

УДК 539.3

© 1997 г. В.П. Левицкий, В.П. Новосад

### НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ

В отличие от предыдущих работ [1–3], где исследовались стационарные контактные задачи термоупругости, рассматривается нестационарная контактная задача для жесткого конечного цилиндра с плоским основанием, который прижимается к упругому полупространству и вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Предполагается существование теплообразования за счет сил трения на площадке контакта, неидеальность теплового контакта между телами и теплообмен с внешней средой свободных поверхностей. Для решения задачи используется преобразование Лапласа по временной координате, преобразование Ганкеля по радиальной координате для полупространства и метод прямых для цилиндра. Определены поля температур и тепловых потоков в цилиндре и в полупространстве, контактные напряжения, перемещения полупространства. Задача проанализирована при таких значениях входных параметров, которые не допускают изменение со временем граничных условий.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим цилиндрический штамп радиуса  $R$  и высоты  $l$ , который вдавливается вертикальной силой  $P$  в упругое полупространство и вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (фиг. 1). В начальный момент времени полагаем температуру обоих тел и осадку штампа нулевыми. Математическая формулировка задачи заключается в следующем:

уравнения термоупругости для полупространства

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} + k \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t}{\partial r}, \quad \Delta u_z + k \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t}{\partial z} \quad (1.1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

уравнения теплопроводности для цилиндра и полупространства

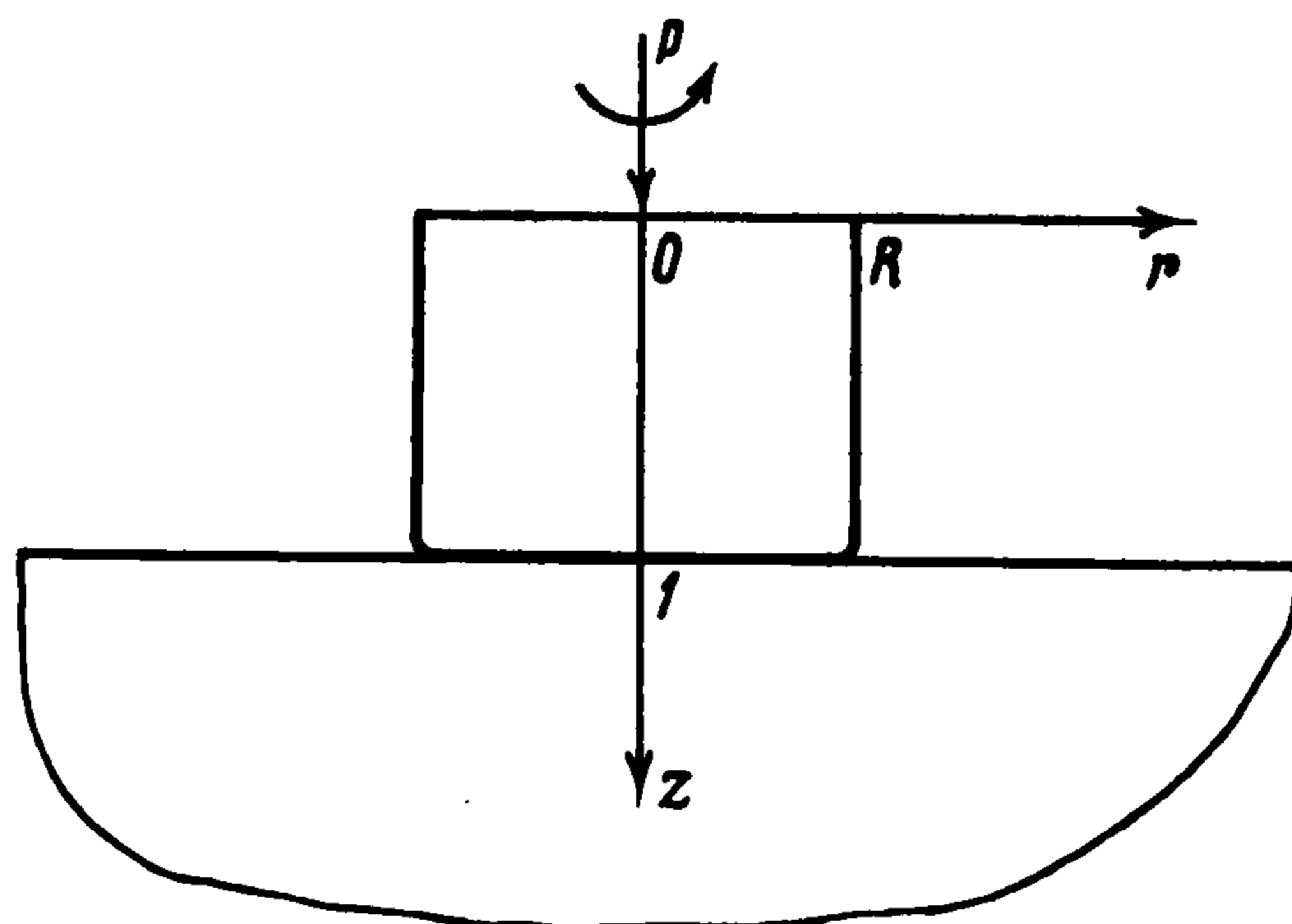
$$\Delta T = X_1 \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \Delta t = X_2 \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1.2)$$

температурные граничные условия

$$z = 0: \frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_0 T \quad (0 \leq r \leq R); \quad r = R: \frac{\partial T}{\partial r} = -\gamma_\alpha T \quad (0 \leq z \leq l) \quad (1.3)$$

$$z = l: \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z} = f_T \omega r \sigma_{zz}, \quad \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z} = h(t - T) \quad (0 \leq r \leq R) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \gamma_H t \quad (r > R)$$



Фиг. 1

силовые граничные условия

$$z = l: u_z = f \quad (0 \leq r \leq R), \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (r \geq R), \quad \tau_{rz} = 0 \quad (r < \infty) \quad (1.5)$$

начальные условия

$$\tau = 0: \quad t = T = 0, \quad f = \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0 \quad (1.6)$$

Здесь  $k = (\lambda + \mu)/\mu = 1/(1 - 2\nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$ ;  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе;  $\alpha_T$  – температурный коэффициент линейного расширения;  $f(\tau)$  – функция осадки штампа;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности соответственно цилиндрического штампа и полупространства;  $\gamma_0 = \gamma_\alpha = \gamma_H$  – коэффициенты теплообмена с внешней средой соответственно для торца цилиндра, боковой поверхности цилиндра и свободной поверхности полупространства;  $T$  – температура цилиндрического штампа,  $t$  – полупространства;  $X_i = 1/a_i$  ( $i = 1, 2$ ), где  $a_i$  – коэффициенты температуропроводности соответственно цилиндра и полупространства,  $h^{-1}$  – коэффициент термического сопротивления. Согласно [4] предполагалось, что  $\tau_{z\theta} = f_T \sigma_{zz}$ , где  $f_T$  – коэффициент трения.

