УДК 532.546

© 1997 г. А.Ю. Беляев

О КРИТИЧЕСКОМ НАПОРЕ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Рассматривается течение жидкости Бингама в пористой среде, моделируемой некоторой случайной структурой, размеры которой велики по сравнению с локальными масштабами. В этом пределе явно вычисляется главный член асимптотики критического напора, при котором жидкость начинает движение.

При фильтрации жидкостей Бингама сквозь пористую среду связь между скоростью фильтрации и напором, равным разности объемной плотности массовых сил и градиента давления, нелинейна и содержит критический параметр: фильтрация происходит только при напорах, превышающих некоторое пороговое значение. Похожим образом ведут себя некоторые смеси жидкостей, не обладающих исходно жесткопластическими свойствами. Например, вода с пузырьками воздуха может не течь в пористой среде из-за того, что происходит закупорка пор, и для начала фильтрации нужен напор, способный протолкнуть пузырьки, преодолев их поверхностное натяжение.

В реальных пористых средах соотношение Дарси, в общем случае нелинейное, между напором и скоростью фильтрации устанавливают экспериментально. Возможен также чисто теоретический подход. Он заключается в исследовании задач о течении жидкостей в пористой области, представляющей собой систему многочисленных пор, с последующим усреднением, т.е. выявлением главного члена асимптотики решений по возрастающему числу пор. Иногда на этом пути удается установить приемлемые оценки параметров в соотношении Дарси и их связь со свойствами жидкости и структурой среды. Не менее важным, хотя и чисто качественным результатом таких исследований является само обоснование возможности перейти от задачи на микроуровне к более простым уравнениям теории фильтрации. Для линейно-вязких жидкостей указанный подход к обоснованию закона Дарси применялся ранее [1–3], причем пористая структура при этом задавалась мелкомасштабной областью с периодической структурой. Было также построено [4, 5] обобщение этих результатов для случайных структур. Усреднение течений жидкостей Бингама рассматривалось [6] только для периодических структур. Специфика жидкостей Бингама создает ряд трудностей для усреднения в случайных пористых областях.

В предлагаемой работе рассмотрена задача, иллюстрирующая одну из этих трудностей и показывающая, каких новых по сравнению с периодическим случаем эффектов следует ожидать при усреднении.

1. Постановка задачи. Рассматривается пористая среда, состоящая из большого числа случайных однонаправленных пор. Сечение этой системы пор плоскостью, перпендикулярной к их направлению, является случайной двумерной областью Ω, которая состоит из отдельных компонент случайной формы, размеров и положения, но может также быть связной. Такую структуру имеют волокнистые пористые материалы. Ее можно использовать и в общей ситуации, когда перетекание жидкости по поперечным порам несущественно. Для области Ω используем модель бернуллиевой случайной шахматной доски. Она строится следующим образом: квадрат размером $r \times r$ разбивается на большое число клеток размером $a \times a$, $a \ll r$, затем каждая клетка независимо от остальных с вероятностью p оставляется на своем месте, либо с дополнительной вероятностью $1-p$ исключается; область $\Omega = \Omega^{(r)}$ – это множество, состоящее из оставленных клеток. Для определенности будем считать r большим параметром, а размер клетки a – фиксированным числом. Выбранная модель не лучшим образом отражает геометрическую структуру реальных пористых сред, однако она популярна в исследованиях благодаря своей наглядности и простоте описания.

Пусть жидкость заполняет все поровое пространство и в продольном направлении на нее действует постоянный напор. Задача об установившемся движении в этом случае сводится к плоской задаче в сечении Ω для продольной составляющей скорости жидкости с условием Дирихле на границах пор. Критический напор (КН), при котором жидкость начинает движение, является случайным числом, зависящим от параметра r. Будет показано, что главный член асимптотики КН при $r \to \infty$ имеет вид $C/\sqrt{\ln r}$ с явно вычисляемой неслучайной постоянной C.

Будь пористая структура периодической, КН при $r \to \infty$ имел бы положительный предел. Следовательно, учет случайности структуры может решающим образом повлиять на ее усредненные фильтрационные свойства и привести к вырождению КН.

