

УДК 539.3

© 1997 г. А.Г. Колпаков, И.Г. Шерemet

**АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕМБРАНЫ И СТРУНЫ**

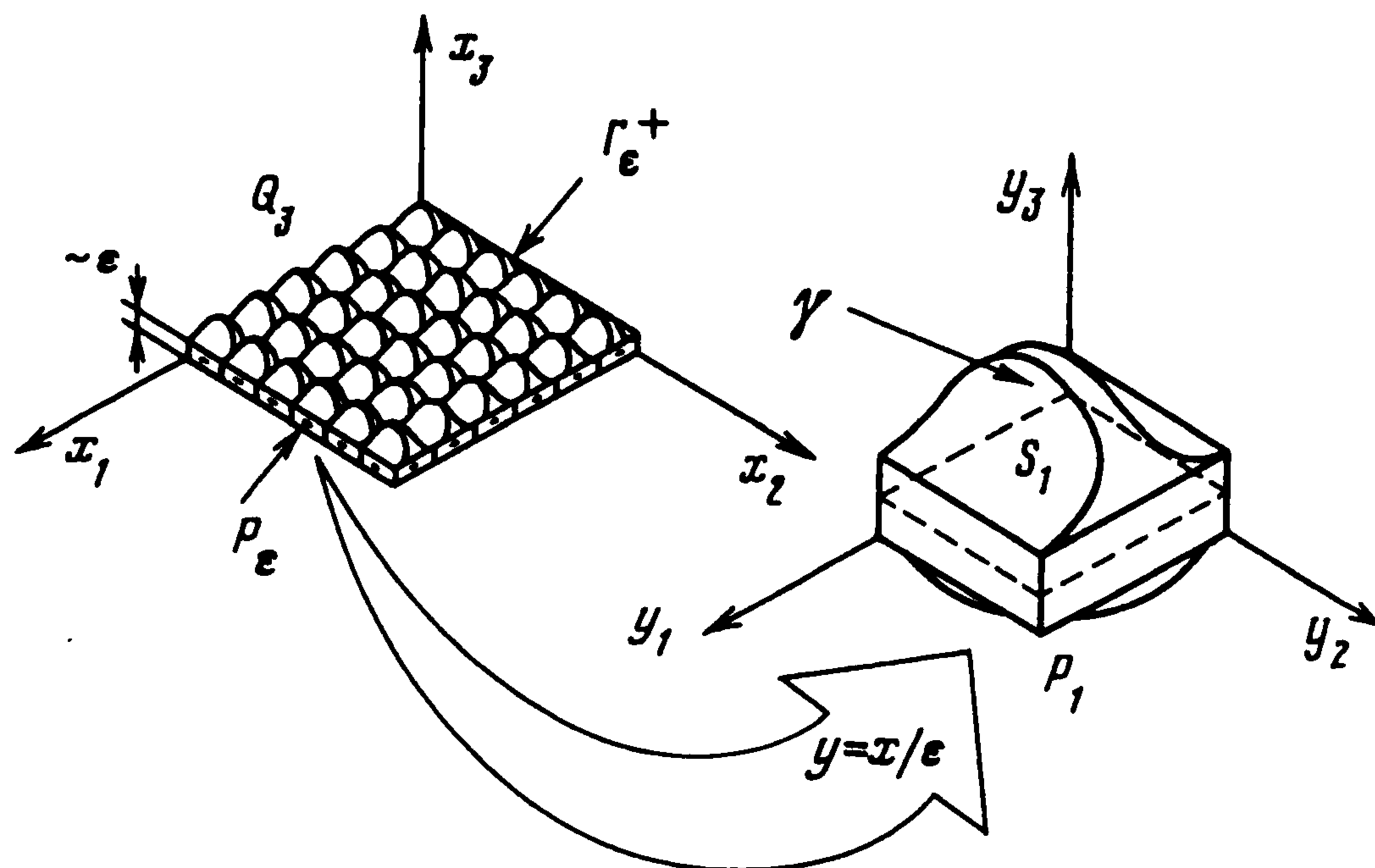
Осуществляется переход от трехмерной задачи теории упругости напряженного тела в области малой толщины (диаметра) к задаче теории мембран (струн). Полученные усредненные задачи позволяют описывать мембраны (струны), размер неоднородностей в которых сравним с их толщиной. Анализ задач проводится на основе асимптотического метода усреднения.

Был изложен [1, 2] способ перехода от трехмерной задачи теории упругости в тонкой области к задаче теории пластинок. Произведен переход [3, 4] от трехмерной задачи теории упругости в области малого диаметра к задаче теории балок. При исследовании использовался асимптотический метод [5, 6], достоинством которого является его применимость как к классическим однородным пластинкам и балкам, так и к неоднородным структурам периодического строения, имеющим размеры неоднородностей, сравнимые с толщиной (ранее рассматривались неоднородные пластинки и балки с характерными размерами неоднородностей, значительно превышающими толщину [7,8]). Было начато [9–14] применение асимптотического метода к напряженным структурам: трехмерным [9–12], малой толщины – пластинам [13], малого диаметра – балкам [14,15]. В частности, были получены осредненные уравнения устойчивости неоднородных пластинок и балок. К задачам указанного типа непосредственно примыкают задачи о неоднородных мембранах и струнах, в которых как малая толщина, так и начальные напряжения играют определяющую роль. Вывод уравнений неоднородных мембран или струн из трехмерных уравнений теории упругости, насколько известно авторам, ранее не рассматривался (изучались мембраны с характерным размером неоднородностей, значительно превышающим толщину). В данной статье задача рассматривается на уровне построения формального асимптотического разложения [5]. Получены предельные задачи, определяющие уравнения неоднородных мембран и струн.