Функции  $t, T, u_r, u_z, \sigma_{zz}, \tau_{rz}$  зависят от трех действительных переменных ( $r, z$  и  $\tau$ ). В предположении о параболической форме закругления кромки штампа функцию  $f(r, \tau)$  целесообразно представить в форме [5]

$$f(r, \tau) = f_1(\tau) - \frac{(r - r^*)^2}{2R_p} H(r - r^*) \quad (1.7)$$

где  $r^* < R$  – некоторая близкая к  $R$  точка (считаем, что закругление начинается достаточно близко к краю штампа),  $R_p$  – радиус закругления кромки.

При решении задачи будем также использовать условие динамического равновесия штампа

$$m \frac{\partial^2 f_1(\tau)}{\partial \tau^2} = P(\tau) + 2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}(r, l, \tau) dr \quad (1.8)$$

**2. Постановка задачи в трансформантах Лапласа.** Применяв преобразование Лапласа к уравнениям (1.1), (1.2) и граничным условиям (1.3)–(1.5), используя при этом (1.6), получим

$$\Delta u_r^L - \frac{u_r^L}{r^2} + k \frac{\partial e^L}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t^L}{\partial r}, \quad \Delta u_z^L + k \frac{\partial e^L}{\partial z} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t^L}{\partial z} \quad (2.1)$$

$$\Delta T^L = X_1 s T^L, \quad \Delta t^L = X_2 s t^L \quad (2.2)$$

$$z = 0: \frac{\partial T^L}{\partial z} = \gamma_0 T^L \quad (0 \leq r \leq R); \quad r = R: \frac{\partial T^L}{\partial r} = -\gamma_\alpha T^L \quad (0 \leq z \leq l) \quad (2.3)$$

$$z = l: \lambda_2 \frac{\partial t^L}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial T^L}{\partial z} = f_T \omega r \sigma_{zz}^L, \quad \lambda_2 \frac{\partial t^L}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial T^L}{\partial z} = h(t^L - T^L) \quad (0 \leq r \leq R) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial t^L}{\partial z} = \gamma_H t^L \quad (r > R)$$

$$z = l: u_z^L = f^L \quad (0 \leq r \leq R), \quad \sigma_{zz}^L = 0 \quad (r \geq R), \quad \tau_{rz}^L = 0 \quad (r < \infty) \quad (2.5)$$

Функции  $t^L, T^L, u_r^L, u_z^L, \sigma_{zz}^L, \tau_{rz}^L$  зависят от двух действительных переменных ( $r$  и  $z$ ) и одной комплексной  $s$ . Уравнение (1.8) при учете условий (1.6) для функции осадки запишем в виде

$$ms^2 f_1^L(s) = P^L(s) + 2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}^L(r, l, s) dr \quad (2.6)$$

**3. Решение задачи теплопроводности для штампа в трансформантах Лапласа.** Перейдем в первом уравнении (2.2) к безразмерным координатам  $\rho = r/R, \zeta = z/l$ . Используя конечно-разностную аппроксимацию этого уравнения и второго граничного условия (2.3) по безразмерной радиальной координате  $\rho$ , а также метод прямых [6] в каждой из  $N$  точек разбиения  $\rho_i = \Delta\rho(i-1) = (i-1)/(N-1)$  ( $i = 1, \dots, N$ ), задачу для цилиндра сведем к системе линейных дифференциальных уравнений, которую можно представить в виде

$$dw/d\zeta = Bw \quad (3.1)$$

$$w^T(\zeta, s) = \left( T^L(\rho_1, \zeta, s), \dots, T^L(\rho_N, \zeta, s), \frac{dT^L(\rho_1, \zeta, s)}{d\zeta}, \dots, \frac{dT^L(\rho_N, \zeta, s)}{d\zeta} \right)$$

$$B = \begin{vmatrix} O & E \\ B_1 & O \end{vmatrix}$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_2(4 + b_3s), -4b_2, 0, \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0, \dots, 0, b_2 \left( \frac{1}{2(i-1)} - 1 \right), b_2(2 + b_3s), -b_2 \left( \frac{1}{2(i-1)} + 1 \right), 0, \dots, 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0, \dots & \dots & 0, -2b_2, b_2(2 + b_3s) + b_4 \end{vmatrix}$$

$$b_2 = \frac{l^2}{R^2 \Delta\rho^2}, \quad b_3 = R^2 \Delta\rho^2 X_1, \quad b_4 = \frac{\gamma_\alpha}{R} \left( 1 + \frac{2}{\Delta\rho} \right)$$

$O$  – нулевая матрица,  $E$  – единичная матрица (каждая из матриц  $O, B, B_1$  имеет размерность  $N \times N$ ).

Решение системы (3.1) строится с помощью матричной экспоненты [7]

$$w(\zeta, s) = \exp(B(s)\zeta)d(s), \quad \exp(B(s)\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n(s)\zeta^n}{n!} \quad (3.2)$$

Функцию  $d(s)$  определим, используя граничные условия.