Качественно это вырождение легко объясняется. При возрастании напора жидкость Бингама в первую очередь начинает движение в самых широких порах. Поэтому величина КН определяется не типичными участками пористой структуры, а наличием в ней аномально крупных пор. Чем представительней кусок пористой среды, тем скорее в нем найдется особенно крупная пора и, следовательно, тем при меньшем напоре в нем начнется движение. Поэтому происходит вырождение КН. Порядок вырождения и тем более явный вид асимптотики зависят от конкретной модели случайной структуры. При этом определяющими являются не среднестатистические свойства структуры вроде типичного размера пор, а вероятности больших уклонений. Отсюда следует, что методы усреднения для жидкостей Бингама в реальной пористой среде могут оказаться неэффективными, поскольку статистика редких отклонений никогда не восстанавливается надежно из результатов непосредственных наблюдений.

2. Основные определения и формулировка результата. Скорость жидкости в описанной выше цилиндрической области имеет только одну компоненту u, зависящую от координат (x, y) на Ω. Тензор скоростей деформаций имеет лишь две существенные компоненты, которые выражаются через компоненты градиента функции u. Реологию жидкости Бингама определим, задав ее диссипативный потенциал формулой

$$W(\nabla u) = k|\nabla u| + \mu|\nabla u|^2/2, \quad \nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$$

Две отличные от нуля компоненты тензора касательных напряжений определяются по W равенством $\tau = \partial W/\partial \nabla u$ там, где функция W дифференцируема; в конической же точке $\nabla u = 0$ они могут принимать значения в пределах $|\tau| \leqslant k$. Для дальнейшего конкретный вид второго слагаемого в диссипативном потенциале не играет роли, лишь бы оно обеспечивало выпуклость и достаточную степень роста W.

Известно, что задача об установившемся движении вязкой жидкости в цилиндре имеет вариационную формулировку [7, 8]: продольная компонента скорости жидкости доставляет минимум функционалу

$$J(u) = \int_\Omega [W(\nabla u) - iu]dxdy$$

где i – напор, а нижняя грань J ищется по функциям $u(x, y)$ равным нулю на границе $\partial\Omega$ сечения цилиндра.

Из-за конической особенности диссипативного потенциала минимум J равен нулю не только при $i = 0$, но и при достаточно малых $i > 0$. При увеличении напора минимум становится отрицательным, а минимизант $u(x, y)$ – отличным от нуля. Формальное определение КН, при котором это происходит, имеет вид

$$i^*(\Omega) = \sup\{i: \inf J = 0\} = \inf\{i: \inf J < 0\}$$

Наряду с J рассмотрим функционал

$$J_0(u) = \int_\Omega [k|\nabla u| - iu]dxdy$$

Решение задачи непрерывно зависит от i, поэтому при напорах, близких к критическому, второе слагаемое в выражении для W мало. Следовательно, в определении i^* можно вместо функционала J использовать J_0. Точная формулировка этого утверждения такова: при $i < i^*$ $\inf J_0 = 0$, а при $i > i^*$ $\inf J_0 = -\infty$. Отсюда вытекает следующее вариационное определение КН:

$$i^*(\Omega) = \inf\left\{k\int_\Omega |\nabla u|dxdy : \int_\Omega udxdy = 1\right\} \tag{2.1}$$

Нижняя грань здесь ищется по функциям, удовлетворяющим условию нормировки и равным нулю на $\partial\Omega$. Отметим, что функционал J_0 не обладает достаточной степенью роста, и его нижняя грань при $i \geqslant i^*$ может не достигаться. Тем более его минимизант, как и минимизант в (2.1), не обязан совпадать с решением исходной задачи.

