ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 61. Вып. 5, 1997

УДК 539.375

© 1997 г. А.М. Хлуднев

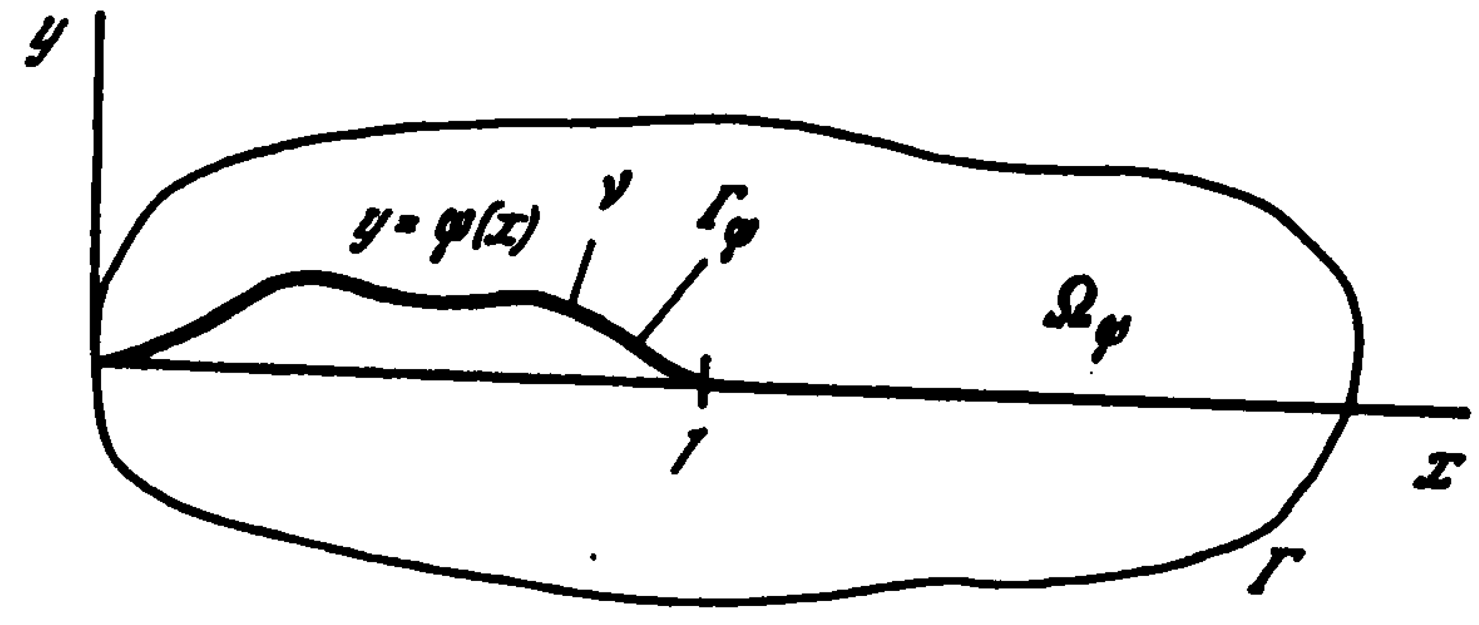
О КОНТАКТЕ ДВУХ ПЛАСТИН, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ ТРЕЩИНУ

Рассматривается задача о контакте двух пластин, одна из которых содержит вертикальную трещину, выходящую на внешнюю границу. Предполагается, что в естественном состоянии пластины находятся на заданном расстоянии одна от другой. Перемещения точек пластин удовлетворяют двум ограничениям типа неравенств. Одно из них описывает условие непроникания между пластинами и задано во внутренних точках области, а другое описывает взаимное непроникание берегов трещины и задано на границе области. Наличие трещины приводит к тому, что во-первых, решение задачи ищется в области с негладкой границей, а во-вторых, на границе области задаются краевые условия в виде неравенств. Доказана разрешимость задачи равновесия. Установлена дополнительная гладкость решения вплоть до внутренних точек трещины. Показана разрешимость задачи управления внешними нагрузками с целевым функционалом, характеризующим раскрытие трещины. Для трещин нулевого раскрытия установлена принадлежность решения классу C^∞ вблизи границы при гладких внешних данных. Анализируется сходимость решений задач оптимального управления при стремлении толщины пластин к нулю.

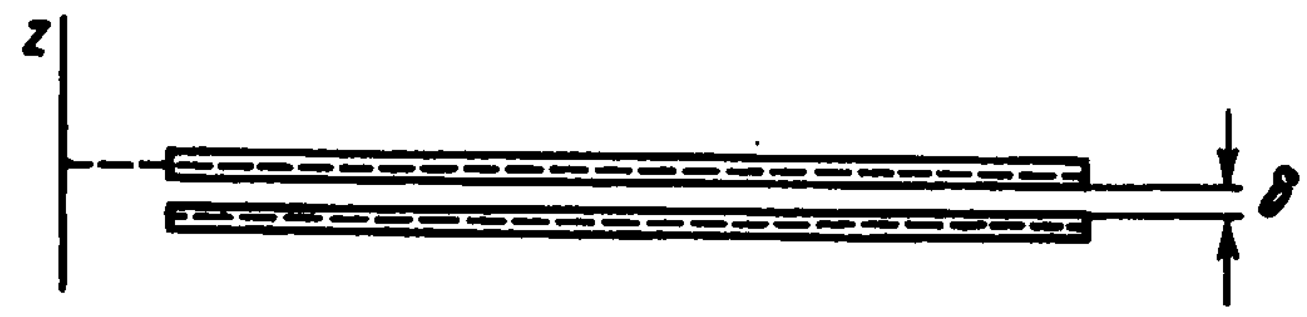
1. Постановка задачи. Существование решения. Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с бесконечно дифференцируемой границей Γ, Γ_ψ – график функции $y = \psi(x)$, $x \in [0, 1]$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$, $\psi \in H_0^3(0,1)$. Считаем, что Γ_ψ и Γ имеют одну общую точку – начало координат (0, 0), причем угол между Γ и Γ_ψ в точке (0, 0) положителен (фиг. 1). При этом $\Omega_\psi \equiv \Omega \backslash \Gamma_\psi$ соответствует срединной поверхности пластины, а Γ_ψ – след трещины на плоскости x, y. Трещина, как поверхность в R^3, описывается соотношениями $y = \psi(x)$, $-\varepsilon \leqslant z \leqslant \varepsilon$, 2ε – толщина пластины. Срединная поверхность пластины лежит в плоскости $z = 0$, ось z направлена ортогонально плоскости x, y. Вторая пластина (не имеющая трещин) может находиться в контакте с первой (содержащей трещину) и также имеет толщину 2ε.

Считаем, что в естественном состоянии пластины расположены на заданном расстоянии $\delta \geqslant 0$ одна от другой (δ = const) и могут контактировать друг с другом ввиду наличия внешних нагрузок (фиг. 2). Срединная поверхность второй пластины занимает область Ω. Направление оси z выбираем так, что срединная поверхность второй пластины имеет отрицательную координату z. В этой связи первую пластину будем называть верхней, а вторую – нижней.

