

УДК 539.3

© 1997 г. Н.К. Ахмедов

**АНАЛИЗ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН**

Изучаются структуры пограничного слоя на примере осесимметричной задачи теории упругости для радиально-слоистого цилиндра с чередующимися жесткими и мягкими слоями. На основе асимптотического анализа задачи предлагается прикладная теория растяжения, учитывающая слабо-затухающие погранслойные решения. Исследуются распространение осесимметричных волн в радиально слоистом цилиндрическом волноводе.

Было показано [1, 2], что для слоистых тел с чередующимися жесткими и мягкими слоями существуют слабозатухающие погранслойные решения, проникающие достаточно далеко в глубь области и дающие существенную поправку к проникающим решениям. Метод указанных работ был обобщен [3] в задачах стационарных крутильных колебаний радиально-слоистого цилиндра с чередующимися жесткими и мягкими слоями.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для кругового радиально-слоистого цилиндра, состоящего из чередующихся жестких и мягких слоев числом  $n = 2r - 1$ . Будем считать, что внутренний и внешний слой – жесткие. Каждый жесткий слой снабдим нечетным номером  $j = 1, 3, \dots, n$ , а мягкий – четным  $i = 2, 4, \dots, n - 1$ . Для простоты примем, что упругие свойства у всех жестких и всех мягких слоев одинаковы: модули сдвига  $G_j = G_r, G_i = G_s$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_j = \nu_r, \nu_i = \nu_s$ , плотности  $m_j = m_r, m_i = m_s$ . Пусть цилиндр занимает объем  $\Gamma = \{r \in [r_0, r_1], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [-L, L]\}$ . Внутренний и внешний радиусы  $k$ -го слоя обозначим  $r_{0k}$  и  $r_{1k}$  соответственно.

Уравнения равновесия  $k$ -го слоя в перемещениях в безразмерных переменных имеют вид

$$\Delta u_{\rho k} - \frac{1}{\rho^2} u_{\rho k} + \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial \rho} = 0 \tag{1.1}$$

$$\Delta u_{\zeta k} + \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial \zeta} = 0$$

Здесь

$$\rho = \frac{r}{R_0}, \quad \zeta = \frac{z}{R_0}, \quad \rho \in [\rho_{01}, \rho_{1n}]$$

$$\zeta \in [-l, l], \quad l = \frac{L}{R_0}, \quad u_{\rho k} = \frac{u_{rk}}{R_0}, \quad u_{\zeta k} = \frac{u_{zk}}{R_0}$$

$$R_0 = \frac{r_{01} + r_{1n}}{2}, \quad \theta_k = \frac{\partial u_{\rho k}}{\partial \rho} + \frac{u_{\rho k}}{\rho} + \frac{\partial u_{\zeta k}}{\partial \zeta}$$

$$\Delta = \Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Полагаем, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho_{01}, \zeta) = \sigma_{\rho\zeta}^{(1)}(\rho_{01}, \zeta) = 0 \\ \sigma_{\rho\rho}^{(n)}(\rho_{1n}, \zeta) = \sigma_{\rho\zeta}^{(n)}(\rho_{1n}, \zeta) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Соединение слоев будем считать жестким, что означает выполнение следующих условий сопряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_m(\rho_{1m}, \zeta) = \sigma_m(\rho_{0,m+1}, \zeta), \quad \mathbf{u}_m(\rho_{1m}, \zeta) = \mathbf{u}_{m+1}(\rho_{0,m+1}, \zeta) \\ \sigma_m = (\sigma_{\rho\rho}^{(m)}, \sigma_{\rho\zeta}^{(m)}), \quad \mathbf{u}_m = (u_{\rho m}, u_{\zeta m}); \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Примем, что на торцах цилиндра заданы произвольные граничные условия, оставляющие цилиндр в равновесии.

Решение задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде [4]

$$u_{\rho k} = u_k(\rho) a'(\zeta), \quad u_{\zeta k} = w_k(\rho) a(\zeta) \quad (1.4)$$

где функция  $a(\zeta)$  подчинена условию

$$a''(\zeta) - \alpha^2 a(\zeta) = 0$$

причем  $\alpha$  – некоторый параметр.

Подставляя (1.4) в (1.1)–(1.3), получаем следующие несамосопряженные спектральные задачи

$$\begin{aligned} (L_{0k} + L_{1k} + \alpha^2(L_{2k} + L_{3k} - L_{1k})) \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \\ M_1(\alpha^2) \mathbf{v}_1(\rho_{01}) = M_n(\alpha^2) \mathbf{v}_n(\rho_{1n}) = \mathbf{0} \\ M_m(\alpha^2) \mathbf{v}_m(\rho_{1m}) = M_{m+1}(\alpha^2) \mathbf{v}_{m+1}(\rho_{0,m+1}) \\ \mathbf{v}_m(\rho_{1m}) = \mathbf{v}_{m+1}(\rho_{0,m+1}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{v}_k = (u_k, w_k)$ ;  $L_{ik}, M_k$  – матричные дифференциальные операторы вида

$$L_{0k} = \left\| \begin{array}{cc} \Delta_1 - \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{array} \right\|, \quad L_{1k} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2(1-\nu_k)} \frac{d}{d\rho} \\ 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$L_{2k} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2(1-\nu_k)} \frac{d}{d\rho} \\ \frac{1}{1-2\nu_k} \left( \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) & 0 \end{array} \right\|$$

$$L_{3k} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1-2\nu_k}{2(1-\nu_k)} & 0 \\ 0 & \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \end{array} \right\|$$

$$M_k(\alpha^2) \equiv M_{0k} + M_{1k} + \alpha^2(M_{2k} - M_{1k})$$

$$M_{0k} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{G_k}{1-2\nu_k} \left( (1-\nu_k) \frac{d}{d\rho} + \frac{\nu_k}{\rho} \right) & 0 \\ 0 & G_k \frac{d}{d\rho} \end{array} \right\|$$

$$M_{1k} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{G_k v_k}{1-2v_k} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad M_{2k} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{G_k v_k}{1-2v_k} \\ G_k & 0 \end{vmatrix}$$