При определенном сходстве применявшихся ранее [2, 9–16] и в данной статье методов, получаемые результаты не вытекают из результатов указанных работ. Это обусловлено тем, что "механика" задачи определяется в основном конкретным видом нескольких первых членов асимптотического разложения [6], и в меньшей степени – общим видом ряда. Проведенное рассмотрение объясняет также причину "незадействованности" ряда уравнений равновесия из [2, 9–16]; они соответствуют не теории пластин или балок (в их рамках эти уравнения "не замечают"), а теории мембран и струн.

В связи с вопросами практического применения неоднородных, в частности, армированных мембран см. [17].

**1. Мембрана.** Рассмотрим область  $Q_\epsilon$ , получающуюся периодическим повторением некоторой ячейки периодичности (ЯП)  $P_\epsilon$  в плоскости  $x_1x_2$  (фиг. 1). Характерный размер ЯП (совпадающий с характерной толщиной пластинки) – малая величина  $\epsilon$ , что формализуется в виде  $\epsilon \rightarrow 0$ . При  $\epsilon \rightarrow 0$  область  $Q_\epsilon$  стягивается к двумерной области  $S$  в плоскости  $x_1x_2$ . Напряжения в материале, занимающем область  $Q_\epsilon$ , обозначим из  $\sigma_{ij}^*$ , определяются из решения задачи теории упругости. Будем считать, что упругие постоянные материалы мембраны  $a_{ijkl}$  и начальные напряжения  $\sigma_{ij}^*$  одного порядка –  $\epsilon^{-1}$ . Принимаем порядки совпадающими (в классической теории жесткостями пре-



Фиг. 1

небрегают по сравнению с напряжениями) в связи с тем, что невозможно создать начальные напряжения  $\sigma_{ij}^*$  большего порядка, чем  $a_{ijkl}$  при ограниченных деформациях в плоскости пластинки. Тогда [18] уравнения равновесия для тела с начальными напряжениями имеют вид

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = \varepsilon^{-1} f_i \text{ в } Q_\varepsilon \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij} n_j = g_i^\pm \text{ на } \Gamma_\varepsilon^\pm; \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \Gamma_0$$

где  $Q_\varepsilon$  – область, занятая пластинкой,  $\Gamma_\varepsilon^\pm, \Gamma_0$  – ее поверхности (фиг. 1).

Связь между текущими напряжениями  $\sigma_{ij}$ , перемещениями  $\mathbf{u}^\varepsilon$  и начальными напряжениями можно записать в виде [10, 11, 18]

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-1} \mathcal{A}_{ijkl} \partial u_k / \partial x_l \quad (1.2)$$

$$\mathcal{A}_{ijkl} = a_{ijkl}(\mathbf{x} / \varepsilon) + \sigma_{jl}^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x} / \varepsilon) \delta_{ik} \quad (1.3)$$

где  $a_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных,  $\delta_{ik} = 1$ , если  $i = k$ , и  $\delta_{ik} = 0$ , если  $i \neq k$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$  – медленные переменные в плоскости пластинки. Функции  $a_{ijkl}(\mathbf{y})$ ,  $\sigma_{jl}^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$  – периодические по  $y_1, y_2$  с ЯП  $S_1$  ( $S_1$  – проекция ЯП  $P_1$  на плоскость  $y_1 y_2$ , фиг. 1) в соответствии с периодической структурой мембраны.

Введем обозначения

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\text{mes } S_1} \int_{P_1} (\cdot) dy, \quad \langle \cdot \rangle_\gamma = \frac{1}{\text{mes } S_1} \int_\gamma (\cdot) dy$$

(первое выражение – среднее по ЯП  $P_1 = \varepsilon^{-1} P_\varepsilon = \{y = x/\varepsilon: x \in P_\varepsilon\}$ , в безразмерных (быстрых) переменных  $y = x/\varepsilon$  (фиг. 1), второе – среднее по боковой поверхности  $\gamma$  ЯП  $P_1$ ).

Производная от функции вида  $f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$  вычисляется путем замены оператора дифференцирования по правилу [19]

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \rightarrow f_{,\alpha x} + \varepsilon^{-1} f_{,\alpha y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \rightarrow \varepsilon^{-1} f_{,3y} \quad (\alpha = 2, 3) \quad (1.4)$$

$$(f_{,\alpha x} = \partial f / \partial x_\alpha, \quad f_{,iy} = \partial f / \partial y_i)$$

Здесь и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; греческие – 1, 2;  $m = -1, 0, \dots$ ;  $n = 0, 1, \dots$ .

