УДК 539.3

© 1997 г. В.Н. Паймушин, И.Н. Сидоров

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТЕОРИИ ТИПА ТИМОШЕНКО ДЛЯ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Предлагается метод построения интегрального представления решения уравнений равновесия теории типа Тимошенко для тонких или пологих изотропных оболочек сложной геометрии. Метод включает в себя следующие этапы: запись уравнений равновесия для фундаментального решения трехмерной теории упругости – вектора Кельвина в криволинейной системе координат, нормально связанной со срединной поверхностью оболочки; выделение из точных уравнений равновесия для вектора Кельвина дифференциального оператора, соответствующего рассматриваемой теории оболочек; построение интегрального представления вектора перемещений элементов оболочки с помощью формулы Грина для дифференциального оператора рассматриваемой теории оболочек. Показано, что задачи определения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки в дифференциальной и интегральной постановках эквивалентны с погрешностью, малой в рамках приближений рассматриваемой теории. Предлагается один из способов построения интегральных уравнений для вектора перемещений элементов оболочки постоянной толщины.

Для преодоления трудностей, связанных с использованием метода граничных элементов при определении параметров напряженно-деформированного состояния оболочек сложной геометрии был предложен [1–3] итерационный алгоритм для решения задач статики пологих оболочек. Однако было отмечено [3], что при достаточно малых радиусах кривизны оболочки и определенных граничных условиях требуется большое количество итераций, а в ряде случаев процесс может расходиться.

Предлагаемый ниже метод получения интегрального представления решения уравнений равновесия теории оболочек типа Тимошенко свободен от указанных недостатков, обладает достаточной универсальностью, не требует построения фундаментального решения уравнений равновесия и обеспечивает построение интегральных уравнений Фредгольма второго рода для определения неизвестных параметров на контуре и срединной поверхности оболочки сложной геометрии.

1. Предположим, что в трехмерном евклидовом пространстве R^3 задана изотропная тонкая или пологая оболочка постоянной толщины $2h$. Оболочка имеет срединную поверхность S, удовлетворяющую необходимым требованиям гладкости, кусочно-гладкий контур этой поверхности Γ и боковую поверхность Σ, образованную движением нормали $\mathbf{m}$ к поверхности S вдоль контура Γ. Полагаем, что задана параметризация поверхности S с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}_x(x^1, x^2)$ (x^1, x^2 – криволинейные гауссовы координаты). Тогда радиус-вектор элементов оболочки представляется в виде $\mathbf{R} = \mathbf{r}_x + z\mathbf{m}(\mathbf{r}_x)$, где $\mathbf{m}(\mathbf{r}_x) = \mathbf{m}_x$ – единичная нормаль к поверхности S в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_x$; $z \in [h, h]$ – нормальная координата.

Трехмерное уравнение равновесия в векторной форме для элементов оболочки имеет вид (далее везде греческие индексы пробегают значения 1, 2, латинские – 1, 2, 3, а по повторяющимся индексам проводится суммирование)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}[\partial_{\alpha,x}(\sqrt{g}\mathbf{P}^{\alpha})+\partial_{3,x}(\sqrt{g}\mathbf{P}^{3})]+\mathbf{F}=0 \quad \left(\partial_{\alpha,x}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}},\ \partial_{3,x}\equiv\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{P}^i$ – векторные составляющие тензора напряжений, $\mathbf{F}$ – вектор массовых сил, g – определитель метрического тензора.

В нормально связанной со срединной поверхностью оболочки системе координат векторы базиса, а также компоненты метрического тензора представляются в виде (δ_{α}^{β} – символ Кронеккера, b_{α}^{β} – смешанные компоненты второго метрического тензора срединной поверхности оболочки, при определении векторов взаимного базиса индексы α, β меняются циклически)

$$\begin{gathered}\mathbf{R}_{\alpha}=(\delta_{\alpha}^{\beta}-zb_{\alpha}^{\beta})\mathbf{r}_{\beta},\quad \mathbf{R}^{\alpha}=[\mathbf{R}_{\beta}\times\mathbf{m}_x]/(\mathbf{R}_{\alpha},\ [\mathbf{R}_{\beta}\times\mathbf{m}_x])\\ \mathbf{R}^{3}=\mathbf{R}_{3}=\mathbf{m}_x,\quad g_{\alpha\beta}=(\mathbf{R}_{\alpha},\ \mathbf{R}_{\beta}),\quad g^{\alpha\beta}=(\mathbf{R}^{\alpha},\ \mathbf{R}^{\beta})\end{gathered} \tag{1.2}$$

Векторные составляющие тензора напряжений согласно обобщенному закону Гука выражаются через вектор перемещений элементов оболочки $\mathbf{u}$ формулами

$$\mathbf{P}^{i}=\lambda(\mathbf{R}^{k},\ \partial_{k,x}\mathbf{u})\mathbf{R}^{i}+\mu(\mathbf{R}^{i},\ \partial_{k,x}\mathbf{u})\mathbf{R}^{k}+\mu g^{ik}\partial_{k,x}\mathbf{u} \tag{1.3}$$

где λ, μ – параметры Ламе.

В рамках приближенной тонкой или пологой оболочки постоянной толщины $2h$ векторы базиса, компоненты метрического тензора, а также его определитель на основании (1.2) с погрешностью zb_{α}^{β} по сравнению с δ_{α}^{β} можно заменить на соответствующие величины для срединной поверхности оболочки.