2. В качестве характеристики относительной жесткости слоев введем малый параметр  $p = G_s/G_r$  и изучим спектральную задачу (1.5) при  $p \rightarrow 0$ .

Спектральная задача (1.5) сводится к изучению некоторой однородной алгебраической системы с матрицей, элементы которой аналитически зависят от спектрального параметра  $\alpha$  и линейно от параметра  $p$ . Применяя теорию возмущений линейных операторов [5] к указанной алгебраической системе, заключаем, что справедлива следующая теорема.

*Теорема.* Спектр  $\Lambda(p)$  задачи (1.5) при  $p \rightarrow 0$  представляется в виде

$$\Lambda(p) = \Lambda_0(p) \cup \Lambda_-(p) \cup \Lambda_+^{(1)}(p) \cup \Lambda_+^{(2)}(p)$$

причем

- 1)  $\Lambda_0(p)$  состоит из двукратного собственного значения  $\alpha_0 = 0$ ;
- 2)  $\Lambda_-(p)$  состоит из  $2(r-1)$  вещественных собственных значений вида

$$\alpha_r = p^{1/2} \eta_r + O(p^{3/2}) \quad (2.1)$$

где  $\eta_r$  – ненулевое собственное значение однородной якобиевой алгебраической системы

$$CX - \eta^2 BX = 0 \quad (2.2)$$

$$X = (X_1, X_3, \dots, X_n), \quad B = \text{diag} \| b_{jj} \|, \quad b_{jj} = (1 + v_r)(\rho_{1j}^2 - \rho_{0j}^2)$$

$$C = \begin{vmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{n-2} & c_{n-2} \end{vmatrix}, \quad c_j = \left( \ln \frac{\rho_{0,j+2}}{\rho_{1j}} \right)^{-1}$$

- 3)  $\Lambda_+^{(1)}(p)$  состоит из  $r$  множеств собственных значений вида

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij} + O(p^\delta) \quad (2.3)$$

где  $\alpha_{ij}$  – корень уравнения

$$\alpha^4 \rho_{0j}^2 \rho_{1j}^2 E_{j00}^2 + \alpha^2 \rho_{0j}^2 f_{1j}(\alpha) E_{j01}^2 + \alpha^2 \rho_{1j}^2 f_{0j}(\alpha) E_{j10}^2 + f_{0j}(\alpha) f_{1j}(\alpha) E_{j11}^2 - 4\pi^{-2} (f_{0j}(\alpha) + f_{1j}(\alpha)) = 0 \quad (2.4)$$

$$E_{k\beta\gamma} = J_\beta(\alpha \rho_{0k}) Y_\gamma(\alpha \rho_{1k}) - J_\gamma(\alpha \rho_{1k}) Y_\beta(\alpha \rho_{0k})$$

$$f_{\beta j}(\alpha) = \alpha^2 \rho_{\beta j}^2 + 2(v_r - 1); \quad \beta, \gamma = 0, 1$$

- 4)  $\Lambda_+^{(2)}(p)$  состоит из  $r-1$  множеств собственных значений вида

$$\alpha_{ii}^{(2)} = \alpha_{ii} + O(p^\delta) \quad (2.5)$$

где  $\alpha_{ii}$  – корень уравнения

$$\alpha^2 \rho_{0i}^2 \rho_{1i}^2 (E_{i11}^2 + E_{i00}^2 + E_{i10}^2 + E_{i01}^2) - 4\alpha(1 - v_s) \rho_{0i} \rho_{1i}^2 (E_{i00} E_{i10} + E_{i11} E_{i01}) - 4\alpha(1 - v_s) \rho_{0i}^2 \rho_{1i} (E_{i11} E_{i10} + E_{i00} E_{i01}) +$$

$$+16(1 - \nu_s)^2 \rho_{0i} \rho_{1i} E_{i00} E_{i11} - 4\pi^{-2} (\rho_{0i}^2 + \rho_{1i}^2) = 0 \quad (2.6)$$

Здесь  $J_\beta, Y_\beta$  – функции Бесселя первого и второго рода соответственно;  $\delta = 1$ , если среди корней уравнений (2.4) и (2.6) нет одинаковых, либо если среди корней (2.4), (2.6) есть одинаковые, но при условии, что  $i \neq j + 1, i \neq j - 1, \delta = 1/2$ , если при  $i = j + 1$  или  $i = j - 1$  соответствующие уравнения имеют хотя бы пару одинаковых корней.