Будем искать решение задачи (1.1) – (1.3) в виде, аналогичном использовавшемуся ранее [2], но разложение для напряжений  $\sigma_{ij}$  начнем в соответствии с (1.2) с члена порядка  $\varepsilon^{-1}$ :

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^{(0)}(\bar{\mathbf{x}}) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-1} \sigma_{ij}^{(-1)}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots = \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (1.6)$$

Подставляя (1.5) в (1.2), с учетом (1.4) получим соотношение, приравняв в котором выражения при  $\varepsilon$ , найдем

$$\sigma_{ij}^{(-1)} = \mathcal{A}_{ijkl} u_{k,ly}^{(1)} + \mathcal{A}_{ijk\alpha} u_{k,\alpha x}^{(0)} \quad (1.7)$$

Члены разложения (1.6) удовлетворяют уравнениям [2]

$$\sigma_{ij,jy}^{(m)} + \sigma_{i\alpha,\alpha x}^{(m-1)} = 0 \quad (\sigma_{ij}^{(-2)} \equiv 0) \quad (1.8)$$

получающимся подстановкой (1.6) в (1.1) с учетом (1.4) (подробнее см. в [2]). Здесь представляет интерес только случай  $m = -1$ . Для него равенство (1.8) дает

$$\sigma_{ij,jy}^{(-1)} = 0$$

Подставляя сюда (1.8), приходим обычным образом [2] к ячеечной задаче (ЯЗ)

$$(\mathcal{A}_{ijkl}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \mathcal{N}_{k,ly}^{p\alpha} + \mathcal{A}_{ijp\alpha}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}))_{,iy} = 0 \quad \text{в } P_1 \quad (1.9)$$

$$(\mathcal{A}_{ijkl}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \mathcal{N}_{k,ly}^{p\alpha} + \mathcal{A}_{ijp\alpha}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})) n_j = 0 \quad \text{на } \gamma$$

Функция  $\mathcal{N}^{p\alpha}(\mathbf{y})$  периодична по  $y_1 y_2$  с ЯП  $S_1$ .

Пусть  $\sigma_{ij}^*$ , как условлено выше, определяются из решения задачи теории упругости. Тогда при учете (1.3) имеем

$$(\mathcal{A}_{ijkl} - a_{ijkl})_{,jy} = \sigma_{jl,jy}^* \delta_{ik} = 0 \quad \text{в } P_1 \quad (1.10)$$

$$(\mathcal{A}_{ijkl} - a_{ijkl}) n_j = \sigma_{jl}^* n_j \delta_{ik} = 0 \quad \text{на } \gamma$$

**Предложение 1.** Справедливо равенство

$$\mathcal{N}^{3\alpha}(\mathbf{y}) = -y_3 \mathbf{e}_\alpha \quad (1.11)$$

Для (1.11) имеем  $(-\mathcal{A}_{ij\alpha 3} + \mathcal{A}_{ij3\alpha})_{,jy} = 0$  в силу симметрии  $a_{ijkl}$  и (1.10). Далее  $(-\mathcal{A}_{ij\alpha 3} + \mathcal{A}_{ij3\alpha}) n_j = 0$  на  $\gamma$  в силу симметрии  $a_{ijkl}$  и (1.10).

С учетом предложения 1 получаем представление  $\mathbf{u}^{(1)}$  через решение ЯЗ (1.9)

$$\mathbf{u}^{(1)} = -y_3 \mathbf{e}_\alpha u_{3,\alpha x}^{(0)}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathcal{N}^{\beta\alpha}(\mathbf{y}) u_{\beta,\alpha x}^{(0)}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (1.12)$$

Это решение по форме совпадает с решением из [2], но коэффициенты ЯЗ (1.9) отличны от упругих постоянных  $a_{ijkl}$  и зависят от начальных напряжений.

Подстановка (1.12) в (1.8) дает

$$\sigma_{ij}^{(-1)} = (-\mathcal{A}_{ij\alpha 3} + \mathcal{A}_{ij3\alpha}) u_{3,\alpha x}^{(0)}(\bar{\mathbf{x}}) + (\mathcal{A}_{ij\beta\alpha} + \mathcal{A}_{ijkl} \mathcal{N}_{k,ly}^{\beta\alpha}) u_{\beta,\alpha x}^{(0)}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (1.13)$$

Пользуясь определением  $\mathcal{A}_{ijkl}$  (1.3), получаем из (1.13)

$$\sigma_{ij}^{(-1)} = (-\sigma_{j3}^* \delta_{i\alpha} + \sigma_{j\alpha}^* \delta_{i3}) u_{3,\alpha x}^{(0)}(\bar{x}) + (\mathcal{A}_{ij\beta\alpha} + \mathcal{A}_{ijkl} \mathcal{N}_{k,ly}^{\beta\alpha}) u_{\beta,\alpha x}^{(0)}(\bar{x}) \quad (1.14)$$

Уравнения равновесия для усилий  $N_{ij} = \langle \sigma_{ij}^{(-1)} \rangle$  в рассматриваемом случае совпадают с полученными в [2] и имеют вид (подробно вывод уравнения равновесия для пластинок см. в [1, 2, 6])

$$N_{\alpha\gamma, \gamma\alpha} = \langle f_\alpha \rangle, \quad N_{3\gamma, 3x} = \langle f_3 \rangle + \langle g_3^+ - g_3^- \rangle_\gamma \quad (1.15)$$