**4. Решение задачи для полупространства в двойных трансформантах Лапласа и Ганкеля.** Применяв ко второму уравнению (2.2) преобразование Ганкеля нулевого порядка по координате  $r$  и учитывая, что  $t \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , запишем решение для двойной трансформанты температуры в виде

$$t^{LH}(\xi, z, s) = D(\xi, s) \exp(-\psi_2(\xi, s)(z-l)), \quad \psi_2(\xi, s) = \sqrt{\xi^2 + X_2 s} \quad (4.1)$$

Используя решение осесимметричных уравнений термоупругости для полупространства в изображениях по Ганкелю [3] и равенство (4.1), получим выражения для двойных трансформант напряжений, перемещений и теплового потока. При помощи последнего условия (2.5) эти выражения можно записать через две неизвестные функции  $C_1(\xi, s)$  и  $D(\xi, s)$ . В частности, на границе полупространства имеем

$$\begin{aligned} t^{LH}(\xi, l, s) &= D(\xi, s), & q^{LH}(\xi, l, s) &= \lambda_2 \psi_2(\xi, s) D(\xi, s) \\ u_z^{LH}(\xi, l, s) &= \xi^2 \vartheta_1 C_1(\xi, s) - \vartheta_3 \psi_2(\xi, s) s^{-1} D(\xi, s) \\ \sigma_{zz}^{LH}(\xi, l, s) &= \xi^3 \sigma_1 C_1(\xi, s) - \sigma_3 \xi s^{-1} (\psi_2(\xi, s)(k-1)^{-1} + \xi) D(\xi, s) \\ \vartheta_1 &= k \frac{k+1}{k-1}, & \vartheta_3 &= \frac{b_1}{X_2} \frac{k+1}{k-1}, & \sigma_1 &= -2\mu \frac{k^2}{k-1}, & \sigma_3 &= -\frac{2\mu b_1}{X_2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

**5. Приведение решений для цилиндра и полупространства в соответствие с граничными условиями.** Переходя в формулах (4.2) к безразмерному параметру  $\eta = \xi R$ , применяя обратное преобразование Ганкеля и удовлетворяя граничным условиям (2.4), (2.5), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2}{R^3} \int_0^\infty \Psi_2(\eta, s) F(\eta, s) \eta J_0(\eta \rho) d\eta + \frac{\lambda_1}{l} \frac{\partial T^L(\rho, \zeta, s)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} &= -f_T \omega \rho R \sigma_{zz}^L(\rho, 1, s) \\ \left( \frac{\lambda_1}{l} \frac{\partial T^L(\rho, \zeta, s)}{\partial \zeta} + h T^L(\rho, \zeta, s) \right) \Big|_{\zeta=1} &= \frac{1}{R^3} \int_0^\infty \lambda_2 (\Psi_2(\eta, s) + hR) F(\eta, s) \eta J_0(\eta \rho) d\eta \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [\eta^2 \vartheta_1 C(\eta, s) - \vartheta_3 R s^{-1} \Psi_2(\eta, s) F(\eta, s)] \eta J_0(\eta \rho) d\eta &= R^4 f^L(s) \quad (0 \leq \rho \leq 1) \\ -\frac{1}{R^3} \int_0^\infty (\Psi_2(\eta, s) + \gamma_H R) F(\eta, s) \eta J_0(\eta \rho) d\eta &= 0 \quad (\rho \geq 1) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{R^5} \int_0^\infty [\eta^2 \sigma_1 C(\eta, s) - \sigma_3 R \eta s^{-2} (\Psi_2(\eta, s) + \eta s) F(\eta, s)] \eta J_0(\eta \rho) d\eta = 0$$

где  $\Psi_2(\eta, s) = \sqrt{\eta^2 + X_2 s R^2}$ ,  $C(\eta, s) = C_1(\eta/R, s)$ ,  $F(\eta, s) = D(\eta/R, s)$ .

Продолжим (5.2) на всю ось  $\rho$  с помощью функции Хевисайда

$$-\frac{1}{R^3} \int_0^\infty (\Psi_2(\eta, s) + \gamma_H R) F(\eta, s) \eta J_0(\eta \rho) d\eta = \varphi(\rho, s) H(1-\rho) \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{R^5} \int_0^\infty [\eta^2 \sigma_1 C(\eta, s) - \sigma_3 R \eta s^{-2} (\Psi_2(\eta, s) + \eta s) F(\eta, s)] \eta J_0(\eta \rho) d\eta = \sigma_{zz}^L(\rho, 1, s) H(1-\rho)$$

После этого представим неизвестные функции  $\varphi(\rho, s)$ ,  $\sigma_{zz}^L(\rho, 1, s)$  в виде разложений в ряды Фурье – Бесселя с коэффициентами, зависящими от параметра  $s$

$$\varphi(\rho, s) = b_0(s) + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s) J_0(\mu_n \rho), \quad \sigma_{zz}^L(\rho, 1, s) = \sum_{n=1}^N a_n(s) J_0(\mu_n \rho) \quad (5.4)$$

$\mu_n$  – нули функции Бесселя нулевого порядка  $J_0(x)$ .

Применив к (5.3) преобразование Ганкеля, неизвестные функции  $F(\eta, s)$  и  $C(\eta, s)$  можно выразить через функции  $a_n(s)$ ,  $b_n(s)$  ( $n = 1, \dots, N$ ). Удовлетворяя затем соотношению (2.6), а также (5.1) и первому условию (2.3) (соотношения (5.2) при представлении (5.3) выполняются автоматически) в каждой точке равномерного разбиения  $\rho_i = \Delta\rho(i-1) = (i-1)/(N-1)$  ( $i = 1, \dots, N$ ), придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_n(s) \vartheta_1 R \sigma_1^{-1} \mu_n J_1(\mu_n) \Lambda_n(\rho_i) + b_0(s) s^{-1} \Pi^*(\rho_i, s) + \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s) s^{-1} \mu_n J_1(\mu_n) \Pi_n(\rho_i, s) - f_2^L(\rho_i, s) = 0 \\ & \sum_{n=1}^N a_n(s) f_T \rho_i \omega R J_0(\mu_n \rho_i) + b_0(s) \lambda_2 I^*(\rho_i, s) + \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s) \lambda_2 \mu_n J_1(\mu_n) I_n(\rho_i, s) + \lambda_1 l^{-1} \sum_{n=1}^{2N} M_{N+i,n}^*(s) d_n(s) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} & b_0(s) Y^*(\rho_i, s) + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s) \mu_n J_1(\mu_n) Y_n(\rho_i, s) - \\ & - \lambda_1 l^{-1} \sum_{n=1}^{2N} M_{N+i,n}^*(s) d_n(s) - h \sum_{n=1}^{2N} M_{i,n}^*(s) d_n(s) = 0 \end{aligned}$$

$$l^{-1} d_{N+i}(s) - \gamma_0 d_i(s) = 0$$

$$2\pi R^2 \sum_{n=1}^{2N} a_n(s) J_1(\mu_n) \mu_n^{-1} - m s^2 f_1^L(s) = -P^L(s)$$

