УДК 539.3

© 1997 г. В.М. Александров

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Изучено двухпараметрическое интегральное уравнение первого рода с разностным периодическим ядром, к которому приводится широкий круг периодических задач механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. Для двух основных вариантов оно преобразовано к сингулярному интегральному уравнению, эффективно решаемому многими известными приближенными методами. В частном случае найдены замкнутые решения исходного уравнения. Рассмотрены антиплоские контактные задачи для упругого плоского и цилиндрического слоя.

1. В периодических задачах механики сплошных сред и в других задачах математической физики возникает следующее двухпараметрическое интегральное уравнение первого рода с разностным периодическим ядром [1–4]:

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)K[\alpha(\xi-x)]d\xi = \pi f(x) \quad (|x|\leqslant 1) \tag{1.1}$$

$$K(y)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{L(\beta u_k)}{u_k}e^{iu_k y} \quad (y=\alpha(\xi-x)) \tag{1.2}$$

Здесь α и β – безразмерные положительные параметры, причем $0<\alpha<\pi$ и $0<\beta<$ $<\infty$; функция $f(x)$ задана и такова, что ее первая производная при $|x|\leqslant 1$ удовлетворяет условию Гёльдера; функция $L(v)$ – нечетная, непрерывная и не обращающаяся в нуль при $0<|v|<\infty$. Кроме того, имеют место соотношения

$$L(|v|)=1+O(v^{-2}) \quad (|v|\to\infty), \quad L(v)=Av+O(v^3)\,(v\to 0) \tag{1.3}$$

где A – положительная постоянная. Что касается величин u_k, то встречаются два основных случая (далее 1 и 2)

$$1)\ u_k=k-\tfrac{1}{2}, \quad 2)\ u_k=k \tag{1.4}$$

В силу (1.3) функцию $L(v)$ можно представить в форме

$$L(v)=\operatorname{th}Av+g(v)$$

$$g(|v|)=O(v^{-2})(|v|\to\infty), \quad g(v)=O(v^3)\ (v\to 0) \tag{1.5}$$

$$|g(v)|\leqslant\delta \ (0<|v|<\infty)$$

причем величина δ в реальных задачах, как правило, мала.

Рассмотрим ряд (всюду далее суммирование ведется от $k=1$ до $k=\infty$)

$$M_i(y)=\sum\operatorname{th}\gamma u_k\sin u_k y \quad (\gamma=\beta A) \tag{1.6}$$

В случаях 1 ($i = 1$) и 2 ($i = 2$) ему соответственно можно придать вид ([5], формулы 1.441(2), 1.442(2), 8.146(10, 12))

$$M_1(y) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{cosec}\frac{y}{2} - 4\sum\frac{q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)y\right] = \mathrm{K}(e)F_1(u)$$

$$M_2(y) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg}\frac{y}{2} - 4\sum\frac{q^{2k}}{1+q^{2k}}\sin ky\right] = \mathrm{K}(e)F_2(u) \quad (q = e^{-\gamma}) \tag{1.7}$$

$$F_1(u) = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad F_2(u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} \quad \left(u = \frac{\mathrm{K}(e)y}{\pi}\right)$$

Величина $e < 1$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\pi\,\mathrm{K}(\sqrt{1-e^2})[\mathrm{K}(e)]^{-1} = \gamma \tag{1.8}$$

$\mathrm{K}(e)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ – эллиптические функции Якоби.

Продифференцируем интегральное уравнение (1.1), (1.2) один раз по x и на основании соотношений (1.5)–(1.7) для случаев 1 и 2 запишем его в форме

$$\mu\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)F_i[\mu(\xi-x)]d\xi = \pi f'(x) - \alpha\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)G_i[\alpha(\xi-x)]d\xi \tag{1.9}$$

$$\mu = \pi^{-1}\,\mathrm{K}(e)\alpha, \quad G_i(y) = \sum g(\beta u_k)\sin u_k y$$

Можно показать на основании свойств $g(v)$, что функции $G_i(y)$ удовлетворяют при $|y| \leqslant 2\alpha$ условию Гёльдера.