Рассмотрим (1.14) при различных значениях индексов. Для  $i = 3, j = \gamma$  (1.14) с учетом (1.3) дает

$$N_{3\gamma} = \langle \sigma_{3\gamma}^{(-1)} \rangle = \langle \sigma_{\gamma\alpha}^* \rangle u_{3,\alpha x}^{(0)}(\bar{x}) + \langle \mathcal{A}_{3\gamma\beta\alpha} + \mathcal{A}_{3\gamma kl} \mathcal{N}_{k,ly}^{\beta\alpha} \rangle u_{\beta,\alpha x}^{(0)}(\bar{x}) \quad (1.16)$$

Для  $i = \kappa, j = \gamma$  (1.14) с учетом (1.3) дает

$$N_{\kappa\gamma} = \langle \sigma_{\kappa\gamma}^{(-1)} \rangle = -\langle \sigma_{\gamma 3}^* \rangle u_{3,\alpha x}^{(0)}(\bar{x}) + \langle \mathcal{A}_{\kappa\gamma\beta\alpha} + \mathcal{A}_{\kappa\gamma kl} \mathcal{N}_{k,ly}^{\beta\alpha} \rangle u_{\beta,\alpha x}^{(0)}(\bar{x}) \quad (1.17)$$

Рассмотрим ЯЗ (1.9). Умножим уравнение из (1.9) на  $u_3$  и проинтегрируем результат по частям по ЯП  $P_1$ . С учетом краевого условия из (1.9) и периодичности  $\mathcal{N}^{\beta\alpha}$  и  $u_3$  по  $y_1, y_2$  получим

$$\langle \mathcal{A}_{i3kl} \mathcal{N}_{k,ly}^{\beta\alpha} + \mathcal{A}_{i3\beta\alpha} \rangle = 0 \quad (1.18)$$

Пользуясь (1.18), симметрией  $a_{ijkl}$  и определением  $\mathcal{A}_{ijkl}$ , последний член в правой части (1.16) можно переписать в виде

$$\langle (\sigma_{3l}^* \delta_{\gamma k} - \sigma_{\gamma l}^* \delta_{3k}) \mathcal{N}_{k,ly}^{\alpha\beta} \rangle + \langle \sigma_{3\alpha}^* \rangle \delta_{\gamma\beta}$$

**Предложение 2.** Если  $\sigma_{ij}^*$  определяются из решения задачи теории упругости, то  $\langle \sigma_{i3}^* \rangle = 0$ .

Доказательство аналогично доказательству соотношения (1.18). В результате (1.16), (1.17) принимают вид

$$N_{3\gamma} = N_{\gamma\alpha}^* u_{3,\alpha x}^{(0)} + R_{\gamma\beta\alpha} u_{\beta,\alpha x}^{(0)} \quad (1.19)$$

$$N_{\kappa\gamma} = \hat{A}_{\kappa\gamma\beta\alpha} u_{\beta,\alpha x}^{(0)} \quad (1.20)$$

где

$$N_{\gamma\alpha}^* = \langle \sigma_{\gamma\alpha}^* \rangle, \quad R_{\gamma\beta\alpha} = \langle \sigma_{3l}^* \mathcal{N}_{\gamma,ly}^{\alpha\beta} \rangle - \langle \sigma_{\gamma l}^* \mathcal{N}_{3,ly}^{\alpha\beta} \rangle$$

$$\hat{A}_{\kappa\gamma\beta\alpha} = \langle \mathcal{A}_{\kappa\gamma\beta\alpha} + \mathcal{A}_{\kappa\gamma kl} \mathcal{N}_{k,ly}^{\beta\alpha} \rangle$$

Здесь  $N_{\gamma\alpha}^*$  – начальные напряжения в плоскости мембраны,  $\hat{A}_{\kappa\gamma\beta\alpha}$  – усредненные упругие постоянные напряженного тела (в рассматриваемом случае – двумерного). Величины  $\hat{A}_{\kappa\gamma\beta\alpha}$ , вообще говоря, зависят от предварительных напряжений в плоскости мембраны. Эта зависимость аналогична обнаруженной в [10–13].

Краевые условия для перемещений имеют вид

$$u_\alpha^{(0)}(\bar{x}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad \text{на } \partial S \quad (1.21)$$

$$u_3^{(0)}(\bar{x}) = 0 \quad \text{на } \partial S \quad (1.22)$$

Уравнения равновесия (1.15) при  $\langle f_\alpha \rangle = 0$  с определяющими уравнениями (1.20) и краевым условием (1.21) имеют решение  $u_\alpha(\bar{x}) = 0$  (при условии, что начальные напряжения  $\sigma_{ij}^*$  не вызывают потери устойчивости мембраны как плоского тела). Последнее условие выполнено практически всегда, так как начальные напряжения малы по сравнению с упругими постоянными [10, 11]. Тогда (1.19) принимает вид

$$N_{3\gamma} = N_{\gamma\alpha}^* u_{3,\alpha x}^{(0)} \quad (1.23)$$

с уравнением равновесия

$$N_{3\gamma,\gamma x} = \langle f_3 \rangle + \langle g_3^+ - g_3^- \rangle_\gamma \quad (1.24)$$

и краевым условием (1.22).