Двухкратные собственные значения  $\alpha_0 = 0$  определяют решения Сен-Венана, проникающие без затухания внутрь цилиндра. Эти решения имеют вид

$$u_{\rho k}^{(0)} = D_0(-\nu_r \rho X_0 + O(p)), \quad u_{\zeta k}^{(0)} = X_0(E_0 + D_0 \zeta) \\ X_0 = (b_{11} + b_{33} + \dots + b_{nn})^{-1/2} \quad (2.7)$$

( $E_0, D_0$  – произвольные постоянные).

Погранслоиные решения определяются как сумма элементарных решений вида

$$u_{\rho k}^{(t)} = u_{kt}(\rho) a_t'(\zeta), \quad u_{\zeta k}^{(t)} = w_{kt}(\rho) a_t(\zeta) \\ a_t(\zeta) = D_t \exp(\alpha_t \zeta) + E_t \exp(-\alpha_t \zeta)$$

Здесь  $D_t, E_t$  – произвольные постоянные;  $\alpha_t, (u_{kt}, w_{kt})$  – собственные значения и собственные функции задачи (1.5);  $\operatorname{Re} \alpha_t > 0$ .

Из теоремы вытекает, что в случае радиально-слоистого цилиндра с чередующимися жесткими и мягкими слоями существует конечное число собственных значений, принадлежащих  $\Lambda_-(p)$ , которые при малых  $p$  стремятся к нулю. А это означает, что элементарные решения, соответствующие нижней части спектра  $\Lambda_-(p)$  при  $p \rightarrow 0$ , могут проникать достаточно глубоко вдали от торцов и давать существенную поправку к проникающему решению. Это приводит к нарушению принципа Сен-Венана в его классической формулировке. Совокупность этих решений будем называть слабым пограничным слоем. Собственные значения, принадлежащие  $\Lambda_+^{(1)}(p), \Lambda_+^{(2)}(p)$ , при  $p \rightarrow 0$  имеют конечные пределы. Элементарные решения, соответствующие верхней части спектра  $\Lambda_+^{(1)}(p)$  и  $\Lambda_+^{(2)}(p)$ , сильно затухают при удалении от торцов. Совокупность их будем называть сильным пограничным слоем.

Отметим, что при малых  $p$  расслоение спектра на "низшую" и "высшую" части тем ярче выражено, чем больше разность  $\inf_{t,k} \alpha_{tk} - \sup_t p^{1/2} \eta_t$ .

Распределение перемещений по радиусам соответствующего слабого пограничного слоя в элементарных решениях представляется через собственные функции  $X_t = (X_{1t}, X_{3t}, \dots, X_{nt})$  алгебраической системы (2.2) следующим образом:

$$u_{kt} = F_t(u_{kt0} + O(p)), \quad w_{kt} = F_t(w_{kt0} + O(p)) \\ u_{jt0} = -\nu_r \rho X_{jt}, \quad w_{jt0} = X_{jt} \quad (2.8) \\ u_{i0} = (4\omega_i(\nu_s - 1)(\tau_{0i} - \tau_{1i}))^{-1} [((4(\nu_s - 1)\nu_r + 1) \times \\ \times \rho_{0i}^2 \rho^{-1} (\rho^2 - \rho_{1i}^2)(\tau_{0i} - \tau_{1i}) - \rho\omega_i \tau_{1i} X_{i-1,t}) - \\ - ((4(\nu_s - 1)\nu_r + 1) \rho_{1i}^2 \rho^{-1} (\rho^2 - \rho_{0i}^2)(\tau_{0i} - \tau_{1i}) - \rho\omega_i \tau_{0i}) X_{i+1,t}] \\ w_{i0} = (\tau_{0i} - \tau_{1i})^{-1} (\tau_{0i} X_{i+1,t} - \tau_{1i} X_{i-1,t}) \\ \tau_{0i} = \ln \frac{\rho}{\rho_{0i}}, \quad \tau_{1i} = \ln \frac{\rho}{\rho_{1i}}, \quad \omega_i = \rho_{1i}^2 - \rho_{0i}^2$$

Здесь  $F_t$  – нормирующий множитель.

3. Было показано [1, 2], что низшей части спектра соответствует некоторая прикладная теория, которая включает в себя, наряду с проникающими решениями, и все слабые пограничные слои.

Проникающим решениям со слабым пограничным слоем можно дать следующую механическую интерпретацию. Считаем, что напряженно-деформированное состояние (НДС) жестких слоев соответствует чистому растяжению вдоль оси симметрии, а мягкие слои обладают виклеровскими свойствами на сдвиг. Эти гипотезы позволяют смещения в жестком и мягком слоях представить в виде

$$\begin{aligned} u_{\rho j} &= -v_r \rho g'_j(\zeta), \quad u_{\zeta j} = g_j(\zeta) \\ u_{\rho i} &= 0, \quad u_{\zeta i} = \tau_{0i}^{-1}(\tau_{0i} g_{i+1}(\zeta) - \tau_{1i} g_{i-1}(\zeta)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда НДС в каждом жестком и мягком слое будет следующим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta\zeta}^{(j)} &= 2G_r(1 + v_r) g_j(\zeta) \\ \sigma_{\rho\zeta}^{(i)} &= G_s(\rho(\tau_{0i} - \tau_{1i}))^{-1}(g_{i+1}(\zeta) - g_{i-1}(\zeta)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Остальные компоненты тензоров напряжений равны нулю. Чтобы получить краевую задачу, соответствующую выбранной модели НДС, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа [6]

$$\delta\Pi - \delta A = 0 \quad (3.3)$$

где  $\delta A$  – вариация работы внешних сил,  $\delta\Pi$  – вариация энергии деформации.