Обозначим через $\chi = (W, w)$, $\xi = (U, u)$ векторы перемещений точек срединных поверхностей верхней и нижней пластин соответственно, где $W = (w^1, w^2)$, w – горизонтальные и вертикальные перемещения верхней пластины, а $U = (u^1, u^2)$, u – горизонтальные и вертикальные перемещения нижней пластины. Пусть $\varepsilon_{ij}(W)$ – компоненты тензора деформаций срединной плоскости верхней пластины, а $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W)$ –



Фиг. 1



Фиг. 2

компоненты тензоров напряжений в безразмерной форме, причем

$$\sigma_{11}=\varepsilon_{11}+k\varepsilon_{22},\quad \sigma_{22}=\varepsilon_{22}+k\varepsilon_{11},\quad \sigma_{12}=(1-k)\varepsilon_{12},\quad k=\text{const},\quad 0<k<\frac{1}{2} \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{ij}(W)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^i}{\partial x_j}+\frac{\partial w^j}{\partial x_i}\right),\quad i,j=1,2,\quad x_1=x,\quad x_2=y$$

Функционал энергии верхней пластины можно записать в виде

$$\Pi_f(\chi)=\frac{1}{2}B_\psi(w,w)+\frac{1}{2}\left\langle\sigma_{ij}(W),\ \varepsilon_{ij}(W)\right\rangle_\psi-\langle f,\chi\rangle_\psi,\quad f=(f_1,f_2,f_3)\in L^2(\Omega_\psi)$$

$$B_\psi(w,\bar{w})=\int\limits_{\Omega_\psi}(w_{xx}\bar{w}_{xx}+w_{yy}\bar{w}_{yy}+kw_{xx}\bar{w}_{yy}+kw_{yy}\bar{w}_{xx}+2(1-k)w_{xy}\bar{w}_{xy})d\Omega_\psi$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi$ означают интегрирование по Ω_ψ, f – вектор внешних нагрузок, а B_ψ – билинейная форма, характеризующая изгибные свойства пластины. Аналогично для нижней пластины функционал энергии имеет вид

$$\Pi_g(\xi)=\frac{1}{2}B(u,u)+\frac{1}{2}\left\langle\sigma_{ij}(U),\ \varepsilon_{ij}(U)\right\rangle-\langle g,\xi\rangle,\quad g=(g_1,g_2,g_3)\in L^2(\Omega)$$

$$B(u,\bar{u})=\int\limits_{\Omega}\Delta u\Delta\bar{u}\,d\Omega$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означают интегрирование по Ω.

Функционал совместной энергии двух пластин, таким образом, можно представить в виде $\Pi_f(\chi)+\Pi_g(\xi)$.

Как уже было отмечено, верхняя пластина имеет вертикальную трещину, форма которой задана. Условие взаимного непроникания берегов трещины имеет вид [1]

$$[W]\nu\geqslant\varepsilon|[\partial w/\partial\nu]|\ \text{ на }\ \Gamma_\psi,\quad \nu=(\nu_1,\nu_2)=(-\psi_x,1)/\sqrt{1+\psi_x^2} \tag{1.2}$$

где ν – нормаль к графику Γ_ψ, $[V]=V^+-V^-$ – скачок функции V на берегах трещины, индексы плюс и минус соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали ν соответственно.

Пластины могут взаимодействовать друг с другом, однако векторы перемещений должны быть такими, чтобы исключить взаимное проникание точек пластин. Соответствующее условие непроникания можно записать в виде [2]

$$w\geqslant u-\delta\ \text{в}\ \Omega_\psi \tag{1.3}$$

Считаем, что все основные физические параметры нижней пластины совпадают с параметрами верхней. В частности, связь тензоров напряжений и деформаций для нижней пластины такая же, как и в (1.1).

На внешней границе Γ будем задавать следующие краевые условия:

$$w=\partial w/\partial n=W=0,\quad u=\partial u/\partial n=U=0\ \text{ на }\ \Gamma \tag{1.4}$$

(n – внешняя нормаль к Γ).

Сформулируем теперь вариационную постановку задачи о равновесии двух пластин.

Пусть $H^{1,0}(\Omega_\psi)$ – пространство Соболева функций, имеющих производные до первого порядка включительно в Ω_ψ, суммируемых с квадратом и равных нулю на Γ, $H^{1,0}(\Omega_\psi) \subset H^1(\Omega_\psi)$. Аналогично элементы из $H^{2,0}(\Omega_\psi)$ обращаются в нуль вместе с первыми производными на Γ и имеют суммируемые с квадратом производные до второго порядка включительно, $H^{2,0}(\Omega_\psi) \subset H^2(\Omega_\psi)$. Через $H_0^2(\Omega)$ обозначим замыкание в норме $H^2(\Omega)$ множества всех гладких финитных в Ω функций. Пусть также $H(\Omega_\psi) = H^{1,0}(\Omega_\psi)\times H^{1,0}(\Omega_\psi)\times H^{2,0}(\Omega_\psi)$, $H_0(\Omega) = H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times H_0^2(\Omega)$. В ряде мест для краткости будем пользоваться обозначением $H = H(\Omega_\psi)\times H_0(\Omega)$.

Введем далее обозначение для множества допустимых перемещений пластин

$K_\varepsilon = \{(\chi, \xi) \in H(\Omega_\psi)\times H_0(\Omega) \mid (\chi, \xi)$ удовлетворяют условиям (1.2), (1.3)$\}$

Решение формулируемой ниже задачи равновесия двух пластин будет элементом множества K_ε. В частности, гладкость решения будет определяться его принадлежностью пространству H. Задача о равновесии может быть сформулирована как задача минимизации функционала совместной энергии на множестве допустимых перемещений, а именно,

$$\inf_{(\chi,\xi)\in K_\varepsilon} \{\Pi_f(\chi)+\Pi_g(\xi)\}$$

В силу выпуклости и дифференцируемости функционала $\Pi_f(\chi) + \Pi_g(\xi)$ на пространстве H эта задача эквивалентна вариационному неравенству

$$\Pi'_f(\chi)(\bar\chi-\chi)+\Pi'_g(\xi)(\bar\xi-\xi)\geqslant 0, \quad (\chi,\xi)\in K_\varepsilon, \quad \forall(\bar\chi,\bar\xi)\in K_\varepsilon \tag{1.5}$$

где $\Pi'_f(\chi)$, $\Pi'_g(\xi)$ – производные функционалов Π_f, Π_g соответственно в точках χ, ξ. Прежде всего отметим справедливость следующих неравенств с постоянными, не зависящими от функций w, u, W, U:

$$B_\psi(w,w)\geqslant c\|w\|^2_{2,\Omega_\psi}, \quad \forall w\in H^{2,0}(\Omega_\psi), \quad B(u,u)\geqslant c\|u\|^2_{2,\Omega}, \quad \forall u\in H_0^2(\Omega) \tag{1.6}$$

$$\left\langle\sigma_{ij}(W),\ \varepsilon_{ij}(W)\right\rangle_\psi \geqslant c\|W\|^2_{1,\Omega_\psi}, \quad \forall W=(w^1,w^2)\in H^{1,0}(\Omega_\psi) \tag{1.7}$$

где $\|\cdot\|_{s,\Omega_\psi}$ – норма в $H^{s,0}(\Omega_\psi)$. Кроме того,

$$\left\langle\sigma_{ij}(U),\ \varepsilon_{ij}(U)\right\rangle\geqslant c\|U\|^2_{1,\Omega}, \quad \forall U=(u^1,u^2)\in H_0^1(\Omega) \tag{1.8}$$