2. Далее рассмотрим отдельно четные ($\varphi(x)$ и $f(x)$ – четные функции) и нечетные ($\varphi(x)$ и $f(x)$ – нечетные функции) варианты уравнений (1.9).

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&F_1[\mu(\xi-x)] - F_1[\mu(\xi+x)] = 2\operatorname{sn}\mu x\operatorname{cn}\mu\xi\operatorname{dn}\mu x/\Delta\\
&F_1[\mu(\xi-x)] + F_1[\mu(\xi+x)] = 2\operatorname{sn}\mu\xi\operatorname{cn}\mu x\operatorname{dn}\mu\xi/\Delta\\
&F_2[\mu(\xi-x)] - F_2[\mu(\xi+x)] = 2\operatorname{sn}\mu x\operatorname{cn}\mu x\operatorname{dn}\mu\xi/\Delta\\
&F_2[\mu(\xi-x)] + F_2[\mu(\xi+x)] = 2\operatorname{sn}\mu\xi\operatorname{cn}\mu\xi\operatorname{dn}\mu x/\Delta\\
&\Delta = \operatorname{sn}^2\mu\xi - \operatorname{sn}^2\mu x
\end{aligned} \tag{2.1}$$

На основании (2.1) и с учетом, что $\mu < \mathrm{K}(e)$, а функции $\operatorname{cn}\mathrm{K}x$ и $\operatorname{dn}\mathrm{K}x$ монотонно убывают от 1 до 0 при возрастании x от 0 до 1 [6], приведем уравнение (1.9) к виду

$$\mu\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)\operatorname{cn}\mu\xi}{\operatorname{sn}\mu\xi - \operatorname{sn}\mu x}d\xi = \frac{\pi f'(x)}{\operatorname{dn}\mu x} - \frac{\alpha}{\operatorname{dn}\mu x}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)G_i[\alpha(\xi-x)]d\xi \tag{2.2}$$

$$\mu\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)\operatorname{dn}\mu\xi}{\operatorname{sn}\mu\xi - \operatorname{sn}\mu x}d\xi = \frac{\pi f'(x)}{\operatorname{cn}\mu x} - \frac{\alpha}{\operatorname{cn}\mu x}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)G_i[\alpha(\xi-x)]d\xi$$

Первое уравнение (2.2) имеет место для четного варианта уравнения (1.9) для $i = 1$ и нечетного варианта уравнения (1.9) для $i = 2$, второе уравнение (2.2) имеет место для нечетного варианта уравнения (1.9) для $i = 1$ и четного варианта уравнения (1.9) для $i = 2$.

Учитывая вновь, что $\mu < \mathrm{K}(e)$, а функция $\operatorname{sn}\mathrm{K}x$ монотонно возрастает от 0 до 1 при возрастании x от 0 до 1 [6], введем новые переменные

$$\tau = \operatorname{sn}\mu\xi, \quad t = \operatorname{sn}\mu x, \quad c = \operatorname{sn}\mu \tag{2.3}$$

и введем еще обратную к sn$u$ функцию

$$\xi = \frac{\operatorname{asn}\tau}{\mu}, \quad x = \frac{\operatorname{asn}t}{\mu}, \quad \operatorname{asn}t = \int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}} \tag{2.4}$$

(использовано определение ([5], формула 8.144(1)) функции sn$u$).

На основании (2.3), (2.4) приведем уравнения (2.2) к виду

$$\int\limits_{-c}^{c} \frac{\psi^{(j)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \pi h^{(j)}(t) - \int\limits_{-c}^{c} \psi^{(j)}(\tau) H_i^{(j)}(\tau, t) d\tau \quad (|t| \leqslant c) \tag{2.5}$$