С помощью уравнения (1.1) в соответствии с принятыми приближениями получим уравнения для вектора усилий и вектора моментов вида

$$\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{T}^{\alpha}(\mathbf{r}_x))+\sqrt{a}\mathbf{X}(\mathbf{r}_x)=0 \tag{1.4}$$

$$\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{M}^{\alpha}(\mathbf{r}_x))+\sqrt{a}([\mathbf{r}_{\alpha}\times\mathbf{T}^{\alpha}(\mathbf{r}_x)]+\mathbf{Y}(\mathbf{r}_x))=0 \tag{1.5}$$

Вектор усилий $\mathbf{T}^{\alpha}$ и вектор моментов $\mathbf{M}^{\alpha}$ определяются формулами

$$\mathbf{T}^{\alpha}(\mathbf{r}_x)=\int_{-h}^{h}\mathbf{P}^{\alpha}(\mathbf{r}_x,\ z)dz,\quad \mathbf{M}^{\alpha}(\mathbf{r}_x)=\left[\mathbf{m}(\mathbf{r}_x)\times\int_{-h}^{h}\mathbf{P}^{\alpha}(\mathbf{r}_x,\ z)zdz\right] \tag{1.6}$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}_x)=\mathbf{P}_n^{(+)}+\mathbf{P}_n^{(-)}+\int_{-h}^{h}\mathbf{F}(\mathbf{r}_x,\ z)dz$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{r}_x)=h[\mathbf{m}(\mathbf{r}_x)\times(\mathbf{P}_n^{(+)}-\mathbf{P}_n^{(-)})]+\int_{-h}^{h}[\mathbf{m}(\mathbf{r}_x)\times\mathbf{F}(\mathbf{r}_x,\ z)]zdz$$

$\mathbf{P}_n^{(\pm)}$ – заданный вектор усилий на верхней S^{+}, нижней S^{-} лицевых поверхностях оболочки.

2. Для классической теории типа Тимошенко согласно кинематической гипотезе вектор перемещений представляется в виде [4]

$$\mathbf{u}(\mathbf{R})=\mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_x)+\frac{z}{h}\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x),\quad \mathbf{w}^{(0)}=\mathbf{v}(\mathbf{r}_x),\quad \mathbf{w}^{(1)}=h\gamma_{\alpha}\mathbf{r}^{\alpha} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r}_x)$ – вектор перемещений элементов срединной поверхности оболочки, $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}_x)=\gamma_{\alpha}\mathbf{r}^{\alpha}$ – вектор, определяющий поворот волокон, нормальных к срединной поверхности до деформации.

Согласно статической гипотезе этой теории из (1.3), следует, что

$$P^{33} = (\mathbf{P}^3,\ \mathbf{R}^3) = \lambda(\mathbf{R}^k,\ \partial_{k,x}\mathbf{u}) + 2\mu(\mathbf{m}_x,\ \partial_{3,x}\mathbf{u}) = 0$$

и векторы $\mathbf{P}^\alpha$, $\mathbf{P}^3$ преобразуется к виду

$$\mathbf{P}^\alpha = \lambda'(\mathbf{R}^\beta,\ \partial_{\beta,x}\mathbf{u})\mathbf{R}^\alpha + \mu(\mathbf{R}^\alpha,\ \partial_{k,x}\mathbf{u})\mathbf{R}^k + \mu g^{\alpha\beta}\partial_{\beta,x}\mathbf{u},\quad \lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{P}^3 = \mu[(\mathbf{m}_x,\ \partial_{\beta,x}\mathbf{u})\mathbf{R}^\beta + (\mathbf{R}_\beta,\ \partial_{3,x}\mathbf{u})\mathbf{R}^\beta]$$

В соответствии с принятыми допущениями о базисных векторах и первом метрическом тензоре тонкой или пологой оболочки, а также формулами (2.1), (2.2) вектор усилий $\mathbf{T}^\alpha$ и вектор моментов $\mathbf{M}^\alpha$ в рамках классической теории типа Тимошенко при учете выражений для перерезывающих сил [4] представим в виде

$$\mathbf{T}^\alpha = 2h[\lambda'(\mathbf{r}^\beta,\ D_{\beta,x}\mathbf{w}^{(0)})\mathbf{r}^\alpha + \mu(\mathbf{r}^\alpha,\ D_{k,x}\mathbf{w}^{(0)})\mathbf{r}^k + \mu a^{\alpha\beta}D_{\beta,x}\mathbf{w}^{(0)}] +$$

$$+2h\mu(k'-1)[(\mathbf{m}_x,\ D_{\beta,x}\mathbf{w}^{(0)})a^{\alpha\beta} + (\mathbf{r}^\alpha,\ D_{3,x}\mathbf{w}^{(0)})]\mathbf{m}_x \tag{2.3}$$

$$\mathbf{M}^\alpha = \frac{2h^2}{3}[\mathbf{m}_x \times \mathbf{t}^\alpha]$$

$$\mathbf{t}^\alpha = \lambda'(\mathbf{r}^\beta,\ D_{\beta,x}\mathbf{w}^{(1)})\mathbf{r}^\alpha + \mu(\mathbf{r}^\alpha,\ D_{k,x}\mathbf{w}^{(1)})\mathbf{r}^k + \mu a^{\alpha\beta}D_{\beta,x}\mathbf{w}^{(1)}$$

$$D_{k,x}\mathbf{w}^{(m)} = \frac{2m+1}{2h}\int_{-h}^{h} P_m\left(\frac{z}{h}\right)\partial_{k,x}\mathbf{u}(\mathbf{R})dz =$$

$$= \begin{cases} \partial_{\beta,x}\mathbf{w}^{(m)}, & k=\beta \\ \dfrac{2m+1}{2h}[\mathbf{u}^{(+)} - (-1)^m\mathbf{u}^{(-)} - 2\delta_{1m}\mathbf{w}^{(0)}], & k=3 \end{cases} \qquad (m=0,\ 1)$$

где k' – коэффициент сдвига, $\mathbf{u}^{(\pm)} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_x \pm h\mathbf{m}_x)$, δ_{1m} – символ Кронеккера, $P_m\left(\frac{z}{h}\right)$ – полином Лежандра m-го порядка.