Здесь ( $i = 1, \dots, N$ )

$$\Lambda_n(\rho_i) = \int_0^{\infty} J_0(\eta) J_0(\eta \rho_i) (\mu_n^2 - \eta^2)^{-1} d\eta$$

$$\Pi^*(\rho_i, s) = \int_0^{\infty} \Pi(\rho_i, s) J_1(\eta) d\eta, \quad \Pi_n(\rho_i, s) = \int_0^{\infty} \Pi(\rho_i, s) \eta (\mu_n^2 - \eta^2)^{-1} J_0(\eta) d\eta$$

$$\Pi(\rho_i, s) = (\vartheta_1 \sigma_3 \sigma_1^{-1} (\Psi_2(\eta, s) (k-1)^{-1} + \eta) - \vartheta_3 \Psi_2(\eta, s) (\Psi_2(\eta, s) + R\gamma_H)^{-1} J_0(\eta \rho_i)$$

$$I^*(\rho_i, s) = \int_0^{\infty} I(\rho_i, s) J_1(\eta) d\eta, \quad I_n(\rho_i, s) = \int_0^{\infty} I(\rho_i, s) \eta (\mu_n^2 - \eta^2)^{-1} J_0(\eta) d\eta$$

$$I(\rho_i, s) = \Psi_2(\eta, s) (\Psi_2(\eta, s) + R\gamma_H)^{-1} J_0(\eta \rho_i)$$

$$Y^*(\rho_i, s) = \int_0^{\infty} Y(\rho_i, s) J_1(\eta) d\eta, \quad Y_n(\rho_i, s) = \int_0^{\infty} Y(\rho_i, s) \eta (\mu_n^2 - \eta^2)^{-1} J_0(\eta) d\eta$$

$$Y(\rho_i, s) = (\lambda_2 \Psi_2(\eta, s) + hR) (\Psi_2(\eta, s) + R\gamma_H)^{-1} J_0(\eta \rho_i)$$

$M_{i,n}^*(s)$  – элементы матрицы (3.2) при  $\zeta = 1$ .

Затем, что в данной работе принималось  $r^* = (1 - 1/(N - 1))R$ . Поэтому

$$f_2^L(\rho_i, s) = f_1^L(s) \quad (i = 1, \dots, N - 1), \quad f_2^L(\rho_N, s) = f_1^L(s) + \frac{(R\rho_N - r^*)^2}{2R_p s}$$

Кроме  $f_1^L(s)$  в системе (5.5) фигурирует еще  $4N$  неизвестных функций, а именно

$$a_n(s), b_n(s) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (5.6)$$

– коэффициенты разложений неизвестных функций в ряды Фурье – Бесселя и

$$d_n(s) \quad (n = 1, \dots, 2N) \quad (5.7)$$

– компоненты вектора  $\mathbf{d}(s)$ .

**6. Определение оригиналов искомых величин.** Непосредственно в систему (5.5) включена трансформанта лишь одной искомой величины (имеется в виду трансформанта  $f_1^L(s)$  перемещений упругого полупространства под плоским участком штампа). Трансформанты же других искомых в этой работе величин выражаются через функции (5.6), (5.7). Так, на границе полупространства

$$t^L(r, l, s) = b_0(s)R \int_0^\infty (\Psi_2(\eta, s) + R\gamma_H)^{-1} J_1(\eta) J_0\left(\eta \frac{r}{R}\right) d\eta + \\ + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s) \mu_n J_1(\mu_n) R \int_0^\infty (\Psi_2(\eta, s) + R\gamma_H)^{-1} (\mu_n^2 - \eta^2)^{-1} \eta J_0(\eta) J_0\left(\eta \frac{r}{R}\right) d\eta \quad (6.1)$$

$$q^L(r, l, s) = b_0(s) \lambda_2 I^*\left(\frac{r}{R}, s\right) + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s) \mu_n J_1(\mu_n) \lambda_2 I_n\left(\frac{r}{R}, s\right) \quad (6.2)$$

$$u_z^L(r, l, s) = \sum_{n=1}^N a_n(s) \vartheta_1 R \sigma_1^{-1} \mu_n J_1(\mu_n) \Lambda_n\left(\frac{r}{R}\right) + b_0(s) s^{-1} \Pi^*\left(\frac{r}{R}, s\right) + \\ + \sum_{n=1}^{N-1} b_k(s) s^{-1} \mu_n J_1(\mu_n) \Pi_n\left(\frac{r}{R}, s\right) \quad (6.3)$$

Трансформанты температуры и теплового потока в цилиндре можно искать по формуле (3.2), а трансформанту контактных напряжений – по формуле (5.4).