Явное вычисление $i^*(\Omega)$ по формуле (2.1) возможно лишь для простых областей Ω, например для круга. Течениям вязких жидкостей в трубах круглого сечения, в том числе жидкостей Бингама, посвящены многочисленные исследования ([7, 8]). Для описанной выше случайной шахматной структуры $\Omega^{(r)}$ аналитическое решение невозможно, однако главный член асимптотики $i^*(\Omega^{(r)})$ при $r \to \infty$ находится явно и имеет вид

$$i^*(\Omega^{(r)}) \approx k\lambda_d V_r^{-1/d}, \quad V_r = da^d \ln(r/a)(\ln(1/p))^{-1} \tag{2.2}$$

$$\lambda_d = d\sqrt{\pi}(\Gamma(1 + d/2))^{-1/d}$$

Это соотношение является основным результатом работы. Здесь $d = 2$ обозначает размерность задачи (2.1), которую формально можно поставить в пространстве любой размерности, а $\lambda_2 = 2\sqrt{\pi}$. Символ « $\approx$ » в (2.2) использован для сходимости по вероятности. Его точный смысл состоит в том, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ отношение левой и правой частей соотношения (2.2) отличается от единицы менее чем на ε с вероятностью, стремящейся к единице при $r \to \infty$. Ниже соотношение (2.2) будет доказано при дополнительном предположении $p \ll 1$, т.е. при малых значениях пористости, хотя оно справедливо и для конечных p.

Математической задаче (2.1) можно дать иную физическую интерпретацию. Предположим, что в трехмерном пространстве с координатами (x, y, z) нижняя половина $z < 0$ заполнена водой, а верхняя – пористым материалом, который водой не смачивается и содержит в порах воздух. Пусть все поры этого материала имеют вертикальное направление и занимают область $\Omega \times [0, +\infty)$, где Ω – это совокупность отверстий в плоскости (x, y). Проникновению воды через отверстия Ω в верхнее полупространство препятствует поверхностное натяжение. При одинаковом давлении в воде и в воздухе граница между ними лежит в плоскости $z = 0$. Если же давление в воде больше, то граница сдвигается вверх и имеет вид некоторой поверхности $z = Z(x, y)$, опирающейся краями на края отверстий. При значительных перепадах давления сил поверхностного натяжения может не хватить для удержания системы в равновесии, и начнется инфильтрация воды внутрь пористого материала. Форму равновесной границы $Z(x, y)$ можно найти, минимизировав функционал

$$I(Z) = \int_\Omega [\gamma(1 + |\nabla Z|^2)^{1/2} - PZ]dxdy$$

где γ – коэффициент поверхностного натяжения, а P – постоянный перепад давления между водой и воздухом.

Функционал I представляет собой сумму поверхностной и потенциальной энергии куполообразных капель, проникших под давлением в верхнее полупространство. При минимизации энергии к сравнению допускаются функции $Z(x, y)$, равные нулю на границе области Ω. Член с поверхностной энергией в I имеет ту же степень роста, что и линейное слагаемое. Поэтому при давлениях P, превышающих некоторое критическое значение P^*, минимум I уходит в минус бесконечность, а равновесная форма межфазной границы перестает существовать.

Из неравенств $|\nabla Z| \leq (1+|\nabla Z|^2)^{1/2} \leq 1+|\nabla Z|$ следует, что нижняя грань I обращается в $-\infty$ одновременно с нижней гранью функционала

$$I_0(Z)=\int_\Omega [\gamma|\nabla Z|-PZ]dxdy.$$

Он совпадает с точностью до обозначений с функционалом J_0, введенным выше в связи с жидкостью Бингама. Поэтому критический перепад давления P^* определяется по той же формуле (2.1), что и критический напор i^*, с заменой параметра k на коэффициент поверхностного натяжения γ.

Ранее исследовалась [9, 10] асимптотика наименьшего собственного значения оператора Лапласа $(-\Delta)$ в случайной перфорированной области. Для этого значения справедлива вариационная формула Релея, которая по форме аналогична (2.1), но содержит вторые степени ∇u и u в функционале и условии нормировки. Эта аналогия позволяет использовать методы, развитые в [9, 10] и некоторых более ранних работах, для вывода асимптотической формулы (2.2).

Следует отметить, что результаты [9] относились к модели случайной структуры, отличной от вышеописанной шахматной. Область Ω представляла собой d-мерный куб с ребром длины r, из которого удалены случайно расположенные шары постоянного радиуса. Центры шаров имели распределение Пуассона с плотностью $\nu > 0$. Для этой структуры асимптотика КН i^* при $r \to \infty$ также может быть вычислена. Для сравнения с (2.2) приведем окончательный результат

$$i^* = k\lambda_d(d(\ln r)/\nu)^{-1/d}$$

где постоянная λ_d имеет то же значение, что и для шахматной структуры.