Для вектора $\mathbf{T}^3$ имеется формула

$$\mathbf{T}^3 = 2h\mu k'\left[(\mathbf{m}_x,\ \partial_{\beta,x}\mathbf{w}^{(0)})\mathbf{r}^\beta + \left(\mathbf{r}_\beta,\ \frac{1}{h}\mathbf{w}^{(1)}\right)\mathbf{r}^\beta\right] \tag{2.4}$$

Введем дифференциальный оператор $L\mathbf{u}$, который определяется как

$$L\mathbf{u}(\mathbf{r}_x,\ z) = \frac{1}{2h}\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{T}^\alpha) + \frac{3z}{2h^3}\{[\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{M}^\alpha)\times\mathbf{m}_x] + \sqrt{a}[[\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{T}^\alpha]\times\mathbf{m}_x]\} \tag{2.5}$$

а также формулами (2.1), (2.3) и является приближением оператора Ламе в рамках классической теории типа Тимошенко. Тогда для вектора, построенного с помощью вектора перемещений Кельвина $\mathbf{U}_{(i)}$ (U_i^p – тензор перемещений Кельвина [5])

$$\mathbf{W}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\ \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{U}_{(i)}^{(0)}(\mathbf{r}_x,\ \mathbf{\Lambda}) + \frac{z}{h}\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_x,\ \mathbf{\Lambda}) \tag{2.6}$$

$$\mathbf{U}_{(i)}^{(k)}(\mathbf{r}_x,\ \mathbf{\Lambda}) = \frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h} P_k\left(\frac{z}{h}\right)\mathbf{U}_{(i)}(\mathbf{R},\ \mathbf{\Lambda})dz,\quad k=0,\ 1$$

$$\mathbf{U}_{(i)} = U_i^p\mathbf{e}_p$$

имеет место соотношение

$$LW_{(i)} \equiv \frac{1}{2h}\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{T}^{\alpha}_{(i)}) + \frac{3z}{2h^3}\{[\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{M}^{\alpha}_{(i)})\times\mathbf{m}_x + \sqrt{a}[[\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{T}^{\alpha}_{(i)}]\times\mathbf{m}_x]\} =$$

$$= -\sqrt{a}\left\{\frac{1}{2h}[\mathbf{T}^{(+)3}_{(i)} - \mathbf{T}^{(-)3}_{(i)} + \mathbf{e}_i\delta(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta)] + \right.$$

$$\left. + \frac{3z}{2h^3}\{[(h[\mathbf{m}_x\times(\mathbf{T}^{(+)3}_{(i)} + \mathbf{T}^{(-)3}_{(i)})] + \xi\delta(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta)[\mathbf{m}_x\times\mathbf{e}_i])\times\mathbf{m}_x]\}\right\} -$$

$$-\left\{\frac{1}{2h}\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)}) + \frac{3z}{2h^3}[(\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{P}^{\alpha}_{M(i)}) + \sqrt{a}[\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)}])\times\mathbf{m}_x]\right\},\quad \mathbf{r}_\eta\in S,\ |\xi|<h \qquad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}^{\alpha}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\ \Lambda) = 2h[\lambda'(\mathbf{r}^\beta,\ D_{\beta,x}\mathbf{U}^{(0)}_{(i)})\mathbf{r}^\alpha + \mu(\mathbf{r}^\alpha,\ D_{k,x}\mathbf{U}^{(0)}_{(i)})\mathbf{r}^k + \\
&+\mu a^{\alpha\beta}D_{\beta,x}\mathbf{U}^{(0)}_{(i)}] + 2h\mu(k'-1)[(\mathbf{m}_x,\ D_{\beta,x}\mathbf{U}^{(0)}_{(i)})a^{\alpha\beta} + \\
&+(\mathbf{r}^\alpha,\ D_{3,x}\mathbf{U}^{(0)}_{(i)})]\mathbf{m}_x,\quad \mathbf{M}^{\alpha}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\ \Lambda) = \frac{2h^2}{3}[\mathbf{m}_x\times\mathbf{t}^{\alpha}_{(i)}] \\
&\mathbf{t}^{\alpha}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\ \Lambda) = \lambda'(\mathbf{r}^\beta,\ D_{\beta,x}\mathbf{U}^{(1)}_{(i)})\mathbf{r}^\alpha + \mu(\mathbf{r}^\alpha,\ D_{k,x}\mathbf{U}^{(1)}_{(i)})\mathbf{r}^k + \mu a^{\alpha\beta}D_{\beta,x}\mathbf{U}^{(1)}_{(i)} \\
&\mathbf{T}^{(\pm)3}_{(i)} = \mathbf{T}^{3}_{(i)}(\mathbf{r}_x \pm h\mathbf{m}(\mathbf{r}_x)) \\
&\mathbf{T}^{3}_{(i)} = \lambda(\mathbf{R}^k,\ \partial_{k,x}\mathbf{U}_{(i)})\mathbf{m} + \mu(\mathbf{m},\ \partial_{k,x}\mathbf{U}_{(i)})\mathbf{R}^k + \mu\partial_{3,x}\mathbf{U}_{(i)} \\
&\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)} = \frac{\lambda 2h}{\lambda+2\mu}(\mathbf{T}^{(0)3}_{(i)},\ \mathbf{m}_x)\mathbf{r}^\alpha - 2h\mu(k'-1)[(\mathbf{m}_x,\ D_{\beta,x}\mathbf{U}^{(0)}_{(i)})a^{\alpha\beta} + (\mathbf{r}^\alpha,\ D_{3,x}\mathbf{U}^{(0)}_{(i)})]\mathbf{m}_x \\
&\mathbf{P}^{\alpha}_{M(i)} = \frac{2h^2}{3}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\mathbf{T}^{(1)3}_{(i)},\ \mathbf{m}_x)[\mathbf{m}_x\times\mathbf{r}^\alpha] \\
&(\mathbf{T}^{(k)3}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\ \Lambda),\ \mathbf{m}_x) = \lambda(\mathbf{r}^\beta,\ D_{\beta,x}\mathbf{U}^{(k)}_{(i)}) + (\lambda+2\mu)(\mathbf{m}_x,\ D_{3,x}\mathbf{U}^{(k)}_{(i)}),\quad k=0,\ 1
\end{aligned} \qquad (2.8)$$