Неравенства (1.6) получаются после двукратного применения неравенства Пуанкаре, а (1.7), (1.8) – неравенства Корна для областей Ω_ψ и Ω соответственно. Введем далее обозначение для билинейной формы

$$a(\eta,\bar\eta)=B_\psi(w,\bar w)+B(u,\bar u)+\left\langle\sigma_{ij}(W),\ \varepsilon_{ij}(\bar W)\right\rangle_\psi+\left\langle\sigma_{ij}(U),\ \varepsilon_{ij}(\bar U)\right\rangle \tag{1.9}$$

где $\eta = (\chi, \xi)$, $\chi = (W, w)$, $\xi = (U, u)$, и аналогично для $\bar\eta = (\bar\chi, \bar\xi)$. В силу неравенств (1.6)–(1.8) справедлива оценка

$$a(\eta,\eta)\geqslant c\|\eta\|^2_H, \quad \forall\eta\in H \tag{1.10}$$

В терминах функции $\eta = (\chi, \xi)$ неравенство (1.5) можно записать в виде

$$a(\eta,\bar\eta-\eta)\geqslant\langle f,\bar\chi-\chi\rangle_\psi+\left\langle g,\bar\xi-\xi\right\rangle, \quad \forall\bar\eta=(\bar\chi,\bar\xi)\in K_\varepsilon \tag{1.11}$$

Согласно неравенству (1.10), функционал $\Pi_f(\chi) + \Pi_g(\xi)$ является коэрцитивным на H, а поскольку он еще и слабо полунепрерывен снизу, то задача (1.5) (или задача

(1.11)) имеет решение. Решение будет единственным. Отметим также, что в областях Ω_ψ и Ω выполнены в смысле распределений уравнения

$$-\sigma_{ij,j}(W)=f_i, \quad -\sigma_{ij,j}(U)=g_i, \quad i=1,2 \tag{1.12}$$

Для проверки справедливости первых уравнений достаточно в качестве пробных функций в (1.5) взять $(\bar{\chi},\bar{\xi})=(\chi+\tilde{\chi},\xi)$, где $\tilde{\chi}=(\tilde{W},0)$, $\tilde{W}\in(C_0^\infty(\Omega_\psi))^2$, а (χ,ξ) – решение задачи (1.5). Для проверки вторых уравнений достаточно в качестве пробных функций в (1.5) выбрать $(\bar{\chi},\bar{\xi})=(\chi,\xi+\tilde{\xi})$, где $\tilde{\xi}=(\tilde{U},0)$, $\tilde{U}\in(C_0^\infty(\Omega))^2$.

Опишем кратко содержание работы. В разд. 2 будет установлена дополнительная регулярность решения вплоть до внутренних точек Γ_ψ. Грубо говоря, гладкость решения можно поднять на единицу по сравнению с вариационной гладкостью, которая определяется включением $(\chi,\xi)\in K_\varepsilon$. Этот результат будет установлен с использованием конечных разностей. Разд. 3 посвящен анализу задачи оптимального управления с функционалом качества, характеризующим раскрытие трещины. Основной результат этого раздела – обоснование бесконечной дифференцируемости решения в случае, когда раскрытие трещины нулевое. Наконец, в разд. 4 исследуется предельный переход при $\varepsilon\to 0$, соответствующий переходу от точного условия непроникания (1.2) к приближенному условию, характеризующемуся значением $\varepsilon=0$ в (1.2). Отметим здесь, что фактически точная постановка задачи о равновесии пластин должна включать параметр ε не только в виде (1.2). В действительности, от ε зависят и другие величины, например уравнения равновесия (1.12) должны содержать ε в качестве множителя перед $\sigma_{ij,j}(W)$, $\sigma_{ij,j}(U)$, билинейные формы B_ψ, B должны содержать множитель ε^3 и т. д. Поэтому указанный предельный переход не означает, что осуществляется переход к пределу по толщине в задаче о равновесии двух пластин. Он означает переход от точного условия непроникновения (1.2) к приближенному, соответствующему $\varepsilon=0$. В частности, из сказанного следует, что в контексте данной работы толщина нижней пластины фактически фиксированна и ее равенство величине 2ε не является принципиальным.

Регулярность решений краевых задач для уравнений теории упругости с негладкими областями (в том числе и бигармонического уравнения) исследовалась ранее [1, 3–9]. Гладкость решений для эллиптических уравнений изучалась и в случае, когда на поверхности меньшего числа измерений задаются ограничения на решение типа неравенств [10, 11]. Задача, анализируемая в данной статье, содержит как негладкую границу, так и ограничения типа неравенств на границе. Фактически имеющиеся ограничения на Γ_ψ следует рассматривать как часть граничных условий. Отыскание полного набора граничных условий на Γ_ψ в этом случае представляет собой самостоятельную задачу. Неравенство (1.2) при этом является одним из краевых условий, задаваемых на границе. С другими вопросами, относящимися к изменению формы трещин (и следовательно, изменению формы области, в которой ищется решение), можно ознакомиться по работам [12–15].

2. Регулярность решения. Цель этого раздела состоит в исследовании гладкости решения вплоть до внутренних точек Γ_ψ.

Пусть по-прежнему (χ,ξ) – решение задачи (1.5). Шар радиуса λ с центром в точке x^0 будем обозначать $R_\lambda(x^0)$. Дополнительная гладкость решения вблизи выбранной точки, принадлежащей $\Gamma_\psi\setminus\partial\Gamma_\psi$, будет доказана при дополнительном предположении, что Γ_ψ – прямолинейный отрезок вблизи данной точки. Имеет место такое утверждение.

Теорема 1. Пусть $x^0\in\Gamma_\psi\setminus\partial\Gamma_\psi$ и $D(x^0)$ – окрестность точки x^0, такая, что $\Gamma_\psi\cap D(x^0)$ – прямолинейный отрезок, параллельный оси x. Тогда существует $\lambda>0$, такое, что

$$W,w_x\in H^2(R_\lambda(x^0)\cap\Omega_\psi),\quad U,u_x\in H^2(R_\lambda(x^0))$$

Доказательство. Выберем гладкую функцию φ так, что $\varphi \equiv 1$ в $R_\lambda(x^0)$, $\varphi \equiv 0$ вне $R_{\frac{3\lambda}{2}}(x^0)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ всюду, $\partial\varphi/\partial y = 0$ на Γ_ψ. Считаем $R_{2\lambda}(x^0) \subset D(x^0)$. Обозначим

$$d_{\pm\tau}p(\bar{x}) = \tau^{-1}(p(\bar{x} \pm \tau e) - p(\bar{x})), \quad \Delta_\tau = -d_{-\tau}d_\tau, \quad 0 < |\tau| < \lambda/2$$

где e – единичный орт оси x. Введем вектор (χ_τ, ξ_τ), где

$$\chi_\tau = \chi + \frac{\tau^2}{2}\varphi^2\Delta_\tau\chi, \quad \xi_\tau = \xi + \frac{\tau^2}{2}\varphi^2\Delta_\tau\xi$$

и покажем, что $(\chi_\tau, \xi_\tau) \in K_\varepsilon$. Для этого проверим справедливость (1.2), (1.3). Для функции $v = w - u$, очевидно, справедливо неравенство $v(\bar{x}) \geqslant -\delta$ для всех $\bar{x} \in \Omega_\psi$. Поэтому получаем

$$v_\tau(\bar{x}) = (w_\tau - u_\tau)(\bar{x}) = v(\bar{x}) + \frac{\tau^2}{2}\varphi^2(\bar{x})\Delta_\tau v(\bar{x}) = v(\bar{x})(1 - \varphi^2(\bar{x})) +$$

$$+\frac{\varphi^2(\bar{x})}{2}[v(\bar{x} - \tau e) + v(\bar{x} + \tau e)] \geqslant -\delta$$