Уравнения (1.23), (1.24) можно преобразовать в классическое уравнение изгиба мембраны

$$(N_{\gamma\alpha}^* u_{3,\alpha x}^{(0)})_{,\gamma x} = \langle f_3 \rangle + \langle g_3^+ - g_3^- \rangle_\gamma$$

При наличии ненулевых сил порядка  $\varepsilon^{-1}$  в плоскости мембраны ситуация отлична от классической.

*Однородная мембрана.* В случае однородной мембраны  $N^{\alpha\beta}$  функция только  $u_3$  и  $\sigma_{i3}^* = 0$ , в силу чего  $R_{\gamma\beta\alpha} = 0$ ,  $\hat{A}_{\kappa\gamma\beta\alpha} = \langle \mathcal{A}_{\kappa\gamma\beta\alpha} + \mathcal{A}_{\kappa\gamma k 3} N_{k,3y}^{\beta\alpha} \rangle$ . Таким образом, уравнения (1.19) и (1.20) в этом случае не связаны.

*Слоистые мембраны.* Пусть мембрана образована из параллельных плоскости  $x_1 x_2$  слоев изотропных материалов. Тогда, как и в предыдущем случае,  $N^{\alpha\beta}$  – функция только  $u_3$  и  $\sigma_{i3}^* = 0$ , в силу чего  $R_{\gamma\beta\alpha} = 0$ .

*Общий случай.* Известно [2, 6], что локальные напряжения  $\sigma_{ij}^*$  связаны с глобальными перемещениями  $U$  в плоскости неоднородного тела периодической структуры формулой вида

$$\sigma_{ij}^* = (a_{ijAB} + a_{ijkl} N_{k,ly}^{AB}) U_{A,Bx} \quad (A, B = 1, 2) \quad (1.25)$$

Подставляя (1.25) в формулу для  $R_{\gamma\beta\alpha}$ , получим

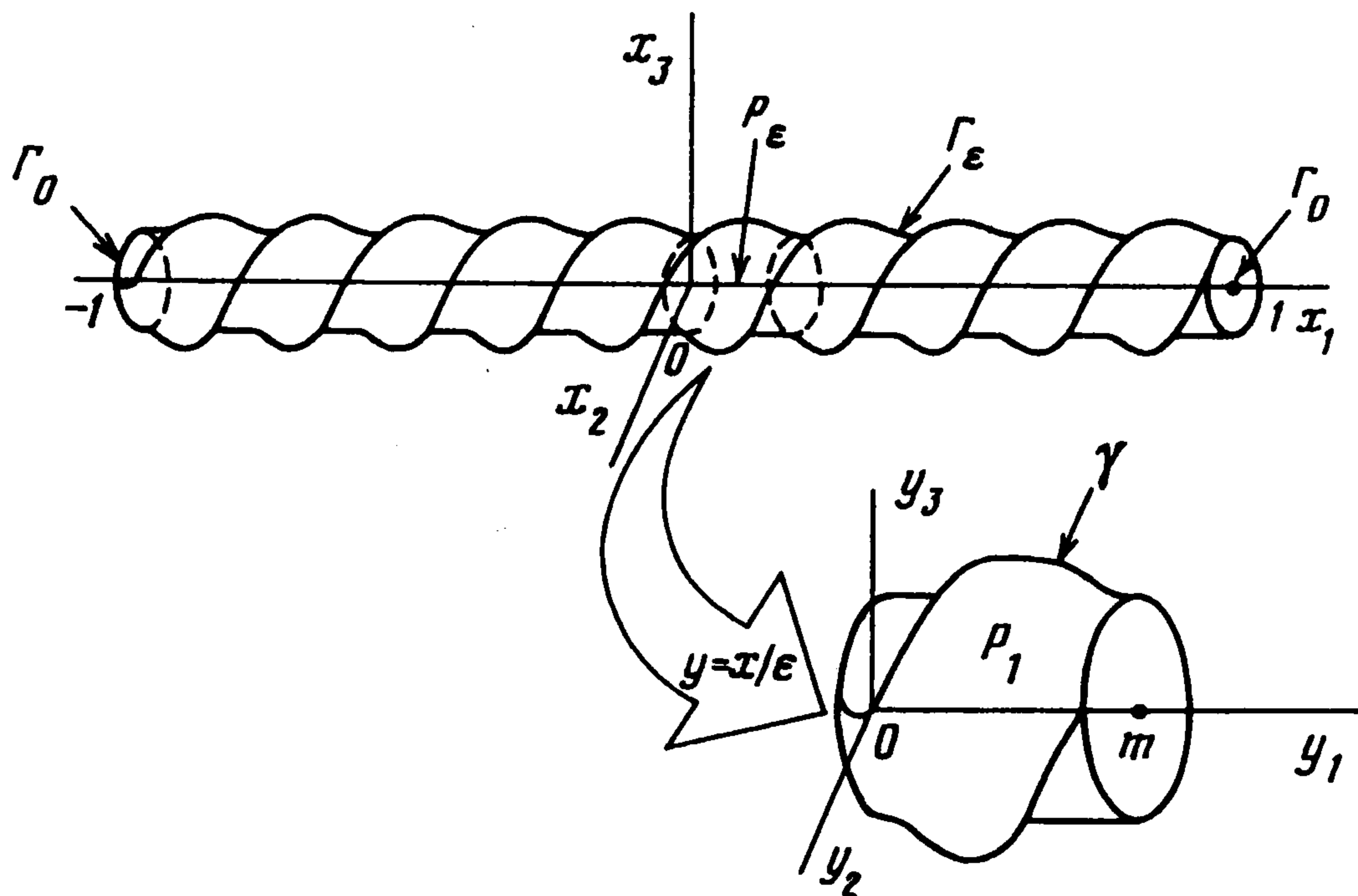
$$R_{\gamma\beta\alpha} = [\langle a_{3lAB} N_{\gamma,ly}^{\alpha\beta} \rangle + \langle a_{3lmn} N_{m,ny}^{AB} N_{\gamma,ly}^{\alpha\beta} \rangle - \langle a_{\gamma l AB} N_{3,ly}^{\alpha\beta} \rangle - \langle a_{\gamma l mn} N_{m,ny}^{\alpha\beta} N_{3,ly}^{\alpha\beta} \rangle] U_{A,Bx}$$