3. Оценка критического напора сверху. Докажем, что вероятность события

$$i^*(\Omega^{(r)}) > k\lambda_d V_r^{-1/d}(1+\varepsilon) \tag{3.1}$$

стремится к нулю при $r \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Вместе с соответствующей оценкой по вероятности снизу это обеспечит асимптотическое равенство (2.2).

Пусть Ω, Ω' – две области на плоскости $\mathbb{R}^d$, и $\Omega' \subset \Omega$. Тогда $i^*(\Omega) \leq i^*(\Omega')$, что следует непосредственно из определения КН. Это неравенство используем для построения оценки $i^*(\Omega^{(r)})$ сверху, подобрав вписанную в $\Omega^{(r)}$ область Ω' так, чтобы величина $i^*(\Omega')$ вычислялась явно.

Ниже понадобится формула для КН в трубе круглого сечения. Она имеет вид

$$i^* = k\lambda_d S^{-1/d}$$

где S – площадь поперечного сечения трубы.

Полный вывод этой формулы содержится, например, в [8]. На физическом уровне строгости для ее вывода следует приравнять суммарный напор iS силе трения жидкости о стенки, отнесенной к единице длины трубы. При $i = i^*$ эта сила равна произведению предела текучести k на длину окружности сечения, т.е. на $2\sqrt{\pi S}$ при $d = 2$. При $d \neq 2$ вместо длины окружности следует использовать площадь поверхности d-мерного шара. Для шара единичного объема площадь поверхности выражается через Γ-функцию и равна λ_d.

Покроем квадрат $r \times r$, в котором содержится $\Omega^{(r)}$, одинаковыми непересекающимися кругами площадью S каждый. Величину $S = S(r)$ выберем потом, однако заранее будем считать, что $a^d \ll S \ll r^d$. Покрытие осуществим таким образом, чтобы ни одна из клеток $a \times a$, на которые разбит квадрат, не пересекалась с двумя кругами одновременно, а также чтобы количество кругов N удовлетворяло при $r \to \infty$ оценке $N \geqslant Cr^d/S$ с некоторой постоянной C. Если хотя бы один круг окажется целиком внутри случайного множества $\Omega^{(r)}$, то его можно взять в качестве вспомогательной области Ω'. Тогда имеет место неравенство

$$i^*(\Omega^{(r)}) \leqslant k\lambda_d S^{-1/d} \tag{3.2}$$

Количество клеток n, имеющих непустое пересечение с одним из кругов, от круга к кругу может меняться, однако при достаточно больших S справедлива равномерная оценка

$$n \leqslant (1+\delta)S/a^d, \quad \delta > 0$$

Вероятность того, что фиксированный круг содержится в $\Omega^{(r)}$, т.е. ни одна из пересекающихся с ним клеток не оказалась выброшенной, равна p^n. Вероятность противоположного события равна $1 - p^n$, а вероятность того, что ни один из N кругов не лежит целиком в $\Omega^{(r)}$, равна произведению N таких выражений, так как конфигурации, относящиеся к разным кругам, независимы. Это произведение не превосходит величины

$$(1 - p^{(1+\delta)S/a^d})^{Cr^d/S} \tag{3.3}$$

которая, таким образом, оценивает сверху вероятность события, противоположного (3.2). Теперь положим $S = V_r \cdot (1+\delta)^{-2}$. Нетрудно убедиться, что при этом выборе функции $S(r)$ величина (3.3) стремится к нулю. Для завершения доказательства остается только определить $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы событие, противоположное к (3.2), совпадало с (3.1).

4. Оценка критического напора снизу. Вывод нижней оценки для КН – гораздо более трудоемкая задача. Сначала, как и в [9], рассмотрим случай малой пористости, а затем приведем схему доказательства для конечных p. Идея построения нижней оценки опирается на изопериметрическое неравенство, которое сформулируем в виде следующей леммы ([8], лемма 2.4).