Это означает, что имеет место неравенство вида (1.3):

$$w_\tau \geqslant u_\tau - \delta \quad \text{в} \quad \Omega_\psi \tag{2.1}$$

Аналогично изложенному ранее [9] можно показать, что для $\chi_\tau = (W_\tau, w_\tau)$ справедливо соотношение

$$[W_\tau]_v \geqslant \varepsilon\left\|\left[\frac{\partial w_\tau}{\partial v}\right]\right\| \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi \cap D(x^0) \tag{2.2}$$

Следовательно, учитывая финитность функции φ, заключаем, что неравенство (2.2) выполнено и на Γ_ψ. Неравенства (2.1), (2.2) показывают, что для вектора (χ_τ, ξ_τ) справедливы условия (1.2), (1.3), и поэтому $(\chi_\tau, \xi_\tau) \in K_\varepsilon$. Сказанное означает, что можно подставить вектор (χ_τ, ξ_τ) в (1.11) в качестве пробного. Это приведет к неравенству

$$a(\eta, \varphi^2\Delta_\tau\eta) \geqslant \langle f, \varphi^2\Delta_\tau\chi\rangle_\psi + \langle g, \varphi^2\Delta_\tau\xi\rangle \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что разность между членами $a(\eta, \varphi^2\Delta_\tau\eta)$ и $-a(d_\tau(\varphi\eta), d_\tau(\varphi\eta))$ может быть оценена сверху через правую часть выписанного ниже неравенства (2.4), так что из (2.3) следует

$$a(d_\tau(\varphi\eta), d_\tau(\varphi\eta)) \leqslant c\{\|\eta\|_H^2 + \|d_\tau(\varphi\eta)\|_H(\|\eta\|_H + \|f\|_{0,\Omega_\psi} + \|g\|_{0,\Omega})\} \tag{2.4}$$

с постоянной c, не зависящей от τ. Принимая во внимание оценку (1.10), из (2.4) заключаем

$$\|d_\tau(\varphi\chi)\|_{H(\Omega_\psi)} + \|d_\tau(\varphi\xi)\|_{H_0(\Omega)} \leqslant c \tag{2.5}$$

где постоянная c не зависит от τ. Из (2.5) следует

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\chi) \in H(\Omega_\psi), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\xi) \in H_0(\Omega)$$

и поэтому имеют место следующие включения:

$$\begin{gathered} W_x \in H^1(R_\lambda(x^0) \cap \Omega_\psi), \quad U_x \in H^1(R_\lambda(x^0)) \\ w_x \in H^2(R_\lambda(x^0) \cap \Omega_\psi), \quad u_x \in H^2(R_\lambda(x^0)) \end{gathered} \tag{2.6}$$

В области Ω_ψ уравнения (1.12) для W можно записать в виде

$$W_{yy} = F$$

В силу (2.6) справедливо включение $F \in L^2(R_\lambda(x^0) \cap \Omega_\psi)$, так что $W_{yy} \in L^2(R_\lambda(x^0) \cap \Omega_\psi)$. Кроме того, согласно уравнениям (1.12) для U в окрестности точки x^0 справедливы уравнения $U_{yy} = G$, где ввиду (2.6) $G \in L^2(R_\lambda(x^0))$. Теорема 1 доказана.

Следующая ниже теорема дает дополнительную гладкость по сравнению с теоремой 1 для случая, когда отсутствует контакт между пластинами в окрестности фиксированной точки трещины.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы и кроме того

$$w^{\pm}(x^0) > u(x^0) - \delta \tag{2.7}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &W \in H^2(R_\lambda(x^0) \cap \Omega_\psi), \quad U \in H^2(R_\lambda(x^0)) \\ &w \in H^3(R_\lambda(x^0) \cap \Omega_\psi), \quad u \in H^3(R_\lambda(x^0)) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Доказательство. Из (2.7) и (1.5) заключаем, что существует окрестность $D(x^0)$ точки x^0, такая, что в $D(x^0) \cap \Omega_\psi$ выполнено в смысле распределений уравнение

$$\Delta^2 w = f_3 \tag{2.9}$$

Воспользуемся следующим фактом, докательство которого можно найти в [16]. Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей и v – распределение на D, обладающее свойством $v, \nabla v \in H^{-1}(D)$. Тогда $v \in L^2(D)$, причем существует постоянная c, зависящая от D, такая, что

$$\|v\|_{L^2(D)} \le c\{\|v\|_{H^{-1}(D)} + \|\nabla v\|_{H^{-1}(D)}\}$$

Из (2.6) следует $\partial(\varphi w)/\partial x \in H^{2,0}(\Omega_\psi)$. Поэтому в окрестности точки x^0 производные $w_{xxx}, w_{yyx}, w_{xxy}$ принадлежат L^2. Уравнение (2.9) в $D(x^0) \cap \Omega_\psi$ можно записать в виде

$$w_{yyyy} = h$$

Согласно доказанному, функции h, w_{yyy}, w_{yyyx} принадлежат $H^{-1}(\Omega_\psi \cap D)$, где D – некоторая окрестность точки x^0. Следовательно, функции w_{yyy} принадлежат $L^2(\Omega_\psi \cap D_1)$ и имеет место оценка

$$\|w_{yyy}\|^2_{L^2(\Omega_\psi \cap D_1)} \le c\{\|w_{yyy}\|^2_{H^{-1}(\Omega_\psi \cap D_1)} + \|w_{yyyy}\|^2_{H^{-1}(\Omega_\psi \cap D_1)} + \|w_{yyyx}\|^2_{H^{-1}(\Omega_\psi \cap D_1)}\}$$

где D_1 – окрестность точки x^0, $\overline{D_1} \subset D$. Таким образом, получаем необходимое включение (2.8) для w. Кроме того, в $D(x^0)$ выполнено в смысле распределений уравнение

$$\Delta^2 u = g_3 \tag{2.10}$$

так что, рассуждая аналогично, получаем включение (2.8) и для функции u. Теорема 2 доказана.

3. Задача оптимального управления. Трещины минимального раскрытия. В этом разделе будет исследоваться задача управления внешними нагрузками (f, g) с функционалом качества

$$J_\varepsilon(f,g) = \int_{\Gamma_\psi} |[\chi]| d\Gamma_\psi$$

характеризующим раскрытие трещины (см. [17]). Как и ранее, (χ, ξ) – решение краевой задачи (1.5), соответствующее правой части (f, g). На первом этапе будет доказана теорема существования решения задачи оптимального управления. Далее будет показано, что решения, соответствующие трещинам нулевого раскрытия, являются бесконечно дифференцируемыми при бесконечно дифференцируемых f, g. Несмотря на то, что в этом разделе параметр ε будет фиксирован, зависимость функционала качества от ε отмечается. Это обстоятельство связано с тем, что далее, в разд. 4, будет исследоваться предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $F \times G \subset L^2(\Omega_\psi) \times L^2(\Omega)$ – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, $(f, g) \in F \times G$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Существует решение задачи минимизации

$$\inf_{F\times G} J_\varepsilon(f,g) \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $(f_n, g_n) \in F \times G$ – минимизирующая последовательность. Для каждого n можно найти единственное решение задачи

$$\Pi'_{f_n}(\chi_n)(\bar\chi-\chi_n)+\Pi'_{g_n}(\xi_n)(\bar\xi-\xi_n)\geqslant 0, \quad \forall(\bar\chi,\bar\xi)\in K_\varepsilon \tag{3.2}$$