В пластинках образованных из изотропных материалов, из  $a_{3lAB}$  ( $l = 1, 2, 3$ ;  $A, B = 1, 2$ ) от нуля отличны только  $a_{33AB}$ , а из  $a_{\gamma l AB}$  ( $\gamma = 1, 2$ ) – только  $a_{\gamma\delta AB}$ . Тогда в рассматриваемом случае

$$R_{\gamma\beta\alpha} = [\langle a_{33AA} N_{\gamma,3y}^{\alpha\beta} \rangle + \langle a_{3lmn} N_{m,ny}^{AB} N_{\gamma,ly}^{\alpha\beta} \rangle - \langle a_{\gamma\delta AB} N_{3,\delta y}^{\alpha\beta} \rangle - \langle a_{\gamma l mn} N_{m,ny}^{\alpha\beta} N_{3,ly}^{\alpha\beta} \rangle] U_{A,Bx}$$

**2. Струна.** Рассмотрим область малого диаметра  $Q_\varepsilon$ , получающуюся периодическим повторением некоторой ЯП вдоль оси  $x_1$  (фиг. 2). Характерный размер ЯП (совпадающий с характерным диаметром струны)  $\varepsilon \ll 1$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  область  $Q_\varepsilon$  стягивается к отрезку  $[-1, 1]$  на оси  $x_1$ . Напряжения  $\sigma_{ij}^*$  в материале, занимающем область  $Q_\varepsilon$ , определяются из решения задачи теории упругости. Будем считать, что упругие постоянные материала струны  $a_{ijkl}$  и начальные напряжения  $\sigma_{ij}^*$  одного порядка –  $\varepsilon^{-2}$ .

Вновь принимаем порядки совпадающими, хотя в классической теории жесткостями пренебрегают по сравнению с напряжениями. Тогда [7] уравнения равновесия для рассматриваемого тела имеют вид (1.1)–(1.3), где  $Q_\varepsilon$ ,  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $\Gamma_0$  – область, занятая струной, и ее поверхность (фиг. 2).



Фиг. 2

Связь между текущими напряжениями  $\sigma_{ij}$ , перемещениями  $u^\epsilon$  и начальными напряжениями в данном случае можно записать в виде [10, 11, 18]

$$\sigma_{ij} = \epsilon^{-2} \mathcal{A}_{ijkl}(x_1, y) \partial u_k / \partial x_l \quad (2.1)$$

$$\mathcal{A}_{ijkl} = a_{ijkl}(y) + \sigma_{jl}^*(x_1, y) \delta_{ik} \quad (2.2)$$

где  $x_1$  – медленная переменная вдоль оси струны. Функции  $a_{ijkl}(y)$ ,  $\sigma_{jl}^*(x_1, y)$  – периодические по  $y_1$  с периодом  $m$  (фиг. 2) в соответствии с периодической структурой струны.

Обозначим

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{m} \int_{P_1} (\cdot) dy, \quad \langle \cdot \rangle_\gamma = \frac{1}{m} \int_{P_\gamma} (\cdot) dy$$

– среднее по ЯП  $P_1 = \epsilon^{-1} P_\epsilon = \{y = x / \epsilon : x \in P_\epsilon\}$  в безразмерных (быстрых) переменных  $y = x/\epsilon$  (фиг. 2) и среднее по боковой поверхности  $\gamma$  ЯП  $P_1$ .

Производная от функции вида  $f(x_1, y)$  вычисляется путем замены оператора дифференцирования по правилу [19]

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \rightarrow f_{,1x} + \epsilon^{-1} f_{,1y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \rightarrow \epsilon^{-1} f_{,\alpha y} \quad (\alpha = 2, 3) \quad (2.3)$$

$$(f_{,iy} = \partial f / \partial y_i, f_{,1x} = \partial f / \partial x_1)$$

Здесь и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; греческие – 2, 3;  $m = -2, -1, \dots; n = 0, 1, \dots$