Для определения  $\delta A$  примем, например, что на торцах заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_{\zeta k}(\rho, -l) &= 0, \quad \sigma_{\zeta\zeta}^{(k)}(l) = \sigma_{0k} \\ \sigma_{0k} &= \sigma_{0j}, \quad \rho \in [\rho_{0j}, \rho_{1j}]; \quad \sigma_{0k} = 0, \quad \rho \in [\rho_{0i}, \rho_{1i}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Считая  $\delta g_j$  независимыми вариациями, из вариационного уравнения (3.3) с учетом (3.1), (3.2), (3.4) получаем краевую задачу

$$-B g'' + \rho C g = 0 \quad (3.5)$$

$$g(-l) = 0, \quad B g'(l) = \mathbf{d} \quad (3.6)$$

где

$$\mathbf{g} = (g_1, g_3, \dots, g_n), \quad \mathbf{d} = (d_1, d_3, \dots, d_n), \quad d_j = \omega_j \sigma_{0j} / (2G_r)$$

Если решение уравнения (3.5) отыскивать в виде

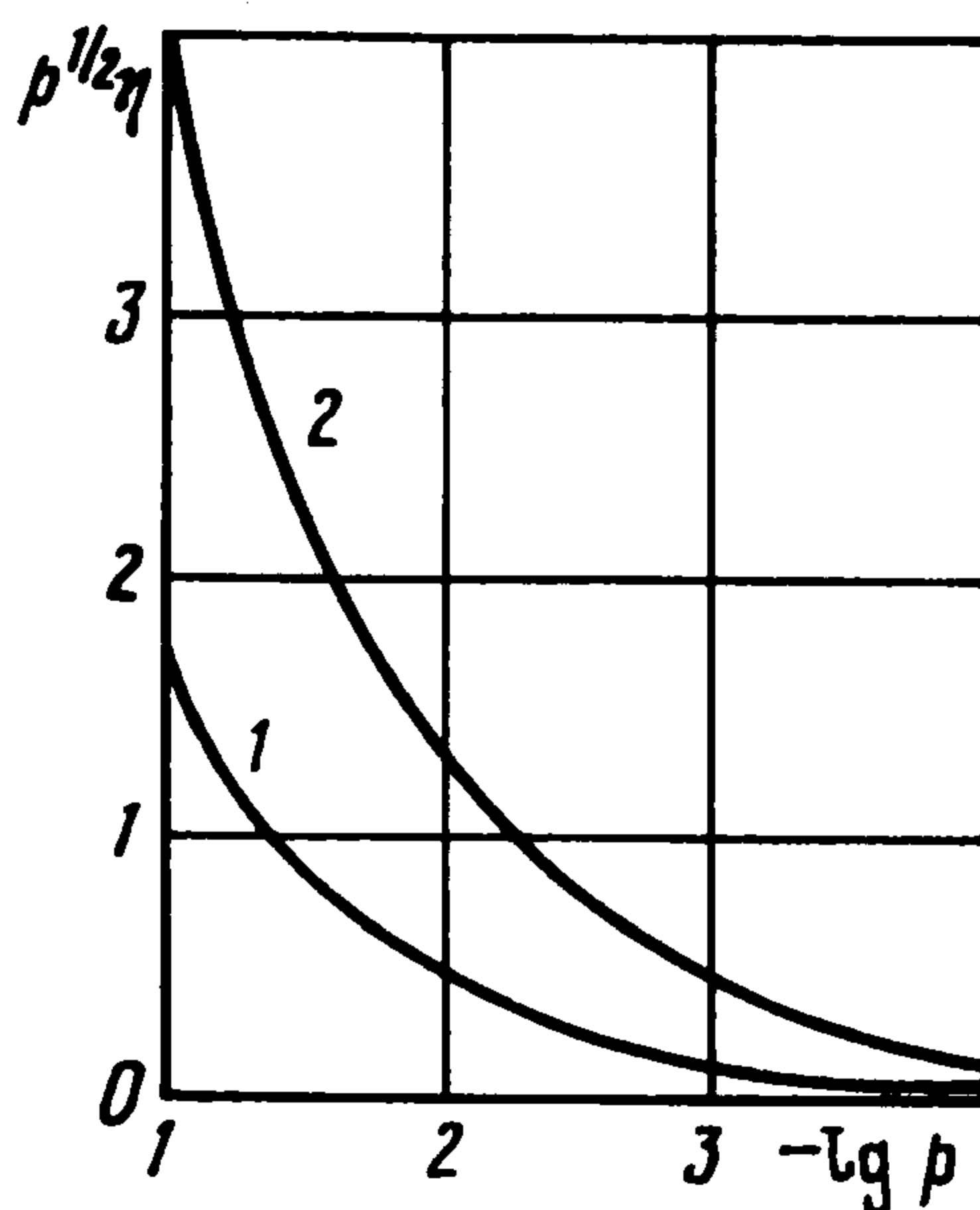
$$\mathbf{g} = \mathbf{X} \mathbf{a}(\zeta), \quad \alpha = \rho^{1/2} \eta$$

приходим к задаче (2.2).