$\delta(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta)$ – дельта-функция Дирака, $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор декартовой системы координат, определяющий направление действия сосредоточенной силы в бесконечной упругой среде и приложенный в точке с радиус-вектором $\Lambda = \mathbf{r}_\eta + \xi\mathbf{m}_\eta$, $\mathbf{r}_\eta \equiv \mathbf{r}(\eta^1,\ \eta^2)$ – радиус-вектор точки срединной поверхности оболочки с гауссовыми координатами (η^1, η^2), ξ – нормальная координата, отсчитываемая вдоль нормали $\mathbf{m}_\eta \equiv \mathbf{m}(\mathbf{r}_\eta)$; заключением индекса i в круглые скобки подчеркивается, что вектор Кельвина $\mathbf{U}_{(i)}$ соответствует единичной силе $\mathbf{e}_i$ в декартовой системе координат, а уравнение для этого вектора записывается в криволинейной системе координат.

Предположим, что вектор (2.1) – решение системы (1.4), (1.5). Тогда интеграл

$$I = \int\limits_{-h}^{h} dz \iint\limits_{S} [(L\mathbf{u},\ \mathbf{W}_{(i)}) - (L\mathbf{W}_{(i)},\ \mathbf{u})]dx^1dx^2 =$$

$$= \iint\limits_{S} \left\{[(\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{T}^\alpha),\ \mathbf{U}^{(0)}_{(i)}) - (\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{T}^\alpha_{(i)}),\ \mathbf{w}^{(0)})] + \right.$$

$$+\frac{1}{h}[([\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{M}^\alpha)\times\mathbf{m}_x],\ \mathbf{U}^{(1)}_{(i)}) - ([\partial_{a,x}(\sqrt{a}\mathbf{M}^\alpha_{(i)})\times\mathbf{m}_x],\ \mathbf{w}^{(1)})] +$$

$$\left. +\sqrt{a}\frac{1}{h}[(\mathbf{U}^{(1)}_{(i)},\ [[\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{T}^\alpha]\times\mathbf{m}_x]) - (\mathbf{w}^{(1)},\ [[\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{T}^\alpha_{(i)}]\times\mathbf{m}_x])]\right\}dx^1dx^2$$

который в соответствии с (1.4), (1.5), (2.1) и (2.5)–(2.7) равен

$$I=\iint\limits_S \sqrt{a}\Big\{-(\mathbf{X},\ \mathbf{U}^{(0)}_{(i)})-(\mathbf{U}^{(1)}_{(i)},\ [\mathbf{Y}\times\mathbf{m}_x])\frac{1}{h}+(\mathbf{T}^{(+)3}_{(i)}-\mathbf{T}^{(-)3}_{(i)},\ \mathbf{w}^{(0)})+$$

$$+(\mathbf{w}^{(0)},\ \mathbf{e}_i)\delta(\mathbf{r}_x-\mathbf{r}_\eta)+(\mathbf{T}^{(+)3}_{(i)}+\mathbf{T}^{(-)3}_{(i)},\ \mathbf{w}^{(1)})+\frac{\xi}{h}(\mathbf{w}^{(1)},\ \mathbf{e}_i)\delta(\mathbf{r}_x-\mathbf{r}_\eta)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a}}(\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)}),\ \mathbf{w}^{(0)})+$$

$$+\frac{1}{h}\left\{\left(\left[\frac{1}{\sqrt{a}}(\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{P}^{\alpha}_{M(i)})\times\mathbf{m}_x\right],\ \mathbf{w}^{(1)}\right)+([[\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)}]\times\mathbf{m}_x],\ \mathbf{w}^{(1)})\right\}\Big\}dx^1dx^2 \qquad (2.9)$$

преобразуем к виду (n^{Σ}_{α} – компоненты единичной внешней нормали к поверхности Σ, ds_t – элемент дуги контура Γ)

$$I=\int\limits_{\Gamma}\Big\{(\mathbf{T}^{\alpha}n^{\Sigma}_{\alpha},\ \mathbf{U}^{(0)}_{(i)})-(\mathbf{T}^{\alpha}_{(i)}n^{\Sigma}_{\alpha},\ \mathbf{w}^{(0)})+$$

$$+\frac{1}{h}[(\mathbf{M}^{\alpha}n^{\Sigma}_{\alpha},\ [\mathbf{m}_x\times\mathbf{U}^{(1)}_{(i)}])-(\mathbf{M}^{\alpha}_{(i)}n^{\Sigma}_{\alpha},\ [\mathbf{m}_x\times\mathbf{w}^{(1)}])]\Big\}ds_t-$$

$$-\iint\limits_S \sqrt{a}\Big[(\mathbf{T}^{\alpha},\ \partial_{\alpha,x}\mathbf{U}^{(0)}_{(i)})-(\mathbf{T}^{\alpha}_{(i)},\ \partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(0)})+$$

$$+\frac{1}{h}[(\mathbf{M}^{\alpha},\ \partial_{\alpha,x}[\mathbf{m}_x\times\mathbf{U}^{(1)}_{(i)}])-(\mathbf{M}^{\alpha}_{(i)},\ \partial_{\alpha,x}[\mathbf{m}_x\times\mathbf{w}^{(1)}])]+$$

$$+(\mathbf{T}^{\alpha},\ \mathbf{m}_x)\left(\frac{1}{h}\mathbf{U}^{(1)}_{(i)},\ \mathbf{r}_\alpha\right)-(\mathbf{T}^{\alpha}_{(i)},\ \mathbf{m}_x)\left(\frac{1}{h}\mathbf{w}^{(1)},\ \mathbf{r}_\alpha\right)\Big]dx^1dx^2 \qquad (2.10)$$