Будем искать решение задачи (1.1)–(1.3) в виде, аналогичном использовавшемуся ранее [4], но разложение для напряжений  $\sigma_{ij}$  начнем в соответствии с (2.2) с члена порядка  $\epsilon^{-2}$ :

$$u^\epsilon = u^{(0)}(x_1) + \epsilon u^{(1)}(x_1, y) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u^{(n)}(x_1, y) \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij} = \epsilon^{-2} \sigma_{ij}^{(-2)}(x_1, y) + \dots = \sum_{m=-2}^{\infty} \epsilon^m \sigma_{ij}^{(m)}(x_1, y) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4), (2.5) в (2.1), с учетом (2.3), получим

$$\sum_{m=-2}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n-3} \mathcal{A}_{ijkl} u_{k,ly}^{(n)} + \varepsilon^{n-2} \mathcal{A}_{ijk1} u_{k,1x}^{(n)} \quad (2.6)$$

Приравняв в (2.6) выражения при  $\varepsilon^{-2}$ , получим

$$\sigma_{ij}^{(-2)} = \mathcal{A}_{ijkl}(x_1, y) u_{k,ly}^{(1)} + \mathcal{A}_{ijk1}(x_1, y) u_{k,1x}^{(0)} \quad (2.7)$$

Члены разложения (2.5) удовлетворяют уравнениям [4]

$$\sigma_{ij,iy}^{(m)} + \sigma_{i1,1x}^{(m-1)} = 0 \text{ в } P_1, \quad \sigma_{ij}^{(m)} n_j = 0 \text{ на } \gamma \quad (2.8)$$

получающимся подстановкой (2.5) в (1.1) с учетом (2.3) (подробнее см. в [4, 6]). Здесь  $\gamma$  – боковая поверхность ЯП  $P_1$ . Здесь представляет интерес только случай  $m = -2$ . Для него (2.8) дает

$$\sigma_{ij,iy}^{(-2)} = 0 \text{ в } P_1, \quad \sigma_{ij}^{(-2)} n_j = 0 \text{ на } \gamma \quad (2.9)$$

Подставляя сюда (2.7), приходим к ЯЗ

$$(\mathcal{A}_{ijkl}(x_1, y) \mathcal{N}_{k,ly}^p + \mathcal{A}_{ijp1}(x_1, y))_{,jy} = 0 \text{ в } P_1 \quad (2.10)$$

$$(\mathcal{A}_{ijkl}(x_1, y) \mathcal{N}_{k,ly}^p + \mathcal{A}_{ijp1}(x_1, y)) n_j = 0 \text{ на } \gamma \mathbf{N}^p(y)$$

периодична по  $y_1$  с периодом  $m$ .

Пусть напряжения  $\sigma_{ij}^*$ , как условлено выше, определяются из решения задачи теории упругости. Тогда для них выполнены (1.10).

*Предложение 3.*

$$\mathbf{N}^\alpha(y) = -y_\alpha \mathbf{e}_1 \quad (2.11)$$

Для (2.11) имеем  $(-\mathcal{A}_{ij1\alpha} + \mathcal{A}_{ij\alpha 1})_{,jy} = 0$  в силу симметрии  $a_{ijkl}$  и (1.10). Далее  $(-\mathcal{A}_{ij1\alpha} + \mathcal{A}_{ij\alpha 1}) n_j = 0$  на  $\gamma$  в силу симметрии  $a_{ijkl}$  и (2.10).

С учетом предложения 3 получаем представление  $\mathbf{u}^{(1)}$  через решение ЯЗ (2.10)

$$\mathbf{u}^{(1)} = -y_\alpha \mathbf{e}_1 u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + \mathbf{N}^1(y) u_{1,1x}^{(0)}(x_1) \quad (2.12)$$

Это решение по форме совпадает с решением из [4], но коэффициенты ЯЗ (2.10) отличны от упругих постоянных  $a_{ijkl}$  и зависят от начальных напряжений.

Подставив выражения (2.12) в (2.7) и используя определение  $\mathcal{A}_{ijkl}$  (2.2), получаем

$$\sigma_{ij}^{(-2)} = (-\sigma_{j\alpha}^* \delta_{i1} + \sigma_{j1}^* \delta_{i\alpha}) u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + (\mathcal{A}_{ij11} + \mathcal{A}_{ijkl} \mathcal{N}_{k,ly}^1) u_{1,1x}^{(0)}(x_1) \quad (2.13)$$

Уравнения равновесия для усилий  $N_i = \langle \sigma_{i1}^{(-2)} \rangle$  в рассматриваемом случае совпадают с полученными ранее [4]:

$$N_{1,1x} = \langle f_1 \rangle, \quad N_{\alpha,1x} = \langle f_\alpha \rangle + \langle g_\alpha \rangle_\gamma \quad (2.14)$$

Равенства (2.13) позволяют получить выражения для усилий через деформационные характеристики.

Рассмотрим равенства (2.13) при различных значениях индексов, учитывая равенство (2.2). Имеем

$$N_1 = \langle \sigma_{11}^{(-2)} \rangle = \langle \mathcal{A}_{1111} + \mathcal{A}_{11kl} \mathcal{N}_{k,ly}^1 \rangle u_{1,1x}^{(0)} - \langle \sigma_{1\alpha}^* \rangle u_{\alpha,1x}^{(0)} \quad (i=1) \quad (2.15)$$

$$N_{\beta} = \langle \sigma_{\beta 1}^{(-2)} \rangle = \langle \sigma_{11}^* \rangle u_{\beta, 1x}^{(0)} + \langle \mathcal{A}_{\beta 111} + \mathcal{A}_{\beta 1kl} \mathcal{N}_{k, ly}^1 \rangle u_{1, 1x}^{(0)} \quad (i = \beta) \quad (2.16)$$

*Предложение 4.* Если  $\sigma_{ij}^*$  определяются из решения задачи теории упругости, то  $\langle \sigma_{1\alpha}^* \rangle = 0$ .