В силу самосопряженности задачи (2.2) собственные векторы  $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{3t}, \dots, X_{nt})$  ( $t = 0, 1, \dots, r-1$ ), соответствующие собственному значению  $\lambda_t = \eta_t^2$ , можно подчинить условию

$$(\mathbf{B} \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_k) = \sum_{j=1,3,\dots}^n b_{jj} X_{jt} X_{jk} = \delta_{tk} \quad (3.7)$$

$\lambda_0 = 0$  является вектор собственным значением, и ему соответствует собственный вектор  $\mathbf{X}_0 = (X_0, \dots, X_0)$ , причем величина  $X_0$  определена последней формулой (2.1).



Фиг. 1

Общее решение уравнения (3.5) можно представить в виде

$$g(\xi) = X_0(E_0 + D_0\xi) + \sum_{i=1}^{r-1} X_i(E_i \exp(-\alpha_i\xi) + D_i \exp(\alpha_i\xi))$$

Постоянные  $E_0, D_0, E_i, D_i$  можно определить из (3.6) с учетом (3.7) таким образом:

$$D_0 = X_0 \sum_{j=1,3,\dots}^n d_j, \quad E_0 = lD_0$$

$$D_i = (2\alpha_i \operatorname{ch}(2\alpha_i l))^{-1} \exp(\alpha_i l) \sum_{j=1,3,\dots}^n d_j X_{ji}, \quad E_i = -\exp(-2\alpha_i l) D_i$$

Из (3.1) видно, что поле смещений, соответствующее частному решению  $g_0 = X_0(E_0 + D_0\xi)$ , эквивалентно решению Сен-Венана. Решение, соответствующее ненулевым собственным значениям  $\eta_i$ , является первым приближением по  $p$  слабого пограничного слоя.

4. В качестве примера рассмотрим трехслойный цилиндр. В этом случае

$$\eta_1^2 = c_1(b_{11}^{-1} + b_{33}^{-1})$$

$$X_1 = (X_{11}, X_{13}), \quad X_{11} = \left(\frac{b_{33}}{b_{11}}\right)^{1/2} X_0, \quad X_{13} = -\left(\frac{b_{11}}{b_{33}}\right)^{1/2} X_0, \quad X_0 = (b_{11} + b_{33})^{-1/2}$$

Для трехслойного цилиндра с параметрами 1)  $\rho_{01} = 0,3; \rho_{11} = 0,4; \rho_{03} = 0,8; \rho_{13} = 1; \nu_r = 0,25$  и 2)  $\rho_{01} = 0,8; \rho_{11} = 0,85; \rho_{03} = 0,95; \rho_{13} = 1; \nu_r = 0,25$  соответственно получаем  $\eta_1 = 4,4$ ,  $\eta_1 = 12,7$ .

На фиг. 1 для трехслойного цилиндра приведены кривые зависимости показателя затухания слабого погранслоного решения  $p^{1/2}\eta_1$  от параметра  $-\lg p$  в случаях 1 и 2, когда  $p \in [10^{-4}, 10^{-1}]$ . Видно, что с увеличением жесткости заполнителя глубина проникания слабого пограничного слоя уменьшается. А для цилиндра с достаточно мягким заполнителем слабо погранслоные решения проникают достаточно далеко в глубь области. Глубина проникания слабо пограничного слоя растет с увеличением толщины цилиндра.

Для однослойного цилиндра с внутренним радиусом  $\rho_0 = 0,8$  и внешним радиусом  $\rho_1 = 1$  показатели затухания погранслоных решений равны 2,8.

5. Рассмотрим распространение стационарных осесимметричных упругих волн в радиально-слоистом цилиндрическом волноводе, состоящем из чередующихся жестких и мягких слоев числом  $n = 2r - 1$ .

Предполагая, что боковые поверхности свободны от напряжений и соединение слоев – жесткое, подставляя в уравнения движения

$$u_k(\rho, \xi, t) = v_k(\rho) \exp(i(\alpha \xi - \omega t))$$

получаем спектральные задачи

$$\begin{aligned} (L_{0k} + i\alpha L_{2k} - \alpha^2 L_{3k} + \Omega^2 L_{4k})v_k &= 0 \\ N_1(\alpha)v_1(\rho_{01}) = N_n(\alpha)v_n(\rho_{1n}) &= 0 \\ N_m(\alpha)v_m(\rho_m) = N_{m+1}(\alpha)v_{m+1}(\rho_{0,m+1}) \\ v_m(\rho_{1m}) = v_{m+1}(\rho_{0,m+1}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $L_{4k}, N_k$  – матричные операторы вида

$$\begin{aligned} L_{4k} &= \begin{vmatrix} M_k^{-2} & 0 \\ 0 & e_k^{-2} \end{vmatrix}, \quad N_k(\alpha) = M_{0k} + i\alpha M_{2k} \\ \Omega^2 &= \frac{m_0 \omega^2 R_0^2}{G_0}, \quad e_k = \left( \frac{G_k}{m_k} \right)^{1/2}, \quad \mu_k = \left( \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \right)^{1/2} e_k \\ G_k &= \frac{G_k}{G_0}, \quad m_k = \frac{m_k}{m_0} \end{aligned}$$

– круговая безразмерная частота,  $\omega$  – частота колебания;  $G_0$  и  $m_0$  – некоторые характерные параметры, имеющие размерности модулей сдвига и плотности.