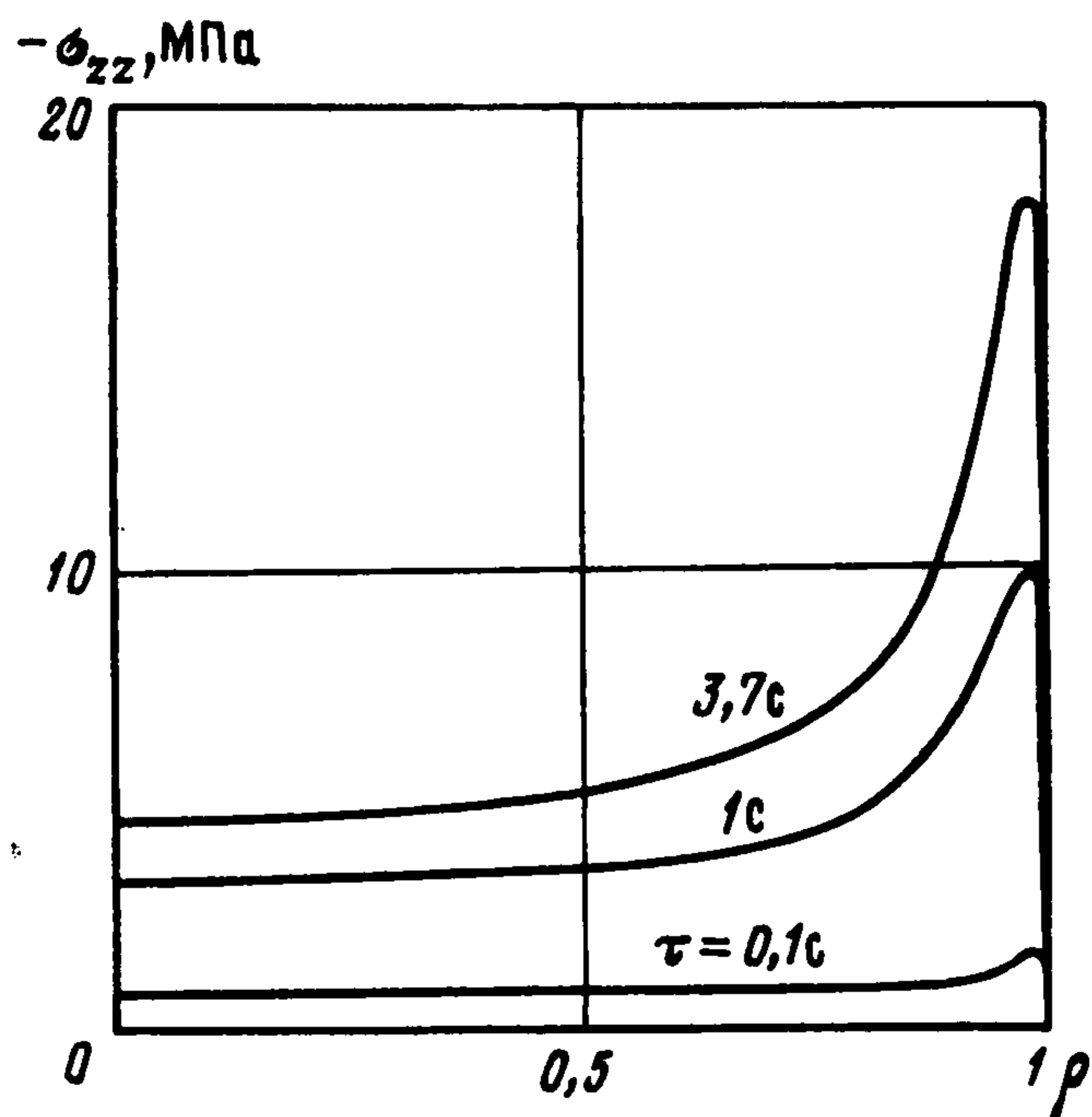
Для вычисления оригиналов этих функций используем численный метод обращения преобразования Лапласа с помощью ряда Фурье по синусам [8]. Проиллюстрируем это на примере функции  $f_1(\tau)$ . Согласно вышеупомянутому методу получим

$$f_1(\tau) = \sum_{k=0}^\infty \sin[(2k+1)\vartheta] e_k, \quad \vartheta = \arccos(e^{-\sigma\tau}) \quad (6.4)$$

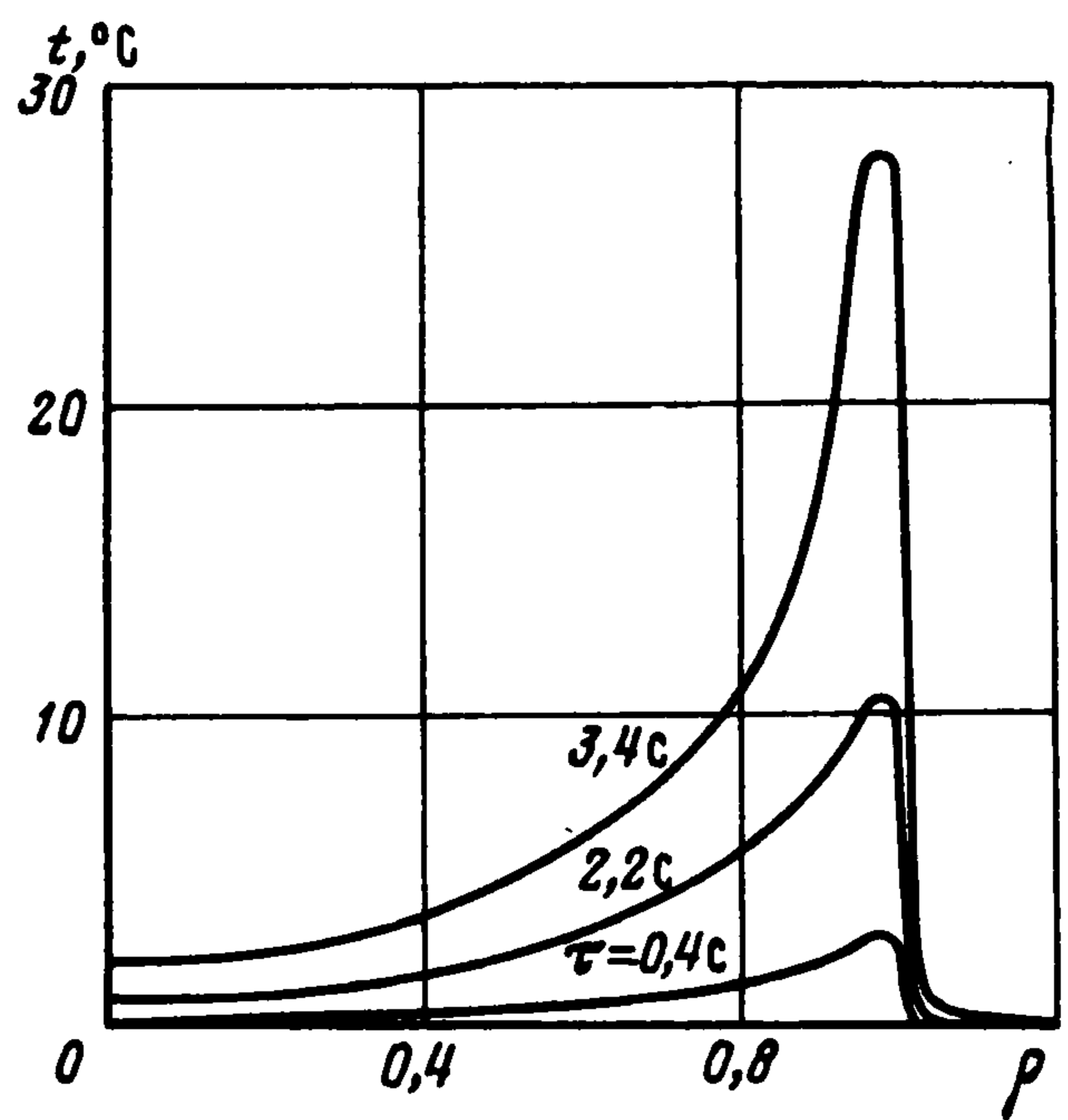
где  $\sigma$  – некоторое действительное положительное число, выбирающееся в зависимости от промежутка, для которого надо найти значение оригинала;  $e_k$  – постоянные коэффициенты, для вычисления которых, если ограничиться в (6.4) первыми  $N^*$  членами ряда, имеем систему линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2n+1} C_{2n+1}^{n-k} e_k = \frac{4^{n+1}}{\pi} \sigma f_1^L[(2n+1)\sigma] \quad (n = 0, 1, \dots, N^*) \quad (6.5)$$