где $j = 1$ соответствует первому, а $j = 2$ – второму уравнениям (2.2) и введены обозначения

$$\frac{\varphi(\xi)}{\operatorname{dn}\mu\xi} = \psi^{(1)}(\tau), \quad \frac{f'(x)}{\operatorname{dn}\mu x} = h^{(1)}(t), \quad \frac{\varphi(\xi)}{\operatorname{cn}\mu\xi} = \psi^{(2)}(\tau), \quad \frac{f'(x)}{\operatorname{cn}\mu x} = h^{(2)}(t)$$

$$H_i^{(j)}(\tau, t) = \frac{\pi \tilde{H}_i^{(j)}(\tau, t)}{\mathrm{K}(e)} G_i\left[\frac{\pi}{\mathrm{K}(e)}(\operatorname{asn}\tau - \operatorname{asn}t)\right] \tag{2.6}$$

$$\tilde{H}_i^{(1)}(\tau, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2t^2}\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad \tilde{H}_i^{(2)}(\tau, t) = \tilde{H}_i^{(1)}(t, \tau)$$

Важно отметить, что $c < 1 < 1/e$ и корневые особенности в знаменателях выражений $\tilde{H}_i^{(j)}(\tau, t)$ лежат вне интервалов определения и интегрирования в (2.5).

3. Для решения сингулярного интегрального уравнения первого рода (2.5) могут быть использованы любые известные приближенные методы [4, 7–11]. А поскольку все они так или иначе основаны на точном обращении главного сингулярного оператора, стоящего в левой части (2.5), то при малом δ в (1.5) эффективность их будет весьма высока при любых значениях параметров α и β.

С учетом указанных выше свойств функций $f(x)$ и $G_i(y)$ можно доказать [4], что если решение уравнения (2.5) при заданных значениях параметров α и β существуют в классе функций, для которых интеграл

$$\int\limits_{-c}^{c} |\psi^{(j)}(\tau)|^p d\tau \quad (0 < p < 2) \tag{3.1}$$

сходится, то это решение в общем случае представимо в форме

$$\psi^{(j)}(t) = \Psi^{(j)}(t)(c^2 - t^2)^{-1/2} \tag{3.2}$$

причем функция $\Psi^{(j)}(t)$ удовлетворяет при $|t| \leqslant c$ условию Гёльдера.

Если функция $f(x)$ и, следовательно, функция $\varphi(x)$ в уравнении (1.1) имеют как четную, так и нечетную части, т.е.

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x), \quad \varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x) \tag{3.3}$$

где индексом плюс помечены четные, а индексом минус нечетные части, то, решая уравнения (2.5), найдем для случая 1

$$\varphi(x) = \operatorname{dn}\mu x \psi_+^{(1)}(\operatorname{sn}\mu x) + \operatorname{cn}\mu x \psi_-^{(2)}(\operatorname{sn}\mu x) \tag{3.4}$$

и для случая 2

$$\varphi(x)=\operatorname{cn}\mu x\psi_+^{(2)}(\operatorname{sn}\mu x)+\operatorname{dn}\mu x\psi_-^{(1)}(\operatorname{sn}\mu x) \tag{3.5}$$

причем $\psi_+^{(j)}(t)$ и $\psi_-^{(j)}(t)$ определяются как решения, соответствующие $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$.

Заметим, что функции $\psi_+^{(j)}(t)$ находятся из сингулярных интегральных уравнений (2.5) с точностью до слагаемых

$$C^{(j)}(c^2-t^2)^{-1/2} \tag{3.6}$$

где $C^{(j)}$ – произвольные постоянные, которые нужно определить из требования, чтобы решения (3.4) и (3.5) уравнения (2.5) удовлетворяли также исходному (непродифференцированному по x) уравнению (1.1), например, в точке $x=0$. Заметим, что точка $x=0$ выбрана лишь для упрощения, можно взять любую другую точку на отрезке $|x|\leqslant 1$, ибо уравнения (1.9) $\to$ (2.2) $\to$ (2.5) отличаются от (1.1) лишь на одну операцию дифференцирования.