6. Определение волновой картины в радиально-слоистом цилиндрическом волноводе связано с построением дисперсионных кривых  $\alpha_s = \alpha_s(\Omega)$ , определяемых спектральным множеством (5.1).

Известно, что вещественным собственным значениям  $\alpha_s$  спектральной задачи (5.1) соответствуют однородные волны, распространяющиеся вдоль оси цилиндра и осуществляющие перенос энергии. Мнимые и комплексные собственные значения  $\alpha_s$  задачи (5.1) определяют неоднородные волны, не переносящие энергию.

Обратимся к исследованию вещественных дисперсионных множеств  $\alpha_s(\Omega)$ , поскольку для неограниченных тел вещественные дисперсионные кривые  $\alpha_s = \alpha_s(\Omega)$  являются основными характеристиками этих волноводов.

Задача (5.1) при  $\alpha = 0$  описывает толщинные резонансы. В плоскости  $(\alpha, \Omega)$  каждая кривая пересекает ось частот в точке  $(0, \Omega_s)$ , где  $\Omega_s$  – частоты толщинного резонанса, и является началом дисперсионных кривых.

Изучим семейство толщинных резонансных частот. Для этого исследуем предельную задачу, положив  $\alpha = 0$ . В этом случае (5.1) распадается на две независимые задачи

$$\begin{aligned} \text{а) } u_{\rho k} &\equiv 0, \quad u_{\xi k} = w_k(\rho) (\sigma_{\rho\rho}^{(k)} = \sigma_{\phi\phi}^{(k)} = \sigma_{\xi\xi}^{(k)} \equiv 0) \\ \text{б) } u_{\rho k} &= u_k(\rho), \quad u_{\xi k} \equiv 0 (\sigma_{\rho\xi}^{(k)} \equiv 0) \end{aligned}$$

Первая задача соответствует продольно-сдвиговым колебаниям, а вторая – чисто радиальным [7].

*Теорема.*  $\Lambda_1(p), \Lambda_2(p)$  – спектры задач, соответствующие продольно-сдвиговым и чисто радиальным колебаниям при  $p \rightarrow 0$ , являются счетным множеством и представляются в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_1(p) &= \Lambda_{10}(p) \cup \Lambda_{11}(p) \cup \Lambda_{12}(p) \\ \Lambda_2(p) &= \Lambda_{21}(p) \cup \Lambda_{22}(p) \end{aligned}$$

причем

1)  $\Lambda_{10}(p)$  – множество, состоящее из двукратного собственного значения  $\Omega = 0$  и  $2(r-1)$  собственных значений вида

$$\Omega_s = p^{1/2} \gamma_s + O(p^{3/2})$$

где  $\gamma_s^2$  – ненулевые собственные значения однородной якобиевой алгебраической системы

$$CX - \gamma^2 DX = 0 \quad (6.1)$$

$D = \text{diag} \|d_{jj}\|$ ,  $d_{jj} = (\rho_{1j}^2 - \rho_{0j}^2) / (2l_j^2)$ ,  $C$  – матрица та же, что и в (2.2);

2)  $\Lambda_{11}(p)$  – совокупность, состоящая из  $r$  множеств собственных значений вида

$$\Omega_{ij} = \Omega_{0ij}^{(1)} + O(p^{\delta_1})$$

где  $\Omega_{0ij}^{(1)}$  – корень уравнения

$$E_{j11}(\epsilon_{1j}) = 0 \quad (6.2)$$

3)  $\Lambda_{12}(p)$  состоит из  $r-1$  множеств собственных значений вида

$$\Omega_{ii} = \Omega_{0ii}^{(1)} + O(p^{\delta_1})$$

где  $\Omega_{0ii}^{(1)}$  – корень уравнения

$$E_{i00}(\epsilon_{1i}) = 0 \quad (6.3)$$

4)  $\Lambda_{21}(p)$  состоит из  $r$  множеств собственных значений вида

$$\Omega_{ij} = \Omega_{0ij}^{(2)} + O(p^{\delta_2})$$

где  $\Omega_{0ij}^{(2)}$  – корень уравнения

$$\mu_j^2 \Omega^2 \rho_{0j} \rho_{1j} E_{j00}(\epsilon_{2j}) - 2\mu_j e_j^2 \Omega (\rho_{0j} E_{j01}(\epsilon_{2j}) + \rho_{1j} E_{j10}(\epsilon_{2j})) + 4e_j^4 E_{j11}(\epsilon_{2j}) = 0 \quad (6.4)$$

5)  $\Lambda_{22}(p)$  состоит из  $r-1$  множеств собственных значений вида

$$\Omega_{ii} = \Omega_{0ii}^{(2)} + O(p^{\delta_2})$$

где  $\Omega_{0ii}^{(2)}$  – корень уравнения

$$E_{i11}(\epsilon_{2i}) = 0 \quad (6.5)$$

Здесь  $\epsilon_{1k} = \Omega/e_k$ ,  $\epsilon_{2k} = \Omega/\mu_k$ ;  $\delta_1 = 1$  ( $\delta_2 = 1$ ), если среди корней (6.2) и (6.3) ((6.4) и (6.5)) нет одинаковых, либо если среди корней (6.2), (6.3), ((6.4), (6.5)) есть одинаковые, но при условии, что  $i \neq j+1$ ,  $i \neq j-1$ ;  $\delta_1 = 1/2$  ( $\delta_2 = 1/2$ ), если при  $i = j-1$  или  $i = j+1$  соответствующие уравнения имеют хотя бы пару одинаковых корней.