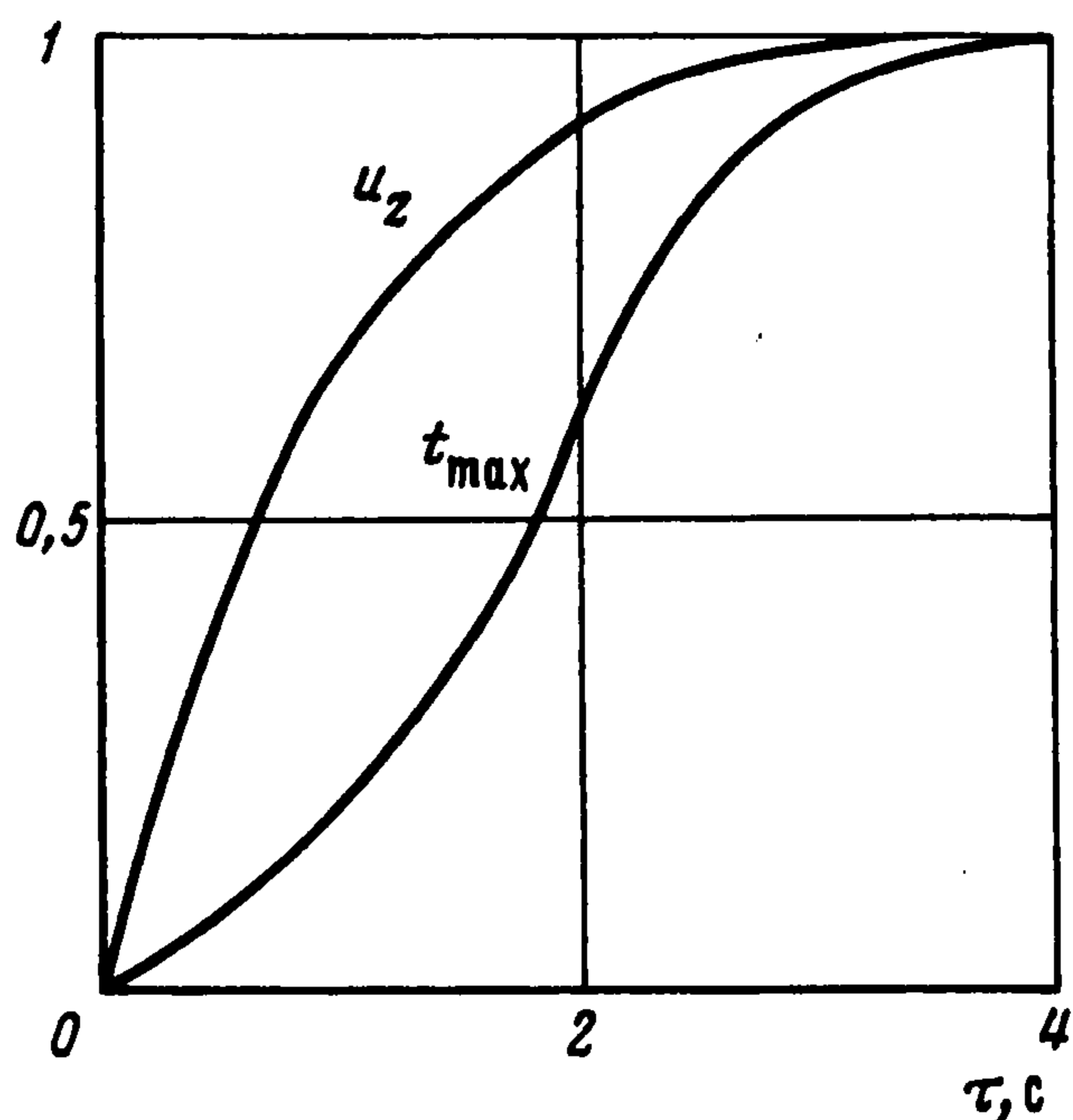
Необходимые для применения метода значения  $f_1^L(s)$  в разноотстоящих точках на действительной оси получаем, решая систему (5.5) для каждого из  $s_n = (2n+1)\sigma$  ( $n = 0, 1, \dots, N^*$ ).



