я. Проникание. Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
2. Остапенко Н.А. О центре движения конических тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 99–104.
3. Остапенко Н.А., Романченко В.И., Якунина Г.Е. Оптимальные формы пространственных тел с максимальной глубиной проникания в плотные среды // ПМТФ. 1994. № 4. С. 32–40.
4. Петровский Г.И. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984. 295 с.

Москва

Поступила в редакцию  
26.VI.1995