Используя соотношения

$$(\mathbf{T}^{\alpha},\ \partial_{\alpha,x}\mathbf{U}^{(0)}_{(i)})-(\mathbf{T}^{\alpha}_{(i)},\ \partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(0)})-(\mathbf{T}^{\alpha}_{(i)},\ \mathbf{m}_x)\left(\frac{1}{h}\mathbf{w}^{(1)},\ \mathbf{r}_\alpha\right)+$$

$$+(\mathbf{T}^{\alpha},\ \mathbf{m}_x)\left(\frac{1}{h}\mathbf{U}^{(1)}_{(i)},\ \mathbf{r}_\alpha\right)=-\frac{1}{h}\left(\mathbf{T}^3,\ \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{(+)}_{(i)}-\mathbf{U}^{(-)}_{(i)})-\mathbf{U}^{(1)}_{(i)}\right)$$

$$\frac{1}{h}\Big[\Big(\mathbf{M}^{\alpha},\partial_{\alpha,x}\big[\mathbf{m}_x\times\mathbf{U}^{(1)}_{(i)}\big]\Big)-\Big(\mathbf{M}^{\alpha}_{(i)},\partial_{\alpha,x}\big[\mathbf{m}_x\times\mathbf{w}^{(1)}\big]\Big)\Big]=-\Big(\mathbf{m}_x,\mathbf{U}^{(1)}_{(i)}\Big)\Big(\partial_{\alpha,x}\mathbf{m}_x,\frac{2h}{3}\mathbf{t}^{\alpha}\Big)$$

$$\iint\limits_S\Big[\Big(\partial_{\alpha,x}\big(\sqrt{a}\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)}\big),\mathbf{w}^{(0)}\Big)+\frac{1}{h}\Big([\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}\mathbf{P}^{\alpha}_{M(i)}\big)\times\mathbf{m}_x],\mathbf{w}^{(1)}\Big)\Big]\ dx^1dx^2=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}[(\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)}n^{\Sigma}_{\alpha},\mathbf{w}^{(0)})+\frac{1}{h}(\mathbf{P}^{\alpha}_{M(i)}n^{\Sigma}_{\alpha},[\mathbf{m}_x\times\mathbf{w}^{(1)}])]ds_t-$$

$$-\iint\limits_S\sqrt{a}[(\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)},\partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(0)})+\frac{1}{h}(\mathbf{P}^{\alpha}_{M(i)},\partial_{\alpha,x}[\mathbf{m}_x\times\mathbf{w}^{(1)}])]dx^1dx^2$$

$$\frac{1}{h}(\mathbf{P}^{\alpha}_{M(i)},\partial_{\alpha,x}[\mathbf{m}_x\times\mathbf{w}^{(1)}])=\frac{2h\lambda}{3(\lambda+2\mu)}(\mathbf{T}^{(1)3}_{(i)},\mathbf{m}_x)(\mathbf{r}^{\alpha},\partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(1)})$$

$$(\mathbf{w}^{(1)},[[\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)}]\times\mathbf{m}_x])=-(\mathbf{w}^{(1)},\mathbf{r}_\alpha)(\mathbf{m}_x,\mathbf{P}^{\alpha}_{T(i)})$$

из (2.9), (2.10) получим интегральное представление вектора перемещений элементов оболочки $\mathbf{u}(\mathbf{r}_x, z) = \mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_x) + \frac{z}{h}\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x)$ в виде

$$(\mathbf{u}(\mathbf{r}_\eta, \xi), \mathbf{e}_i) = \int_\Gamma \{(\mathbf{T}_n^\Sigma(\mathbf{r}_{x,\Gamma}), \mathbf{U}_{(i)}^{(0)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma}, \Lambda)) -$$

$$-(\mathbf{T}_{n(i)}^\Sigma(\mathbf{r}_{x,\Gamma}, \Lambda), \mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma})) + (\mathbf{M}_n^\Sigma(\mathbf{r}_{x,\Gamma}), [\mathbf{m}_x \times \frac{1}{h}\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma}, \Lambda)]) -$$

$$-(\mathbf{M}_{n(i)}^\Sigma(\mathbf{r}_{x,\Gamma}, \Lambda), [\mathbf{m}_x \times \frac{1}{h}\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma})])\} ds_t +$$

$$+\iint_S \{(\mathbf{X}(\mathbf{r}_x), \mathbf{U}_{(i)}^{(0)}(\mathbf{r}_x, \Lambda)) + ([\mathbf{Y}(\mathbf{r}_x) \times \mathbf{m}_x], \frac{1}{h}\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_x, \Lambda)) -$$

$$-(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3} - \mathbf{T}_{(i)}^{(-)3}, \mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_x)) - (\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3} + \mathbf{T}_{(i)}^{(-)3}, \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x)) +$$

$$+\frac{1}{h}(\mathbf{T}^3(\mathbf{r}_x), \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{(i)}^{(+)} - \mathbf{U}_{(i)}^{(-)}) - \mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_x, \Lambda)) +$$

$$+(\mathbf{m}_x, \mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_x, \Lambda))(\partial_{\alpha,x}\mathbf{m}_x, \frac{2h}{3}\mathbf{t}^\alpha(\mathbf{r}_x)) + (\mathbf{P}_{T(i)}^\alpha(\mathbf{r}_x, \Lambda), \partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_x)) +$$

$$+\frac{2h\lambda}{3(\lambda+2\mu)}(\mathbf{T}_{(i)}^{(1)3}(\mathbf{r}_x, \Lambda), \mathbf{m}_x)(\mathbf{r}^\alpha, \partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x)) +$$

$$+(\frac{1}{h}\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x), \mathbf{r}_\alpha)(\mathbf{m}_x, \mathbf{P}_{T(i)}^\alpha(\mathbf{r}_x, \Lambda))\} dS_{r_x}, \mathbf{r}_\eta \in S, \quad |\xi| < h \tag{2.11}$$