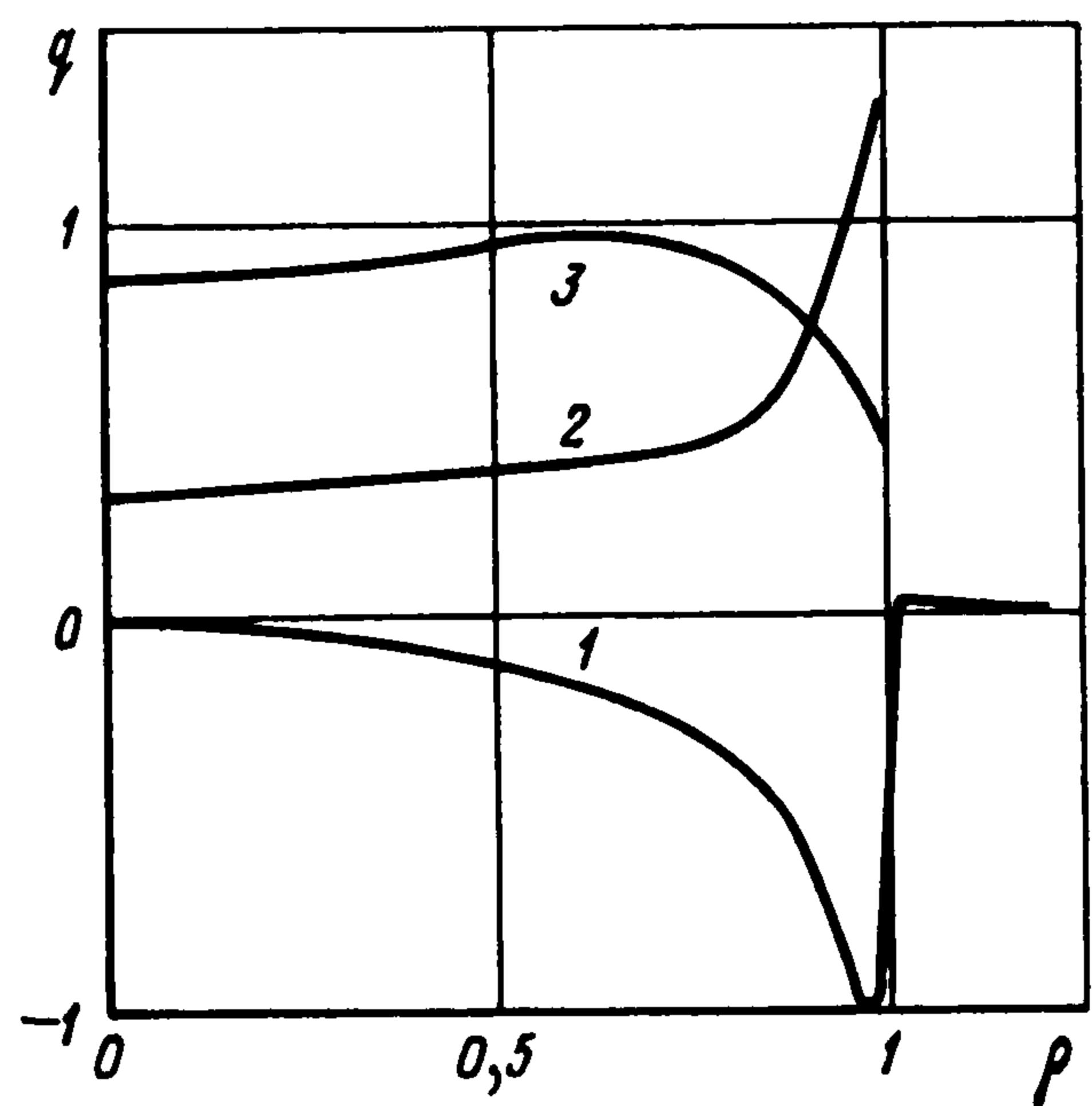
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

**7. Анализ численных результатов.** Предполагалось, что сила  $P$  действует на штамп по закону:

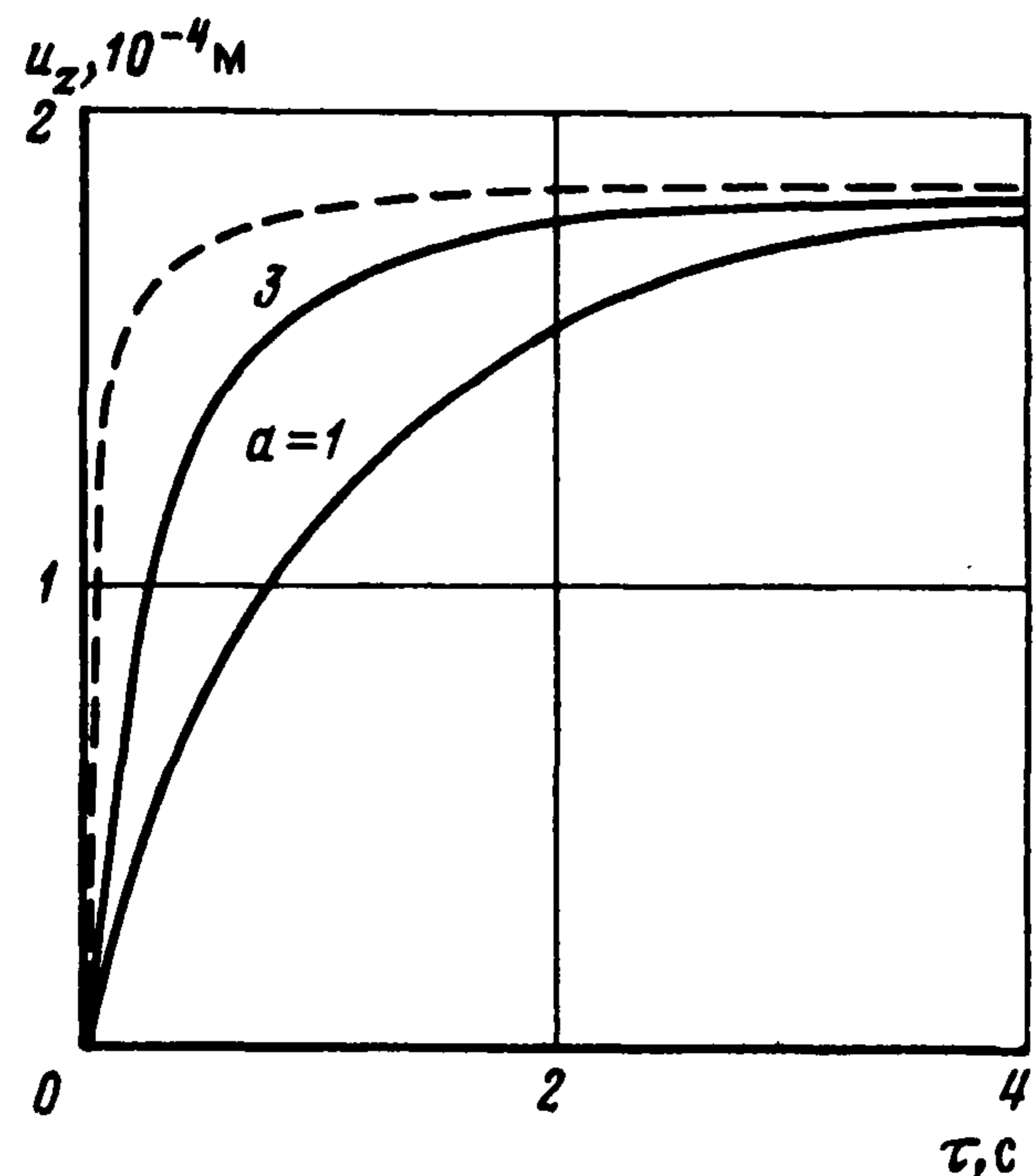
$$P(\tau) = F(1 - \exp(-a\tau)) \quad (7.1)$$