Собственные функции, соответствующие  $\Lambda_{10}(p)$ , имеют вид

$$w_{kt} = w_{kt0}(\rho) + O(p) \quad (6.6)$$

Функция  $w_{kt0}(\rho)$  определена формулой (2.8).

Рассмотрим построение асимптотических приближений в окрестности  $(\alpha, \Omega) = (0, 0)$ . При  $\Omega = 0$  точка  $\alpha = 0$  является двукратным собственным значением (5.1). На основе методов теории ветвления [8] в окрестности точки  $(\alpha, \Omega) = (0, 0)$  решение спектральной задачи (5.1) отыскивается в виде

$$\alpha = q_1 \Omega + q_2 \Omega^2 + \dots, \quad v_k = v_{0k} + \Omega v_{1k} + \dots \quad (6.7)$$

Подстановка (6.6) в (5.1) приводит к некоторой рекуррентной системе, после интегрирования которой получаем

$$q_1^\pm = \pm \left( \frac{\sum_{k=1}^n m_k (\rho_{1k}^2 - \rho_{0k}^2)}{\sum_{k=1}^n 2G_k (\rho_{1k}^2 - \rho_{0k}^2)} \right)^{1/2} \quad (6.8)$$

$$v_{0k} = (0, T)$$

Здесь  $T$  – произвольная постоянная. Из (6.8) видно, что в окрестности точки  $(0, 0)$  формула

$$\alpha = q_1^\pm \Omega (1 + O(\Omega)) \quad (6.9)$$

описывает начало первой дисперсионной кривой.

Рассмотрим поведение дисперсионных кривых при  $\alpha$  и  $\Omega$ , стремящихся к бесконечности. Предположим, что предел их отношения – некоторая конечная величина, т.е.  $\lim(\Omega/\alpha) = c$  при  $\alpha \rightarrow \infty, \Omega \rightarrow \infty$ .

Поделив (5.1) на  $\alpha^2$  и считая  $c$  спектральным параметром, получим новую спектральную задачу, которая будет операторным аналогом задачи с малым параметром при старшей производной. Исследование этой задачи проведем на основе двух итерационных процессов метода Вишика–Люстерника [9, 10].

В соответствии с первым итерационным процессом получаем значения для первого члена асимптотического разложения фазовой скорости  $c_{0k}^{(1)} = e_k, c_{0k}^{(2)} = \mu_k$ . Второй итерационный процесс осуществляется в двух вариантах: 1) вблизи граничных поверхностей  $\rho = \rho_{01}, \rho = \rho_{1n}$ ; 2) вблизи границ раздела  $\rho = \rho_{1m}$  ( $m = 1, 2, \dots, n-1$ ).

В первом варианте первый этап второго итерационного процесса дает кривая задача, которая вместе с дополнительным условием убывания решения на бесконечности, описывает волну Релея, распространяющуюся вдоль свободной поверхности цилиндра с фазовой скоростью  $c_s$ .

Во втором варианте для каждой границы раздела  $\rho = \rho_{1m}$  в первых членах приближения получаем задачу сопряжения, которая вместе с дополнительным условием затухания решения при удалении от границ раздела описывает волну Стоунли, распространяющуюся с фазовыми скоростями  $c_s$ .

7. В качестве примера рассмотрим трехслойный цилиндрический волновод с мягким заполнителем. В этом случае

$$\gamma_1^2 = c_1 (d_{11}^{-1} + d_{33}^{-1}) \quad (7.1)$$

$$\mathbf{X}_1 = (X_{11}, X_{13}), \quad X_{11} = \left( \frac{d_{33}}{d_{11}} \right)^{1/2} X_0, \quad X_{13} = - \left( \frac{d_{11}}{d_{33}} \right)^{1/2} X_0, \quad X_0 = (d_{11} + d_{33})^{-1/2}$$