Здесь

$$\mathbf{T}_n^\Sigma = \mathbf{T}^\alpha n_\alpha^\Sigma, \quad \mathbf{M}_n^\Sigma = \mathbf{M}^\alpha n_\alpha^\Sigma, \quad \mathbf{T}_{n(i)}^\Sigma = 2h\mathbf{P}_{(i)}^{(0)\Sigma} = (\mathbf{T}_{(i)}^\alpha + \mathbf{P}_{T(i)}^\alpha) n_\alpha^\Sigma$$

$$\mathbf{M}_{n(i)}^\Sigma = \frac{2h^2}{3}[\mathbf{m}_x \times \mathbf{P}_{(i)}^{(1)\Sigma}] = (\mathbf{M}_{(i)}^\alpha + \mathbf{P}_{M(i)}^\alpha) n_\alpha^\Sigma$$

$\mathbf{P}_{(i)}^{(k)\Sigma}$ – k-й момент вектора напряжений Кельвина [5] на боковой поверхности оболочки.

3. Предположим, что для любой внутренней точки оболочки с радиус-вектором Λ векторы $\mathbf{w}^{(0)}$, $\mathbf{w}^{(1)}$ удовлетворяют векторному соотношению (2.11). Определим, с какой погрешностью вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r}_\eta, \xi)$ удовлетворяет системе уравнений (1.4), (1.5). Для этого введем операторы

$$L_\eta^{(0)}\mathbf{v}(\Lambda) \equiv \partial_{\alpha,\eta}(\sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}(\mathbf{T}^\alpha(\mathbf{r}_\eta) + \mathbf{P}_T^\alpha(\mathbf{r}_\eta))) + \sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}(\mathbf{P}^{(+)3}(\mathbf{v}) - \mathbf{P}^{(-)3}(\mathbf{v})) \tag{3.1}$$

$$L_\eta^{(1)}\mathbf{v}(\Lambda) \equiv \partial_{\alpha,\eta}(\sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}(\mathbf{M}^\alpha(\mathbf{r}_\eta) + \mathbf{P}_M^\alpha(\mathbf{r}_\eta))) +$$

$$+\sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}([\mathbf{r}_\alpha \times (\mathbf{T}^\alpha(\mathbf{r}_\eta) + \mathbf{P}_T^\alpha(\mathbf{r}_\eta))] + h[\mathbf{m}_\eta \times (\mathbf{P}^{(+)3}(\mathbf{v}) + \mathbf{P}^{(-)3}(\mathbf{v}))]$$

$$\mathbf{P}_T^\alpha = \frac{2h\lambda}{\lambda+2\mu}(\mathbf{T}^{(0)3}(\mathbf{v}), \mathbf{m}_\eta)\mathbf{r}^\alpha - 2h\mu(k'-1)[(\mathbf{m}_\eta, D_{\beta,\eta}\mathbf{v}^{(0)})a^{\alpha\beta} + (\mathbf{r}^\alpha, D_{3,\eta}\mathbf{v}^{(0)})]\mathbf{m}_\eta$$

$$\mathbf{P}_M^\alpha = \frac{2h^2}{3}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\mathbf{T}^{(1)3}(\mathbf{v}), \mathbf{m}_\eta)[\mathbf{m}_\eta \times \mathbf{r}^\alpha]$$

$$(\mathbf{T}^{(k)3}(\mathbf{v}), \mathbf{m}_\eta) = \lambda(\mathbf{r}^\beta, D_{\beta,\eta}\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta)) + (\lambda+2\mu)(\mathbf{m}_\eta, D_{3,\eta}\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta))$$

$$\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta) = \frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h} P_k(\frac{\xi}{h})\mathbf{v}(\Lambda)d\xi, \quad k = 0,1$$

$$\mathbf{P}^3(\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{r}^k, \partial_{k,\eta}\mathbf{v})\mathbf{m}_\eta + \mu(\mathbf{m}_\eta, \partial_{k,\eta}\mathbf{v})\mathbf{r}^k + \mu\partial_{3,\eta}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{P}^{(\pm)3} = \mathbf{P}^3(\mathbf{r}_h \pm h\mathbf{m}_\eta)$$

Для векторов Кельвина, их моментов и производных справедливы равенства

$$L_\eta^{(0)}\mathbf{U}_{(i)}^{(0)}(\mathbf{r}_x, \Lambda) = \mathbf{l}_{0(i)}(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\eta), \quad L_\eta^{(0)}\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_x, \Lambda) = L_\eta^{(1)}\mathbf{U}_{(i)}^{(0)}(\mathbf{r}_x, \Lambda) = 0$$

$$L_\eta^{(1)}\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_x, \Lambda) = \mathbf{l}_{1(i)}(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\eta), \quad L_\eta^{(k)}\mathbf{U}_{(i)}^{(m)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma}, \Lambda) = 0$$

$$L_\eta^{(k)}\mathbf{P}_{(i)}^{(m)\Sigma}(\mathbf{r}_{x,\Gamma}, \Lambda) = L_\eta^{(k)}\mathbf{U}_{(i)}^{(\pm)} = L_\eta^{(k)}\mathbf{T}_{(i)}^{(\pm)3} = 0, \quad m, k = 0,1$$

$$L_\eta^{(0)}\mathbf{P}_{T(i)}^{\alpha}(\mathbf{r}_x, \Lambda) = \frac{\lambda 2h}{\lambda + 2\mu}(\mathbf{T}_{\delta(i)}^{(0)3}, \mathbf{m}_x)\mathbf{r}^\alpha - 2h\mu(k'-1)(\mathbf{m}_x, D_{\beta,x}\mathbf{l}_{0(i)}(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\eta))a^{\alpha\beta}\mathbf{m}_x$$