В силу ограниченности f_n, g_n в $L^2(\Omega)$ из (3.2) следует оценка

$$\|\chi_n\|_{H(\Omega_\psi)}+\|\xi_n\|_{H_0(\Omega)}\leqslant c \tag{3.3}$$

равномерная по n. Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно полагать, что при $n \to \infty$

$(\chi_n, \xi_n) \to (\chi, \xi)$ слабо в H, сильно в $L^2(\Omega)$; $[\chi_n] \to [\chi]$ сильно в $L^1(\Gamma_\psi)$

Эта сходимость позволяет осуществить переход к пределу при $n \to \infty$ в (3.2) и получить

$$\Pi'_f(\chi)(\bar\chi-\chi)+\Pi'_g(\xi)(\bar\xi-\xi)\geqslant 0, \quad (\chi,\xi)\in K_\varepsilon, \quad \forall(\bar\chi,\bar\xi)\in K_\varepsilon$$

что означает $\chi = \chi(f, g)$, $\xi = \xi(f, g)$. Таким образом,

$$\inf_{F\times G} J_\varepsilon(\bar f,\bar g)=\lim_{n\to\infty}\inf J_\varepsilon(f_n,g_n)\geqslant J_\varepsilon(f,g)\geqslant \inf_{F\times G} J_\varepsilon(\bar f,\bar g)$$

и, следовательно, найденная пара (f, g) действительно решает задачу оптимального управления (3.1). Теорема 3 доказана.

Оказывается, что если раскрытие трещины нулевое в окрестности некоторой точки $x^0 \in \Gamma_\psi$, для которой $w^\pm(x^0) > u(x^0) - \delta$, и правые части f, g бесконечно дифференцируемы в окрестности этой точки, то решение задачи (1.5) также бесконечно дифференцируемо вблизи точки x^0. Обоснованию этого утверждения и посвящены дальнейшие рассуждения. Сформулированный результат о гладкости решения будет доказан для случая, когда x^0 – точка пересечения Γ и Γ_ψ, т.е. $x^0 \in \Gamma \cap \Gamma_\psi$. Случай $x^0 \notin \Gamma \cap \Gamma_\psi$ исследуется более просто. Он отмечен в замечании после доказательства теоремы 4.

Во-первых, отметим, что аналогично изложенному ранее [9] можно найти вид краевых условий в окрестности произвольной точки $\bar x \in \Gamma_\psi \backslash \partial\Gamma_\psi$, предполагая, что решение $\eta = (\chi, \xi)$ достаточно гладкое и справедливо неравенство $w^\pm(\bar x) > u(\bar x) - \delta$. Последнее неравенство означает отсутствие контакта между двумя пластинами в точке $\bar x$. Именно, наряду с (1.2) справедливы такие краевые условия (для простоты считаем $\varepsilon = 1$):

$$[\sigma_\nu(W)]=0, \quad \sigma_s(W)=0, \quad [m(w)]=0, \quad t(w)=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi \tag{3.4}$$

$$|m(w)|\leqslant -\sigma_\nu(W), \quad m(w)\left[\frac{\partial w}{\partial\nu}\right]+\sigma_\nu(W)[W]\nu=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi \tag{3.5}$$

Здесь $m(w)$, $t(w)$ – изгибающий момент и перерезывающая сила на Γ_ψ, определяемые по формулам

$$m(w)=k\Delta w+(1-k)\frac{\partial^2 w}{\partial\nu^2},\quad t(w)=\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta w+(1-k)\frac{\partial^3 w}{\partial\nu\partial^2 s},\quad s=(-\nu_2,\nu_1)$$

а $\sigma_\nu(W)$, $\sigma_s(W)$ – нормальная и касательная компоненты вектора сил на Γ_ψ:

$$\{\sigma_{ij}(W)\nu_j\}=\sigma_\nu(W)\nu+\sigma_s(W)s$$

Сформулированные краевые условия следует понимать формально в том смысле, что они справедливы в предположении о достаточной гладкости решения $\eta=(\chi,\xi)$ задачи (1.11). Важно, что (1.2), (3.4)–(3.5) дают полный набор краевых условий на Γ_ψ в следующем смысле. Если справедливы уравнения равновесия и условия (1.2), (1.4), (3.4)–(3.5), то можно вывести вариационное неравенство (1.11). Фактически ниже понадобится лишь часть краевых условий (3.4), (3.5).

Итак, сформулируем основное утверждение этого раздела, относящееся к трещинам нулевого раскрытия, т.е. трещинам, обладающим свойством $[\chi]=0$.

Теорема 4. Пусть $\delta>0$, $x^0\in\Gamma\cap\Gamma_\psi$. Предположим, что $[\chi]=0$ на $\Gamma_\psi\cap D(x^0)$ и f, $g\in C^\infty(D(x^0)\cap\bar\Omega)$, где $D(x^0)$ – некоторая окрестность точки x^0. Тогда существует окрестность $D_1(x^0)$ точки x^0, такая, что решение задачи (1.5) обладает свойством

$$\chi,\xi\in C^\infty(D_1(x^0)\cap\overline{\Omega})$$

Доказательство. Открытое множество $D(x^0)\cap\Omega_\psi$ можно представить в виде объединения $D(x^0)\cap\Omega_\psi=D^+\cup D^-$, где области $D^\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали ν, т.е. для $\bar x\in D^\pm$ справедливы соответственно неравенства $y>\psi(x)$, $y<\psi(x)$, $\bar x\equiv(x,y)$. В силу предположения о том, что угол между Γ и Γ_ψ в точке x^0 больше нуля, можно использовать теорему вложения, согласно которой функции w, u будут непрерывными в $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$ и $\overline{\Omega}_\psi=\Omega_\psi\cup\Gamma\cup\Gamma_\psi^\pm$ соответственно. Поэтому неравенство $\delta>0$ обеспечивает справедливость соотношения $w>u-\delta$ в некоторой окрестности $D(x^0)$ точки x^0. В частности, $w^\pm(\bar x)>u(\bar x)-\delta$, $\bar x\in$ $\in D(x^0)\cap\Gamma_\psi$. Значит, в D^+, D^- выполнено в смысле распределений уравнение

$$\Delta^2 w-f_3=0$$

Это уравнение выполнено и в $D(x^0)\cap\Omega$.

Действительно, $[\chi]=0$ на $\Gamma_\psi\cap D(x^0)$, так что из (1.2) получаем $[\partial w/\partial\nu]=0$ на $\Gamma_\psi\cap D(x^0)$. Это означает $w\in H^2(D(x^0)\cap\Omega)$ (см. [18]). Принимая во внимание краевые условия на $\Gamma_\psi\cap D(x^0)$ вида $t(w)=0$, $[m(w)]=0$, аналогично изложенному ранее [1] показываем, что

$$(\Delta^2 w-f_3,\varphi)=0,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(D(x^0)\cap\Omega)\tag{3.6}$$

что и доказывает сформулированное утверждение. Скобки $(\cdot,\varphi)$ в (3.6) означают действие распределения на элемент φ.