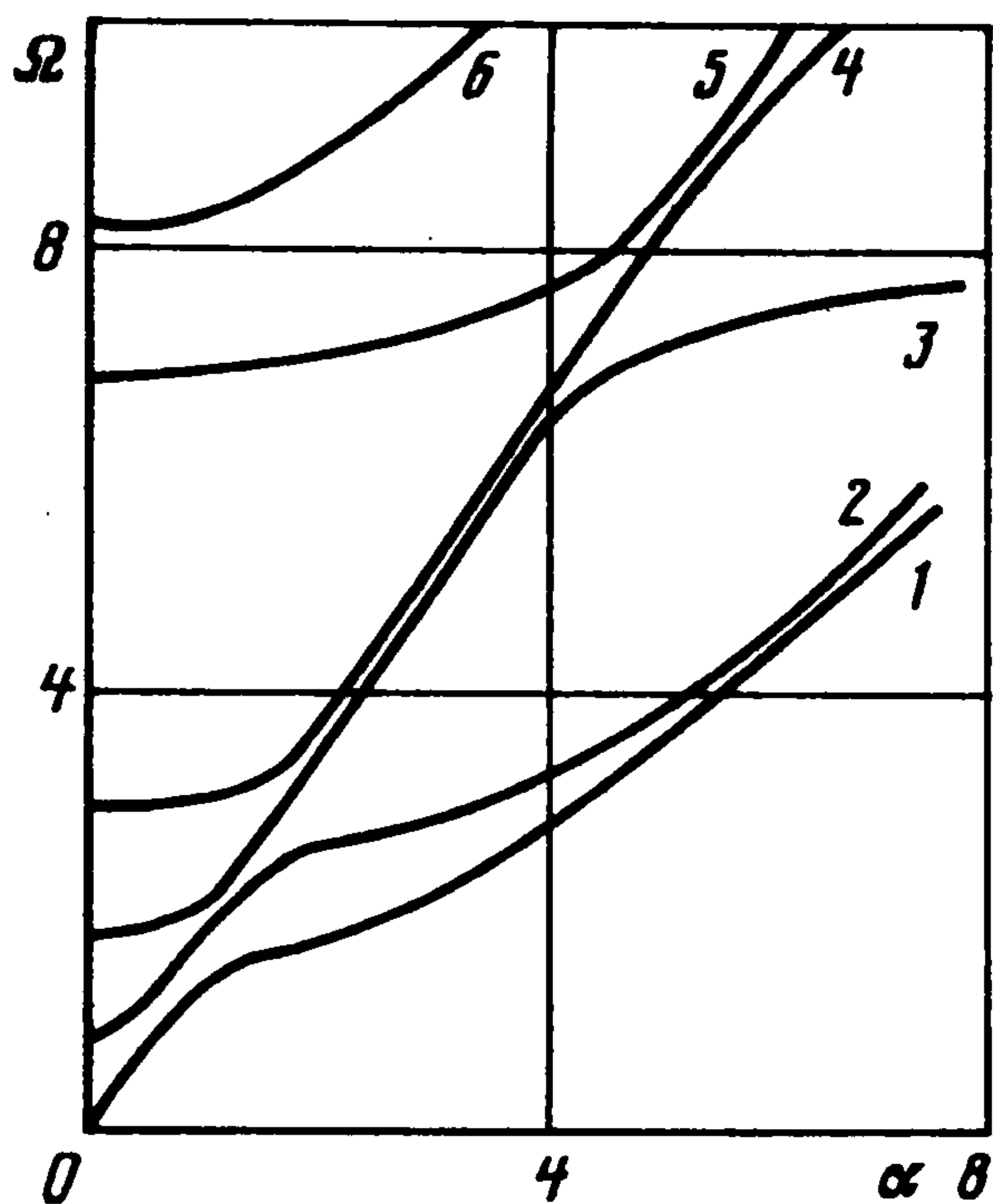
Первая резонансная частота имеет вид

$$\Omega_1 = p^{1/2} \gamma_1 + O(p^{3/2}) \quad (7.2)$$

Соответствующая форма колебаний определяется формулами (6.6), (7.1).

Приведенные результаты позволяют заключить, что в многослойных цилиндрах с чередующимися жесткими и мягкими слоями уже при низких частотах существует более одной распространяющейся волны в отличие от однородного цилиндра той же толщины.

Приведем некоторые результаты численного анализа задачи (5.1) для трехслойного цилиндрического волновода. Для этой цели используем метод дискретной ортогонализации Годунова [11].



Фиг. 2

продольных волн в мягком слое и т.д. Для второй кривой асимптотой будет прямая с тангенсом углов наклона, равными  $c_{\alpha}^{(1)}$ .

Отметим, что формула (7.2) определяет значения первого толщинного резонанса с погрешностью 7%.

На фиг. 2 построена вещественная часть дисперсионных кривых в случаях  $p = 10^{-2}$ ;  $m_s/m_r = 0,2$ ;  $\rho_{01} = 0,2$ ;  $\rho_{11} = 0,5$ ;  $\rho_{03} = 0,6$ ;  $\rho_{13} = 1$ .

Первая дисперсионная ветвь, выходящая из нуля, при возрастании  $\Omega$  от нуля до 1,7 приближается к прямой с тангенсом угла наклона, равным скорости распространения поперечных волн в жестком слое. Начиная с  $\Omega = 1,7$ , тангенс угла наклона стремится к фазовой скорости продольных волн в мягком слое. При последующем увеличении  $\alpha$  для первой кривой асимптотой будет прямая с тангенсом углов наклона, равными  $c_R$ .

На второй дисперсионной ветви при росте  $\Omega$  кривая стремится к прямой с тангенсом угла наклона, равным скорости продольных волн в жестком слое. При  $1,5 < \Omega < 2,8$  тангенс угла наклона приближается к фазовым скоростям поперечных волн в жестком слое.

При  $\Omega > 2,8$ , с дальнейшим возрастанием  $\Omega$ , тангенс угла наклона стремится к фазовым скоростям

## ЛИТЕРАТУРА

1. Устинов Ю.А. О структуре погранслоя в слоистых плитах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 2. С. 325–328.
2. Ахмедов Н.К., Устинов Ю.А. О принципе Сен-Венана в задаче кручения слоистого цилиндра // ПММ. Т. 52. Вып. 2. С. 264–268.
3. Ахмедов Н.К., Устинов Ю.А. Крутильные колебания и волны в слоистом цилиндре // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 92–98.
4. Базаренко Н.А., Ворович И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 6. 1035–1052.
5. Данфорд Н., Шварц Д.Т. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
6. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. Григченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
8. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
9. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
10. Гетман И.П., Устинов Ю.А. Распространение волн в поперечно-неоднородных пьезоактивных волноводах // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 3. С. 314–319.
11. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 14. Вып. 3. С. 171–174.