$$L_\eta^{(1)}\mathbf{P}_{T(i)}^{\alpha}(\mathbf{r}_x, \Lambda) = 0$$

$$L_\eta^{(0)}\mathbf{P}_{M(i)}^{\alpha}(\mathbf{r}_x, \Lambda) = -2\lambda(\mathbf{m}_x, \mathbf{l}_{0(i)}(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\eta))[\mathbf{m}_x \times \mathbf{r}^\alpha]$$

$$L_\eta^{(1)}\mathbf{P}_{M(i)}^{\alpha}(\mathbf{r}_x, \Lambda) = \frac{2h^2}{3}\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\mathbf{T}_{\delta(i)}^{(1)3}, \mathbf{m}_x)[\mathbf{m}_x \times \mathbf{r}^\alpha]$$

$$(\mathbf{T}_{\delta(i)}^{(k)3}, \mathbf{m}_x) = \lambda(\mathbf{r}^\beta, D_{\beta,x}\mathbf{l}_{k(i)}(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\eta)), \quad k = 0,1$$

$$\mathbf{l}_{0(i)}(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\eta) = -\sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}\delta(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta)\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{l}_{1(i)}(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_\eta) = \sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}\delta(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta)[\mathbf{m}_\eta \times \mathbf{e}_i]h$$

При учете приведенных равенств и формул (2.4), (3.1) после действия операторов $L_\eta^{(k)}\mathbf{u}(\Lambda)$ на правую и левую части соотношения (2.11) получим систему векторных равенств

$$\begin{aligned} &\partial_{\alpha,\eta}(\sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}\mathbf{T}^\alpha(\mathbf{r}_\eta)) + \sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}(\mathbf{X}(\mathbf{r}_\eta) + 2\mu h b_\beta^\alpha \gamma_\alpha(\mathbf{r}_\eta)\mathbf{r}^\beta) = 0 \\ &\partial_{\alpha,\eta}(\sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}\mathbf{M}^\alpha(\mathbf{r}_\eta)) + \sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}([\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{T}^\alpha(\mathbf{r}_\eta)] + \mathbf{Y}(\mathbf{r}_\eta)) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r}_\eta, \xi)$ удовлетворяет уравнению (1.4) с погрешностью $2\sqrt{a(\mathbf{r}_\eta)}\mu h b_\beta^\alpha \gamma_\alpha(\mathbf{r}_\eta)\mathbf{r}^\beta$. В рамках приближений тонкой или пологой оболочек этим слагаемым в уравнениях равновесия можно пренебречь.

С помощью интегрального представления (2.11) для внутренних точек оболочки векторы усилий и моментов можно вычислить по формулам

$$\mathbf{T}^\alpha(\mathbf{r}_\eta) = l_\eta^T\mathbf{u}(\mathbf{r}_\eta, \xi), \quad \mathbf{M}^\alpha(\mathbf{r}_\eta) = l_\eta^M\mathbf{u}(\mathbf{r}_\eta, \xi)$$

$$l_\eta^T \equiv \int_{-h}^{h}\{\tilde{l}_\eta + 2h\mu(k'-1)[(\mathbf{m}_\eta, \partial_{\beta,\eta})a^{\alpha\beta} + (\mathbf{r}^\alpha, \partial_{3,\eta})]\mathbf{m}_\eta\}d\xi$$

$$l_\eta^M \equiv \int_{-h}^{h}\{[\mathbf{m}_\eta\xi \times \tilde{l}_\eta]\}d\xi$$

$$\tilde{l}_\eta = \lambda'(\mathbf{r}^\beta, \partial_{\beta,\eta})\mathbf{r}^\alpha + \mu(\mathbf{r}^\alpha, \partial_{k,\eta})\mathbf{r}^k + \mu a^{\alpha\beta}\partial_{\beta,\eta}$$

$$l_\eta^{T(M)}\mathbf{u}(\mathbf{r}_\eta, \xi) = \mathbf{e}_i\left\{\int_\Gamma\{(\mathbf{T}_n^\Sigma(\mathbf{r}_{x,\Gamma}), l_\eta^{T(M)}\mathbf{U}_{(i)}^{(0)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma}, \Lambda)) - \right.$$

$$-(l_\eta^{T(M)}\mathbf{T}_{n(i)}^\Sigma(\mathbf{r}_{x,\Gamma}, \Lambda), \mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma})) + (\mathbf{M}_n^\Sigma(\mathbf{r}_{x,\Gamma}), [\mathbf{m}_x \times \frac{1}{h}l_\eta^{T(M)}\mathbf{U}_i^{(1)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma}, \Lambda)]) -$$

$$-(l_\eta^{T(M)}\mathbf{M}_{n(i)}^{\Sigma}(\mathbf{r}_{x,\Gamma},\mathbf{\Lambda}),\ [\mathbf{m}_x\times\frac{1}{h}\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma})])\Big\}ds_t+$$

$$+\iint_S\{(\mathbf{X}(\mathbf{r}_x),\ l_\eta^{T(M)}\mathbf{U}_{(i)}^{(0)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda}))+([\mathbf{Y}(\mathbf{r}_x)\times\mathbf{m}_x],\ \frac{1}{h}l_\eta^{T(M)}\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda}))-$$

$$-(l_\eta^{T(M)}(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3}-\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3}),\mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_x))-(l_\eta^{T(M)}(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3}+\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3}),\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x))+$$

$$+\frac{1}{h}(\mathbf{T}^3(\mathbf{r}_x),l_\eta^{T(M)}\frac{1}{2}(\mathbf{U}_{(i)}^{(+)}-\mathbf{U}_{(i)}^{(-)})-l_\eta^{T(M)}\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda}))+$$

$$+(\mathbf{m}_x,l_\eta^{T(M)}\mathbf{U}_{(i)}^{(1)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda}))(\partial_{\alpha,x}\mathbf{m}_x,\frac{2h}{3}\mathbf{t}^{\alpha}(\mathbf{r}_x))+$$

$$+(l_\eta^{T(M)}\mathbf{P}_{T(i)}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda}),\partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_x))+\frac{2h\lambda}{3(\lambda+2\mu)}(l_\eta^{T(M)}\mathbf{T}_{(i)}^{(1)3}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda}),\mathbf{m}_x)(\mathbf{r}^{\alpha},\partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x))+$$

$$+(\frac{1}{h}\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x),\mathbf{r}_\alpha)(\mathbf{m}_x,l_\eta^{T(M)}\mathbf{P}_{T(i)}^{\alpha}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda}))\}dS_{r_x}\},\quad \mathbf{r}_\eta\in S,\ |\xi|<h$$