Аналогично условие $[\chi]=0$ на $\Gamma_\psi\cap D(x^0)$ обеспечивает включение $W\in H^1(D(x^0)\cap$ $\cap\Omega)$. Поэтому, учитывая краевые условия $\sigma_{ij}\nu_j=0$ на $\Gamma_\psi\cap D(x^0)$ ($i=1,2$), так же, как и в [1], можно показать, что

$$(\sigma_{ij,j}(W)+f_i\varphi)=0,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(D(x^0)\cap\Omega),\quad i=1,2$$

Неравенство $w^\pm(\bar x)>u(\bar x)-\delta$, $\bar x\in D(x^0)\cap\Gamma_\psi$, обеспечивает также справедливость уравнения (2.10) в $D(x^0)\cap\Omega$. Сказанное означает, что в $D(x^0)\cap\Omega$ выполнены уравнения

$$\Delta^2 w=f_3,\quad\Delta^2 u=g_3,\quad-\sigma_{ij,j}(W)=f_i,\quad-\sigma_{ij,j}(U)=g_i,\quad i=1,2$$

Поскольку здесь правые части f_i, g_i – бесконечно дифференцируемые в $D(x^0) \cap \overline{\Omega}$ функции, получаем утверждение теоремы (см. [19, 20]).

Замечание. Если $x^0 \in \Gamma_\psi$, $x^0 \notin \Gamma \cap \Gamma_\psi$ и $w^{\pm}(x^0) > u(x^0) - \delta$, то равенство $[\chi] = 0$ на $\Gamma_\psi \cap D(x^0)$ также обеспечивает бесконечную дифференцируемость решения χ, ξ в окрестности $D(x^0)$ при условии $f, g \in C^\infty(D(x^0))$. Говоря другими словами, в данном случае справедливо включение

$$\chi, \xi \in C^\infty(D(x^0))$$

Доказательство этого утверждения можно провести так же, как и теоремы 4, если заметить, что справедливо неравенство $w(\bar{x}) > u(\bar{x}) - \delta$ для всех $\bar{x} \in D_1(x^0) \cap \Omega_\psi$, $D_1(x^0)$ – окрестность точки x^0. Более того, $w^{\pm}(\bar{x}) > u(\bar{x}) - \delta$, $\bar{x} \in D_1(x^0) \cap \Gamma_\psi$.

4. Предельный переход при $\epsilon \to 0$. Рассмотрим случай приближенного описания условия непроникания берегов трещины, формально соответствующего $\varepsilon = 0$ в (1.2). Как и для случая $\varepsilon > 0$, при $\varepsilon = 0$ можно рассмотреть задачу о равновесии двух пластин и доказать существование решения задачи оптимального управления с функционалом качества, характеризующим раскрытие берегов трещины. Цель данного раздела – исследование сходимости решений задач оптимального управления вида (3.1) при $\varepsilon \to 0$. Будем полагать, что Γ_ψ – прямолинейный отрезок, параллельный оси x.

Итак, предельные условия непроникания, полученные из (1.2), (1.3), имеют вид

$$[W]\nu \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_\psi, \quad w \geqslant u - \delta \text{ в } \Omega_\psi \tag{4.1}$$

Введем множество допустимых перемещений пластин, соответствующее ограничениям (4.1):

$$K_0 = \{(\chi, \xi) \in H(\Omega_\psi) \times H_0(\Omega) | \, (\chi, \xi) \text{ удовлетворяют условиям } (4.1)\} \tag{4.2}$$

Пусть множество $F \times G$ выбрано так же, как и ранее. Для каждого фиксированного элемента $(f, g) \in F \times G$ можно найти единственное решение вариационного неравенства

$$\Pi'_f(\chi)(\bar{\chi} - \chi) + \Pi'_g(\xi)(\bar{\xi} - \xi) \geqslant 0, \quad (\chi, \xi) \in K_0, \quad \forall (\bar{\chi}, \bar{\xi}) \in K_0 \tag{4.3}$$

Снова рассмотрим функционал качества, описывающий раскрытие трещины

$$J_0(f, g) = \int_{\Gamma_\psi} |[\chi]| d\Gamma_\psi$$

В данном случае функция χ соответствует внешним нагрузкам (f, g) и определяется из (4.3).

Существует единственное решение задачи оптимального управления внешними нагрузками

$$\inf_{F \times G} J_0(f, g) \tag{4.4}$$

Доказательство этого факта проще, чем доказательство теоремы 3, поэтому останавливаться на нем не будем.

Пусть $(\chi_\varepsilon, \xi_\varepsilon, f_\varepsilon, g_\varepsilon)$ соответствует решению задачи оптимального управления (3.1) при данном ε, т.е. $(f_\varepsilon, g_\varepsilon)$ – решение задачи (3.1), а $(\chi_\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ определяется из неравенства (1.5) при $(f, g) = (f_\varepsilon, g_\varepsilon)$. Цель нижеследующих рассуждений – доказать утверждение, связывающее решения задач оптимального управления (3.1) и (4.4). Именно, имеет место следующий результат.

Теорема 5. Из последовательности $(\chi_\varepsilon, \xi_\varepsilon, f_\varepsilon, g_\varepsilon)$ можно выбрать подпоследовательность, обозначаемую прежним образом, такую, что

$$(\chi_\varepsilon, \xi_\varepsilon) \to (\chi, \xi) \text{ слабо в } H(\Omega_\psi) \times H_0(\Omega)$$

$f_\varepsilon, g_\varepsilon \to f, g$ слабо в $L^2(\Omega)$, $m_\varepsilon \to m_0$

$$m_\varepsilon = \inf_{F\times G} J_\varepsilon(f,g), \quad m_0 = \inf_{F\times G} J_0(f,g)$$

Здесь (χ, ξ, f, g) соответствует решению задачи оптимального управления (4.4).

Доказательство. Пусть $\chi_\varepsilon(f, g)$, $\xi_\varepsilon(f, g)$ – решение вариационного неравенства (1.5) при данных фиксированных f, g. Возьмем $(\bar\chi,\bar\xi)\in K_{\varepsilon_0}$. Тогда $(\bar\chi,\bar\xi)\in K_\varepsilon$ при всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Подставим $(\bar\chi,\bar\xi)$ в неравенство (1.5) в качестве пробной функции. Получим оценку

$$\|\chi_\varepsilon(f,g)\|_{H(\Omega_\psi)} + \|\xi_\varepsilon(f,g)\|_{H_0(\Omega)} \leqslant c \tag{4.5}$$

равномерную по $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно полагать, что при $\varepsilon \to 0$

$$\chi_\varepsilon(f,g) \to \tilde\chi \text{ слабо в } H(\Omega_\psi), \quad \xi_\varepsilon(f,g) \to \tilde\xi \text{ слабо в } H_0(\Omega) \tag{4.6}$$

$$\chi_\varepsilon^\pm(f,g) \to \tilde\chi^\pm \text{ сильно в } L^1(\Gamma_\psi) \tag{4.7}$$

$$\varepsilon\left\|\left[\frac{\partial w_\varepsilon(f,g)}{\partial \nu}\right]\right\| \to 0 \text{ сильно в } L^2(\Gamma_\psi) \tag{4.8}$$