Лемма 1. Критический напор $i^*(\Omega)$ в трубе с произвольным сечением Ω не меньше критического напора для трубы круглого сечения той же площади:

$$i^*(\Omega) \geqslant k\lambda_d |\Omega|^{-1/d}$$

где $|\Omega|$ – площадь Ω.

Аналогичное утверждение для наименьшего собственного значения оператора Лапласа в области Ω с условием Дирихле на границе хорошо известно. Оно было доказано Релеем (см. современное изложение этого доказательства в [11]). Доказательство леммы 1 требует лишь незначительных изменений по сравнению с изложенным ранее [11], поэтому его не приводим.

Для случая малой пористости основное соотношение (2.2) следует из того, что вероятность события

$$i^*(\Omega^{(r)}) \leqslant k\lambda_d V_r^{-1/d}(1-\varepsilon) \tag{4.1}$$

стремится для любого $\varepsilon > 0$ к нулю, если $r \to \infty, p \to 0$.

Для доказательства последнего утверждения обозначим через $A^{(r)}$ конечное множество, состоящее из центров клеток, на которые разбит квадрат $r \times r$. Элементы $A^{(r)}$ будем использовать для нумерации клеток. Для каждого $\alpha \in A^{(r)}$ обозначим через Ω_α связную компоненту случайного множества $\Omega^{(r)}$, в которой лежит соответствующая клетка ($\Omega_\alpha \neq \varnothing$, если клетка оказалась выброшенной и не содержится в $\Omega^{(r)}$). В теории перколяции ([12]) области Ω_α называются кластерами. Очевидно, что КН для всей структуры равен минимальному из критических напоров в изолированных цилиндрах с непустыми сечениями Ω_α. По лемме 1 имеем оценку

$$i^*(\Omega^{(r)}) = \min\{i^*(\Omega_\alpha),\ \alpha \in A^{(r)}\} \leqslant k\lambda_d(\max\{|\Omega_\alpha|,\ \alpha \in A^{(r)}\})^{-1/d} \tag{4.2}$$

Таким образом, КН оценивается сверху через площадь максимального из кластеров Ω_α, $\alpha \in A^{(r)}$. В теории перколяции известна оценка по вероятности размера конечного кластера ([12]): для произвольного $S > 0$ вероятность того, что кластер Ω_α содержит больше, чем S/a^d клеток, не превосходит величины $(Cp)^{S/a^d}$ с некоторой постоянной C, зависящей только от размерности задачи. Эта оценка относится к неограниченной случайной решетке, но для сужения структуры на квадрат $r \times r$ она тем более справедлива. Оценка имеет смысл лишь для достаточно малых значений $p < C^{-1}$.

Событие $\max\{|\Omega_\alpha|, \alpha \in A^{(r)}\} > S$ на вероятностном пространстве является суммой событий $|\Omega_\alpha| > S$ по всем $\alpha \in A^{(r)}$. Поэтому его вероятность не превосходит суммы их вероятностей и оценивается величиной

$$(r/a)^d (Cp)^{S/a^d} = \exp\{(S/a^d)\ln C - (S/a^d)\ln(1/p) + d\ln(r/a)\} \tag{4.3}$$

Положим здесь $S = V_r(1+\delta)$ с некоторым $\delta > 0$. Благодаря неравенству (4.2) величина (4.3) оценивает сверху вероятность события (4.1) при должном выборе $\delta = \delta(\varepsilon)$. Величина (4.3) стремится к нулю при $r \to \infty$ при условии $\delta \ln(1/p) > (1+\delta)\ln C$. Для любых значений δ это условие выполняется, только если $p \to 0$. Таким образом, для случая малой пористости требуемая оценка по вероятности снизу получена.

Для конечных p соотношение (2.2) можно доказать, используя развитый ранее [9] метод перенормировки, сводящий задачу к случаю малых p. Полное изложение метода применительно к задаче об основном собственном значении оператора Лапласа содержится в [9]. Изменения, которые необходимо внести, чтобы приспособить его к вычислению КН, не носят принципиального характера.

Поэтому приведем лишь схему рассуждений, опуская детали.