4. На основе интегрального представления (2.11) можно построить граничное интегральное уравнение для определения неизвестных векторов как на контуре, так и на срединной поверхности оболочки. При построении этого уравнения необходимо воспользоваться предельными свойствами правой части равенства (2.11) на боковой поверхности Σ.

Сумму интегралов в (2.11)

$$I_{(i)}(\mathbf{\Lambda})=\int_\Gamma[-(\mathbf{T}_{n(i)}^{\Sigma}(\mathbf{r}_{x,\Gamma},\mathbf{\Lambda}),\mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma}))-(\mathbf{M}_{n(i)}^{\Sigma}(\mathbf{r}_{x,\Gamma},\mathbf{\Lambda}),\ [\mathbf{m}_x\times\frac{1}{h}\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma})])]ds_t+$$

$$+\iint_S[-(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3}-\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3},\mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{r}_x))-(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3}+\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3},\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{r}_x))]dS_{r_x}$$

с учетом (2.1) преобразуем к виду

$$I_{(i)}(\mathbf{\Lambda})=-\iint_{(S^+\cup S^-\cup\Sigma)}(\mathbf{P}_{n(i)}(\mathbf{R},\mathbf{\Lambda}),\mathbf{u}(\mathbf{r}_x,z)-\mathbf{u}(\mathbf{r}_\eta,\xi))dS-\iint_{(S^+\cup S^-\cup\Sigma)}(\mathbf{P}_{n(i)}(\mathbf{R},\mathbf{\Lambda}),\mathbf{u}(\mathbf{r}_\eta,\xi))dS \quad (4.1)$$

где $\mathbf{P}_{n(i)}$ – вектор напряжений Кельвина на поверхности оболочки.

Предположим, что вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r}_x,z)$ на этой поверхности удовлетворяет условию Гёльдера. Тогда первый интеграл правой части (4.1) при переходе через точку с радиус-вектором $\mathbf{\Lambda}_p=\mathbf{r}_\eta^p+\xi^p\mathbf{m}_\eta(\mathbf{r}_\eta^p)$ боковой поверхности Σ не терпит разрыв, и интеграл $I_{(i)}$ обладает следующими предельными свойствами [5]:

$$I_{(i)}^{\pm}(\mathbf{\Lambda}_p)=I_{(i)}^{\Sigma}(\mathbf{\Lambda}_p)\pm\frac{1}{2}(\mathbf{u}(\mathbf{r}_\eta^p,\xi^p),\mathbf{e}_i)$$

где $I_{(i)}^{\pm}(\mathbf{\Lambda}_p)$ предельные значения интеграла $I_{(i)}$ в точке с радиус-вектором $\mathbf{\Lambda}_p=\mathbf{r}_\eta^p+\xi^p\mathbf{m}_\eta(\mathbf{r}_\eta^p)$ соответственно изнутри (индекс плюс) и извне (индекс минус) оболочки; $I_{(i)}^{\Sigma}(\mathbf{\Lambda}_p)$ – прямое (сингулярное) значение этого интеграла на поверхности Σ. Можно показать, что остальные интегралы в правой части (2.11) при переходе через поверхность Σ не терпят разрыв.

Для выделения из (2.11) интегральных уравнений для $\mathbf{w}^{(0)}$ и $\mathbf{w}^{(1)}$ можно воспользоваться разложением этого соотношения по полиномам Лежандра $P_k(\frac{\xi}{h})$ $(k=0,1)$ и предельными свойствами интеграла $I_{(i)}$ на поверхности Σ.

Построенные таким образом интегральные уравнения для $\mathbf{w}^{(0)}$ и $\mathbf{w}^{(1)}$ являются основой при построении метода граничных элементов для определения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки. Выполнив разбиение срединной поверхности и контура оболочки на изопараметрические [5] граничные элементы с кубической интерполяцией геометрических и механических переменных, интегральные уравнения для $\mathbf{w}^{(0)}$ и $\mathbf{w}^{(1)}$ можно свести к алгебраической системе уравнений. В качестве неизвестных этой системы будут выступать узловые векторы перемещений как на контуре, так и на срединной поверхности оболочки или узловые векторы усилий (моментов) на контуре оболочки. После определения узловых неизвестных представляется возможным вычислить усилия и моменты во внутренних точках оболочки по приведенным выше формулам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грибов А.П.* Построение итерационных алгоритмов МГЭ // Тез. докл. 27-й научн.-техн. конф. Ульяновского политехн. ин-та. Ч. 2. Ульяновск, 1993. 2 с.
2. *Грибов А.П.* Итерационный алгоритм МГЭ решения задачи изгиба пологой оболочки // Тез. докл. 28-й научн.-техн. конф. Ульяновского политехн. ин-та. Ч. 2. Ульяновск, 1994. 2 с.
3. *Крамин Т.В.* Расчет тонкостенных пространственных конструкций сложной формы методом граничных элементов: Дис. на соискание канд. физ.-мат. наук. Казань, 1995. 207 с.
4. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
5. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.

Казань

Поступила в редакцию
27.VI.1996