Для проверки умножим уравнение равновесия  $\sigma_{ij, jy}^* = 0$  на  $y_{\alpha}$  и проинтегрируем результат по ЯП  $P_1$  с учетом краевого условия  $\sigma_{ij}^* n_j = 0$  на  $\gamma$  и периодичности всех функций (в том числе и  $y_{\alpha}$ ) по  $y_1$ .

В результате (2.15), (2.16) принимают вид

$$N_1 = \hat{A} u_{1, 1x}^{(0)}, \quad N_{\beta} = N_1^* u_{\beta, 1x} + R_{\beta} u_{1, 1x}^{(0)} \\ \hat{A} = \langle \mathcal{A}_{1111} + \mathcal{A}_{11kl} \mathcal{N}_{k, ly}^1 \rangle, \quad N_1^* = \langle \sigma_{11}^* \rangle \quad (2.17)$$

$$R_{\beta} = \langle \mathcal{A}_{\beta 111} + \mathcal{A}_{\beta 1kl} \mathcal{N}_{k, ly}^1 \rangle$$

Здесь  $N_1^*$  – начальное осевое напряжение струны,  $\hat{A}$  – усредненные упругие постоянные напряженного тела (в рассматриваемом случае – одномерного). Величина  $\hat{A}$ , вообще говоря, зависит от предварительного напряжения струны. Эта зависимость аналогична обнаруженной ранее [10–13].

Краевые условия для перемещений имеют вид

$$u_{\alpha}^{(0)}(\pm 1) = 0, \quad u_1^{(0)}(\pm 1) = 0 \quad (2.18)$$

Уравнения равновесия (2.14) при  $\langle f_1 \rangle = 0$  с определяющими уравнениями (2.15) и краевым условием (2.18) имеют решение  $u_1^{(0)}(x_1) \equiv 0$  (при условии, что начальные напряжения  $\sigma_{ij}^*$  не вызывают потерю устойчивости струны как одномерного тела – стержня). Последнее условие выполнено практически всегда, так как начальные напряжения малы по сравнению с упругими постоянными [10, 11]. Тогда (2.17) принимает вид

$$N_{\beta} = N_1^* u_{\beta, 1x}^{(0)} \quad (2.19)$$

с уравнением равновесия

$$N_{\beta, 1x} = \langle f_{\beta} \rangle + \langle g_{\beta} \rangle_{\gamma} \quad (2.20)$$

и краевым условием (2.18).

Уравнения (2.19), (2.20) можно преобразовать в классическое уравнение струны

$$(N_1^* u_{\beta, 1x}^{(0)})_{, 1x} = \langle f_{\beta} \rangle + \langle g_{\beta} \rangle_{\gamma}$$

При наличии ненулевых сил порядка  $\varepsilon^{-2}$ , действующих вдоль оси  $x_1$  струны, ситуация отлична от классической.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kohn R.V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness // Intern J. Solids and Structures. 1984. V. 20. № 4. P. 333–350.
2. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1984. V. 6. № 2. P. 159–161.
3. Козлова М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости для тонкого неоднородного бруса // Вест. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. Вып. 5. С. 6–10.

4. Колпаков А.Г. К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 440–448.
5. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
6. Аннин Б.Д., Каламкаргов А.Л., Колпаков А.Г., Партоян В.З. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1993. 256 с.
7. Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory. Berlin: Springer-Verlag, 1980. 391 p.
8. Колпаков А.Г. Эффективные жесткости композиционных пластинок // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 666–673.
9. Колпаков А.Г. Усреднение в задаче изгиба и колебаний напряженных неоднородных пластинок // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 60–67.
10. Kolpakov A.G. On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Second World Congr. on Computational Mechanics. Extended Abstracts of Lectures. FRG Stuttgart, 1990. P. 453–456.
11. Kolpakov A.G. On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Computers and Structures. 1992. V. 44. № 1/2. P. 97–101.
12. Колпаков А.Г. Жесткостные характеристики напряженных неоднородных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 66–73.
13. Колпаков А.Г. Жесткости характеристики напряженных конструкций // ПМТФ. 1994. № 2. С. 155–163.
14. Колпаков А.Г. К задаче теории пластинок с начальными напряжениями // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. С. 179–187.
15. Колпаков А.Г. К задаче теории балок с начальными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 6. С. 139–144.
16. Колпаков А.Г. Асимптотическая задача устойчивости балок. Потеря устойчивости при изгибе/кручении // ПМТФ. 1995. № 6. С. 133–141.
17. Скардино Ф., Хирл Дж., Кавабата С. и др. Тканые композиционные материалы. М.: Мир, 1991. 430 с.
18. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
19. Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. Analysis, design and optimization of composite structures. N.Y. etc.: Wiley, 1997. 356 p.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
21.VII. 1995