где  $a$  и  $F$  – некоторые постоянные.

При проведении расчетов также считалось, что материал цилиндра – сталь, а материал полупространства – алюминий. Значения постоянных были выбраны следующим образом:  $N = 17$ ;  $N^* = 11$ ;  $\gamma_H = \gamma_0 = \gamma_\alpha = 10 \text{ м}^{-1}$ ;  $h = 10 \text{ кВт/м}^2 \text{ К}$ ;  $\alpha_T = 22,9 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ ;  $F = 30 \text{ кН}$ ;  $\omega = 0,5 \text{ с}^{-1}$ ;  $R = 1 \text{ м}$ ;  $l = 0,2 \text{ м}$ ;  $X_1 = 200\,000 \text{ с/м}^2$ ;  $X_2 = 50\,000 \text{ с/м}^2$ ;  $a = 1$ ;  $\lambda = 5,46 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ;  $\mu = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ;  $f_T = 0,1$ ;  $\lambda_1 = 22 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ ;  $\lambda_2 = 209 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ ;  $m = 4900 \text{ кг}$ .

Полученные результаты частично отражены на фиг. 2–6. На фиг. 2 и фиг. 3 изображены распределения соответственно контактных напряжений и температуры на границе полупространства в разные моменты времени. На фиг. 4 показано изменение со временем перемещений точек упругого полупространства, которые контактируют со штампом (функция  $f_1(\tau)$  в масштабе  $1 : 0,179 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ), и температуры (в масштабе

1 : 28,5°) в точках границы полупространства вблизи края штампа. Если проследить за изменениями других искомых величин, придем к выводу, что после некоторого момента времени они практически не изменяются. Приняв за время  $\tau_c$ -выхода на стационарный режим такое время, после которого ни одна из исследуемых характеристик не изменяется более чем на 1%, получили  $\tau_c \approx 3,7$  с. В стационарном режиме устанавливаются тепловые потоки, отраженные на фиг. 5. Кривая 1 соответствует точкам полупространства, прилегающим к нижнему торцу цилиндра, кривые 2 и 3 построены соответственно для точек верхнего и нижнего торца штампа. Для кривых 1 – 3 выбраны масштабы соответственно 1 :  $10^6$  Вт/м<sup>2</sup>; 1 :  $5 \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>; 1 :  $2 \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>. Площадка контакта все время остается неизменной.



Фиг. 6

С целью исследования влияния функции  $P(\tau)$  на характеристики стационарного процесса проведены расчеты для различных значений параметра  $a$ . При этом установлено следующее.

1°. Распределение напряжений, перемещений, температуры и тепловых потоков в стационарном режиме фактически не зависят от величины  $a$ . Расхождение для значений  $a = 0,5; 1, 3$  составили не более 6%.

2°. При уменьшении параметра  $a$  от 1 до 0,5 время наступления стационарного процесса увеличивается от 3,7 с до 6 с. Однако при значительном увеличении параметра  $a$ , что означает более резкое воздействие силы  $P(\tau)$ , уменьшения  $\tau_c$  не наблюдается. На фиг. 6 приведены графики вертикальных перемещений под штампом для разных значений  $a$ . Штриховая кривая построена для нагружения  $P(\tau) = FH(\tau)$ .

3°. В процессе нагружения по закону (7.1) в каждой точке рассматриваемых тел устанавливаются температуры

$$t(\rho, z, \tau) \leq t_c(\rho, z), \quad T(\rho, z, \tau) \leq T_c(\rho, z)$$

где  $t_c(\rho, z), T_c(\rho, z)$  – решения стационарной контактной задачи.

Для оценки точности рассмотренного метода характеристики стационарного режима сравнивалось с решениями соответствующей стационарной задачи [2]. Максимальные расхождения составили: для контактных напряжений 4%, для температуры и теплового потока на границе полупространства соответственно 3% и 5%, для температуры подошвы штампа 3%.

Проводился также анализ влияния закругления кромки штампа на полученные результаты. Для этого разбиение интервала (0, 1) удваивалось, а участок с закруглением уменьшался наполовину. Контактные напряжения и температура на плоском участке штампа изменились при этом незначительно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Barber J.R. Indentation of an elastic half-space by a cooled flat punch // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1982. V. 35. № 1. P. 141–154.
2. Левицкий В.П., Новосад В.П., Онышкевич В.М. Взаимодействие жесткого цилиндра с упругим полупространством при теплообразовании на площадке контакта // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 11. С. 26–31.
3. Левицкий В.П., Онышкевич В.М. Теплопередача через жесткий диск, прижимаемый к упругому полупространству // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 480–486.

4. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
5. *Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища шк., 1981. 136 с.
6. *Волков Е.А.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 248 с.
7. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
8. *Крылов В.И., Скобля Н.С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 223 с.

Львов

Поступила в редакцию  
9.XI.1993