Положив в (1.1) $x=0$ и воспользовавшись формулами (2.4), (2.5) работы [9], которые в принятых здесь обозначениях имеют вид

$$\sum\frac{\operatorname{th}\gamma(k-1/2)}{k-1/2}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{cn}u}{1-\operatorname{cn}u} \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{2}\gamma+\sum\frac{\operatorname{th}\gamma k}{k}\cos ky=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{dn}u}{1-\operatorname{dn}u}$$

(заметим, что формулы (3.7) можно найти, интегрируя (1.6), (1.7) с помощью [5] (5.135(3, 6)); в работе [9] они даны с опиской – вместо th напечатано tg), придем после ряда преобразований с учетом (2.6) и (3.7) к следующему соотношению для определения $C^{(j)}$:

$$\int_{-c}^{c}\psi_+^{(i)}(\tau)[P_i(\tau)+R_i(\tau)]d\tau=\pi\mu f(0) \tag{3.8}$$

где

$$P_1(\tau)=\frac{1}{2\sqrt{1-\tau^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}},\quad P_2(\tau)=P_1(e\tau)$$

$$R_i(\tau)=\tilde{R}_i(\tau)Q_i\left[\frac{\pi}{\mathrm{K}(e)}\operatorname{asn}\tau\right]$$

$$\tilde{R}_1(\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}},\quad \tilde{R}_2(\tau)=\tilde{R}_1(e\tau) \tag{3.9}$$

$$Q_i(y)=\sum\frac{g(\beta u_k)}{u_k}\cos u_k y\quad (Q_i'(y)=-G_i(y))$$

В ряде задач функция $f(x)$ в (1.1) при заданных α и β определена лишь с точностью до линейной части c_0+c_1x. Для нахождения c_0 и c_1 нужны дополнительные условия, в качестве которых обычно используют

$$\varphi(\pm 1)=0 \tag{3.10}$$

4. Если в (1.5) функция $g(v)\equiv 0$, то уравнение (2.5) вырождается в классическое сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши, решаемое в

замкнутом виде (см., например, [4]). Тогда для четного варианта случая 1 имеем

$$\varphi_+(x) = \frac{\operatorname{dn}\mu x}{\pi X(x)}\left[P - \mu\int_{-1}^{1}\frac{X(\xi)f_+'(\xi)\operatorname{cn}\mu\xi}{W(\xi,\ x)}d\xi\right] \tag{4.1}$$

$$X(x) = \sqrt{c^2 - \operatorname{sn}^2\mu x},\quad W(\xi,\ x) = \operatorname{sn}\mu\xi - \operatorname{sn}\mu x$$

Добавочное соотношение (3.8), служащее теперь для определения постоянной P в (4.1), примет вид

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_+(\xi)\operatorname{cn}\mu\xi}{Y(\xi)}\ln\frac{1+Y(\xi)}{1-Y(\xi)}d\xi = 2\pi f_+(0),\quad Y(x) = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2\mu x} \tag{4.2}$$

При условиях (3.10) для четного варианта случая 1 имеем

$$\varphi_+(x) = -\frac{\mu\operatorname{dn}\mu x}{\pi}X(x)\int_{-1}^{1}\frac{f_+'(\xi)\operatorname{cn}\mu\xi}{X(\xi)W(\xi,\ x)}d\xi \tag{4.3}$$

Соотношение (4.2) здесь сохраняет силу, а дополнительные условия (3.10) для определения c_0 примут вид

$$P + \mu\int_{-1}^{1}\frac{f_+'(\xi)\operatorname{sn}\mu\xi\operatorname{cn}\mu\xi}{X(\xi)}d\xi = 0 \tag{4.4}$$

Для нечетного варианта случая 2 нужно в (4.1) положить $P = 0$ и заменить $f_+'(\xi)$ на $f_-'(\xi)$. При условиях (3.10) для нечетного варианта случая 2 нужно в (4.3) заменить $f_+'(\xi)$ на $f_-'(\xi)$, а дополнительные условия (3.10) для определения c_1 примут вид

$$\int_{-1}^{1}\frac{f_-'(\xi)\operatorname{cn}\mu\xi}{X(\xi)}d\xi = 0 \tag{4.5}$$

Для четного варианта случая 2 имеем

$$\varphi_+(x) = \frac{\operatorname{cn}\mu x}{\pi X(x)}\left[P - \mu\int_{-1}^{1}\frac{X(\xi)f_+'(\xi)\operatorname{dn}\mu\xi}{W(\xi,\ x)}d\xi\right] \tag{4.6}$$