Можно проверить, что главный член асимптотики при $r \to 0$ выражения (2.2) не меняется, если в нем произвести преобразование $a \to \lambda a$, $p \to p^{\lambda^d}$, где $\lambda > 0$ и $\ln\lambda \ll \ln(r/a)$. Основная идея перенормировки заключается в замене области $\Omega^{(r)}$ случайной структурой того же типа, но состоящей из клеток большего размера и имеющей меньшую пористость. При этом новая структура должна обладать асимптотически таким же КН.

Перенормировка состоит во введении промежуточного масштаба r_1, $a \ll r_1 \ll r$ и разбиении исходного квадрата на квадратные блоки размером $r_1 \times r_1$. Для фиксированной конфигурации $\Omega^{(r)}$ оставленных и выброшенных клеток каждый блок независимо от остальных можно отнести к классу "пустых", "полных" или "промежуточных" блоков. К пустым относятся блоки, в которых не оказалось ни одной выброшенной клетки. Вероятность p_1 такого события вычисляется по формуле $\ln(1/p_1) = (r_1/a)^d \ln(1/p)$ и стремится к нулю. Полные блоки – это те, в которых мала доля оставленных клеток. Полные блоки можно исключить из структуры без существенного изменения КН. Строгий вывод этого утверждения из вариационного принципа (2.1) опирается на неравенство типа Пуанкаре, а физическое объяснение состоит в том, что у таких блоков жидкость располагается в относительно узких порах и для ее движения требуются напоры, существенно большие критического.

Если бы отсутствовали блоки промежуточного класса, то после исключения полных блоков перенормированная структура была бы того же типа, что и исходная, но обладала бы пористостью p_1 вместо p и размером клетки $r_1 \times r_1$ вместо $a \times a$. К ней применимы уже доказанные для малой пористости результаты и, если $\ln r_1 \ll \ln r$, формула (2.2) была бы доказана.

Для исключения блоков промежуточного класса вводится иерархия масштабов $a \ll r_1 \ll \ldots \leqslant r_m \ll r$, где $m \gg 1$. Смысл этой конструкции состоит в следующем. На первом этапе перенормировки промежуточные блоки не удается исключить, потому что они "удерживают" жидкость не намного лучше, чем пустые блоки того же размера. Однако их удерживающая способность все-таки намного выше, чем у пустых блоков следующего уровня иерархии. Поэтому блоки размером $r_2 \times r_2$, состоящие из непустых блоков предыдущего масштаба, относятся к классу "полных" и исключаются из структуры. В результате на высоких уровнях $m \gg 1$ остается случайная область малой пористости, для которой КН несущественно больше исходного и имеет асимптотику (2.2).

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (ND 6300) и Международной ассоциации содействия сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 93-2716).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Allaire G.* Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium // Asymptotic Anal. 1989. V. 2. No. 3. P. 203–222.
2. *Ene H.I., Poliševski D.* Thermal Flow in Porous Media. Dordrecht etc.: Reidel, 1987. 194 p.
3. Жиков В.В. Об усреднении уравнений Стокса в перфорированной области // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 2. С. 144–147.
4. *Беляев А.Ю., Козлов С.М.* Усреднение уравнений Стокса в случайной перфорированной области // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48. № 4. С. 211–212.
5. *Beliaev A.Yu., Kozlov S.M.* Daroy equation for random porous media // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 49. No. 1. P. 1–34.
6. *Bourgeat A., Mikelic A.* A note on homogenization of Bingham flow through a porous medium // J. Math. Pures et Appliques. 1993. V. 72. No. 4. P. 405–414.
7. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
8. *Моcолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений вязко-пластической среды // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 468–492.
9. *Beliaev A.Yu., Yurinsky V.V.* Bottom of Laplacian's spectrum in a Poisson cloud // Siberian Advances in Mathematics. 1995. V. 5. No. 4. P. 113–150.
10. *Sznitman A.-S.* Lifschitz tail, Wiener sausage. I, II // J. Func. Analysis. 1990. V. 94. No. 2. P. 223–246, 247–272.
11. *Chavel I.* Eigenvalues in Riemannian Geometry. Orlando: Acad. Press, 1984. 362 p.
12. *Кестен Х.* Теория просачивания для математиков. М.: Мир, 1986. 392 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.XI.1995