Возьмем произвольный фиксированный элемент $(\bar\chi,\bar\xi)\in K_0$ и построим согласно доказанной ниже лемме последовательность $(\bar\chi_\varepsilon,\bar\xi_\varepsilon)\in K_\varepsilon$, сильно сходящуюся в $H(\Omega_\psi)\times H_0(\Omega)$ к $(\bar\chi,\bar\xi)$. Затем подставим элементы этой последовательности в качестве пробных функций в неравенство

$$\Pi'_f(\chi_\varepsilon)(\bar\chi-\chi_\varepsilon)+\Pi'_g(\xi_\varepsilon)(\bar\xi-\xi_\varepsilon)\geqslant 0, \quad (\chi_\varepsilon,\xi_\varepsilon)\in K_\varepsilon, \quad \forall(\bar\chi,\bar\xi)\in K_\varepsilon$$

На основе (4.6) здесь можно осуществить переход к пределу при $\varepsilon \to 0$. Условие (4.8) обеспечит справедливость включения $(\tilde\chi,\tilde\xi)\in K_0$. Предельное вариационное неравенство при этом будет иметь вид

$$\Pi'_f(\tilde\chi)(\bar\chi-\tilde\chi)+\Pi'_g(\tilde\xi)(\bar\xi-\tilde\xi)\geqslant 0, \quad (\tilde\chi,\tilde\xi)\in K_0, \quad \forall(\bar\chi,\bar\xi)\in K_0$$

что означает $\tilde\chi=\chi(f,g)$, $\tilde\xi=\xi(f,g)$. Следовательно, из (4.7) при этом получаем

$$J_\varepsilon(f, g) \to J_0(f, g), \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.9}$$

Пусть теперь (f, g) – решение задачи оптимального управления (4.4), (4.3). Согласно (4.9), получаем $m_\varepsilon \leqslant J_\varepsilon(f, g) \to J_0(f, g) = m_0$, и поэтому

$$\limsup m_\varepsilon \leqslant m_0 \tag{4.10}$$

С другой стороны, из ограниченности множества $F\times G$ в пространстве $L^2(\Omega_\psi)\times L^2(\Omega)$ имеем

$$\|(f_\varepsilon,g_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c \tag{4.11}$$

равномерно по ε. Следовательно, из вариационных неравенств

$$\Pi'_{f_\varepsilon}(\chi_\varepsilon)(\bar\chi-\chi_\varepsilon)+\Pi'_{g_\varepsilon}(\xi_\varepsilon)(\bar\xi-\xi_\varepsilon)\geqslant 0, \quad (\chi_\varepsilon,\xi_\varepsilon)\in K_\varepsilon, \quad \forall(\bar\chi,\bar\xi)\in K_\varepsilon \tag{4.12}$$

выводим равномерную по ε оценку

$$\|\chi_\varepsilon\|_{H(\Omega_\psi)} + \|\xi_\varepsilon\|_{H_0(\Omega)} \leqslant c \tag{4.13}$$

На основе (4.11), (4.13) можно полагать, что при $\varepsilon \to 0$

$$f_\varepsilon, g_\varepsilon \to f, g \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega) \tag{4.14}$$

$$(\chi_\varepsilon, \xi_\varepsilon) \to (\chi_0, \xi_0) \quad \text{слабо в} \ H, \quad \text{сильно в} \ L^2(\Omega) \tag{4.15}$$

$$\varepsilon\left|\left[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu}\right]\right| \to 0 \quad \text{сильно в} \ L^2(\Gamma_\psi) \tag{4.16}$$

$$\chi_\varepsilon^\pm(f, g) \to \tilde{\chi}_0^\pm \quad \text{сильно в} \ L^1(\Gamma_\psi) \tag{4.17}$$

Снова принимая во внимание лемму, осуществим на основе (4.14)–(4.17) переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (4.12). В итоге получим вариационное неравенство

$$\Pi'_{f_0}(\chi_0)(\overline{\chi} - \chi_0) + \Pi'_{g_0}(\xi_0)(\overline{\xi} - \xi_0) \geqslant 0, \quad (\chi_0, \xi_0) \in K_0, \quad \forall(\overline{\chi}, \overline{\xi}) \in K_0$$

что означает $\chi_0 = \chi(f_0, g_0)$, $\xi_0 = \xi(f_0, \xi_0)$.

Как и ранее, можно показать, что $J_\varepsilon(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \to J_0(f_0, g_0)$ при $\varepsilon \to 0$, и, следовательно,

$$\liminf m_\varepsilon \geqslant J_0(f_0, g_0) \tag{4.18}$$

Из (4.10), (4.18) получаем, что (f_0, g_0) – решение задачи оптимального управления (4.4), (4.3) и $m_\varepsilon \to m_0$. Теорема 5 доказана.

Обоснуем теперь вспомогательное утверждение, использованное при доказательстве теоремы 5. Напомним, что Γ_ψ считается при этом прямолинейным отрезком, параллельным оси x.

Лемма. Для любого фиксированного элемента $(\overline{\chi}, \overline{\xi}) \in K_0$ существует последовательность $(\overline{\chi}_\varepsilon, \overline{\xi}_\varepsilon) \in K_\varepsilon$, такая, что

$$(\overline{\chi}_\varepsilon, \overline{\xi}_\varepsilon) \to (\overline{\chi}, \overline{\xi}) \quad \text{сильно в} \quad H(\Omega_\psi) \times H_0(\Omega)$$

Доказательство. Продолжим график Γ_ψ вне $x = 1$ гладким образом так, чтобы продолжение пересекало границу Γ под ненулевым углом (фиг. 3). Область Ω_ψ при этом разбивается на две области Ω_1, Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$. Как и всюду ранее, границы Γ_ψ^+ и Γ_ψ^- считаются разными. Принадлежность функции $(\overline{\chi}, \overline{\xi})$ множеству K_0 означает справедливость неравенств

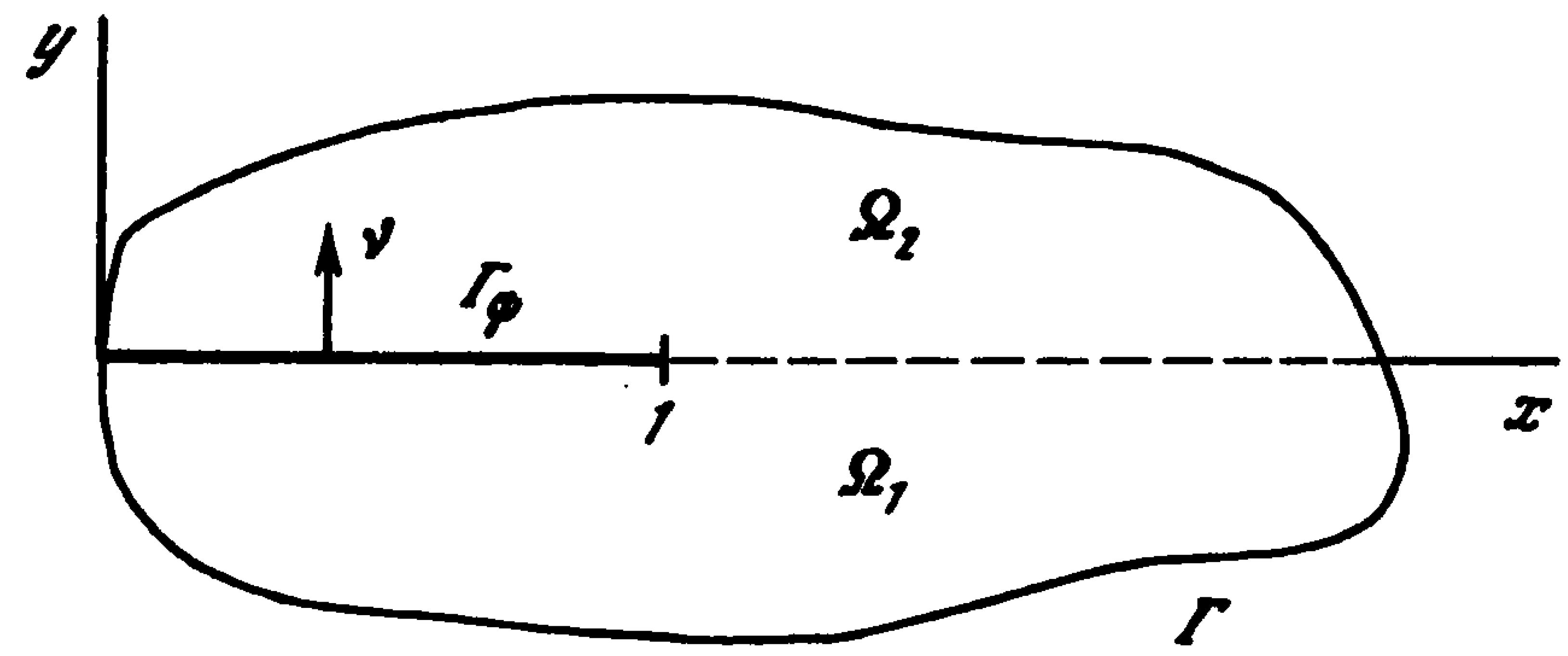
$$[\overline{W}]\nu \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi, \quad \overline{w} \geqslant \overline{u} - \delta \quad \text{в} \quad \Omega_\psi$$

а принадлежность функций $(\overline{\chi}_\varepsilon, \overline{\xi}_\varepsilon)$ множеству K_ε означает, что выполнены такие неравенства

$$[\overline{W}_\varepsilon]\nu \geqslant \varepsilon|[\partial\overline{w}_\varepsilon / \partial\nu]| \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi, \quad \overline{w}_\varepsilon \geqslant \overline{u}_\varepsilon - \delta \quad \text{в} \quad \Omega_\psi$$

Для доказательства леммы достаточно построить последовательность $(\overline{\chi}_\varepsilon, \overline{\xi}_\varepsilon)$ вида $(\overline{\chi}_\varepsilon, \overline{\xi})$, такую, что $(\overline{\chi}_\varepsilon, \overline{\xi}) \in K_\varepsilon$ и

$$\overline{\chi}_\varepsilon \to \overline{\chi} \quad \text{сильно в} \quad H(\Omega_\psi) \tag{4.19}$$



Фиг. 3

Заметим, что если построена функция $\tilde{W} \in [H^{1,0}(\Omega_\psi)]^2$, обладающая свойством

$$[\tilde{W}]\nu = |[\partial\overline{w}/\partial\nu]| \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi \tag{4.20}$$

а функции $\overline{\chi}_\varepsilon = (\overline{W}_\varepsilon, \overline{w}_\varepsilon)$ определены в области Ω_ψ по формуле $(\overline{W}_\varepsilon, \overline{w}_\varepsilon) = (\overline{W} + \varepsilon\tilde{W}, \overline{w})$, то последовательность $(\overline{\chi}_\varepsilon, \overline{\xi})$ будет искомой. Действительно, сходимость (4.19) очевидна и кроме того

$$[\overline{W}_\varepsilon]\nu \geqslant \varepsilon|[\partial\overline{w}_\varepsilon/\partial\nu]| \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi, \quad \overline{w}_\varepsilon \geqslant \overline{u} - \delta \quad \text{в} \quad \Omega_\psi$$

Для построения функции $\tilde{W}$, обладающей указанным свойством (4.20), заметим, что $\nu = (0, 1)$ на Γ_ψ. Так как $\overline{w} \in H^2(\Omega_\psi)$, то $\overline{w}_y\big|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$, и поэтому справедливы включения $\overline{w}_y\big|_{\partial\Omega_i} \in H^{1/2}(\partial\Omega_i)$, $i = 1, 2$ (см. [21]).

Рассмотрим на $\partial\Omega_1$ функцию

$$h_\gamma(\overline{x}) = \begin{cases} \min\{-[\overline{w}_y(\overline{x})], [\overline{w}_y(\overline{x})]\}, & \overline{x} \in \Gamma_\psi \\ 0, & \overline{x} \notin \Gamma_\psi \end{cases}$$

Тогда $h_\gamma \in H^{1/2}(\partial\Omega_1)$. Пусть $h \in H^1(\Omega_1)$ – продолжение функции h_γ в область Ω_1. Заметим, что если продолжить h нулем в Ω_2, то получим функцию в Ω_ψ, принадлежащую $H^1(\Omega_\psi)$. Это продолжение будем обозначать по-прежнему через h. Теперь можно определить вектор-функцию $\tilde{W}$ следующим образом: $\tilde{W} = (0, h)$ в Ω_ψ. В этом случае

$$[\tilde{W}]\nu = \max\{-[\overline{w}_y], [\overline{w}_y]\} = |[\overline{w}_y]| \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi$$

причем $|[\overline{w}_y]| = |[\partial\overline{w}/\partial\nu]|$ на Γ_ψ.

Итак, построена функция $\tilde{W} \in [H^{1,0}(\Omega_\psi)]^2$, обладающая нужным свойством (4.20), что и завершает доказательство леммы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00896).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хлуднев А.М.* Контактная задача для пологой оболочки с трещиной // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 318–326.
2. *Khludnev A.M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser, 1997. 366 p.
3. *Мазья В.Г.* О поведении вблизи границы решений задачи Дирихле для бигармонического оператора // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 6. С. 1263–1266.

4. *Олейник О.А., Кондратьев В.А., Копачек И.* Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 10. С. 1886–1899.
5. *Кондратьев В.А., Копачек И., Олейник О.А.* О поведении обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости в окрестности граничной точки // Труды семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ. 1982. Т. 8. С. 135–152.
6. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
7. *Grisvard P.* Singularities in boundary value problems. Paris: Mason; Berlin: Springer, 1992. 198 p.
8. *Nicaise S.* About the Lamé system in a polygonal or polyhedral domain and coupled problem between the Lamé system and the plate equation. 1. Regularity of the solutions // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 4. 1992. V. 19. № 3. P. 327–361.
9. *Khludnev A.M.* On contact problem for a plate having a crack // Control and Cybernetics. 1995. V. 24. № 3. P. 349–361.
10. *Frehse J.* Two dimensional variational problems with thin obstacles // Math. Z. 1975. V. 143. № 3. P. 279–288.
11. *Schild B.* A regularity result for polyharmonic variational inequalities with thin obstacles // Ann. Sc. normale super. Pisa. Cl. sci. 1984. V. 11. № 1. P. 87–122.
12. *Хлуднев А.М.* Об экстремальных формах разрезов в пластине // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 170–176.
13. *Khludnev A.M.* Existence of extreme unilateral cracks in a plate // Control and Cybernetics. 1994. V. 23. № 3. P. 453–460.
14. *Ohtsuka K.* Generalized J-integral and three dimensional fracture mechanics // Hiroshima Math. J. 1981. V. 11. № 1. P. 21–52.
15. *Ohtsuka K.* Mathematical aspects of fracture mechanics // Lecture Notes in Numer. Appl. Anal. 1994. V. 13. P. 39–59.
16. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
17. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
18. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
19. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
20. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
21. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988. 448 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
13.XII.1996