причем добавочное соотношение (3.8) примет вид

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_+(\xi)\operatorname{dn}\mu\xi}{Z(\xi)}\ln\frac{1+Z(\xi)}{1-Z(\xi)}d\xi = \pi\mu f_+(0),\quad Z(x) = \sqrt{1-e^2\operatorname{sn}^2\mu x} \tag{4.7}$$

При условиях (3.10) для четного варианта случая 2 имеем

$$\varphi_+(x) = -\frac{\mu\operatorname{cn}\mu x}{\pi}X(x)\int_{-1}^{1}\frac{f_+'(\xi)\operatorname{dn}\mu\xi}{X(\xi)W(\xi,\ x)}d\xi \tag{4.8}$$

Соотношение (4.7) здесь сохраняет силу, а дополнительные условия (3.10) примут вид

$$P + \mu\int_{-1}^{1}\frac{f_+'(\xi)\operatorname{sn}\mu\xi\operatorname{dn}\mu\xi}{X(\xi)}d\xi = 0 \tag{4.9}$$

Для нечетного варианта случая 1 нужно в (4.6) положить $P = 0$ и заменить $f_+'(\xi)$ на $f_-'(\xi)$. При условиях (3.10) для нечетного варианта случая 1 нужно в (4.8) заменить $f_+'(\xi)$ на $f_-'(\xi)$, а дополнительные условия (3.10) примут вид

$$\int_{-1}^{1}\frac{f_-'(\xi)\operatorname{dn}\mu\xi}{X(\xi)}d\xi = 0 \tag{4.10}$$

α	$\beta = 2$	4	8
$\pi/9$	0,369	0,267	0,174
$2\pi/9$	0,490	0,326	0,197
$\pi/3$	0,599	0,372	0,213
$4\pi/9$	0,701	0,410	0,225

Заметим, что когда $f_+(x) \equiv f_+ = \mathrm{const}$, то с учетом соотношений [5] (3.152(7), 4.317(10)) из формул (4.1), (4.2), (4.6), (4.7) для четных вариантов случаев 1 и 2 соответственно будем иметь [12]

$$\varphi_+(x) = \frac{\mu f_+ \operatorname{dn} \mu x}{\mathrm{K}(\sqrt{1-c^2})X(x)}, \quad N_0 = \frac{2 f_+ \mathrm{K}(c)}{\mathrm{K}(\sqrt{1-c^2})} \tag{4.11}$$

$$\varphi_+(x) = \frac{\mu f_+ \operatorname{cn} \mu x}{\mathrm{K}(\sqrt{1-e^2c^2})X(x)}, \quad N_0 = \frac{2 f_+ \mathrm{K}(ec)}{\mathrm{K}(\sqrt{1-e^2c^2})}$$

где N_0 – интегральная характеристика, определяемая по формуле

$$N_0 = \int_{-1}^{1} \varphi_+(\xi) d\xi \tag{4.12}$$

5. Рассмотрим антиплоскую задачу о деформации защемленного по основанию упругого слоя толщины h периодической системой одинаковых полосовых штампов. Пусть период равен $2b$, ширина одного штампа $2a (a < b)$, между штампами и верхней поверхностью слоя осуществляется полное сцепление.

Если штампы сдвигаются вдоль образующих касательными усилиями T, направленными попеременно в разные стороны, то задачу можно привести к случаю 1 интегрального уравнения (1.1), (1.2), а если штампы сдвигаются в одну сторону, то – к случаю 2 интегрального уравнения (1.1), (1.2) [1, 4]. При этом в уравнении

$$\varphi_+(x) = \frac{\tau(ax)}{G}, \quad L(\upsilon) = \operatorname{th}\upsilon, \quad \alpha = \frac{\pi a}{b}, \quad \beta = \frac{\pi h}{b}, \quad f(x) \equiv f_+ = \frac{\varepsilon}{a} \tag{5.1}$$

где $\tau(\eta)$ – контактное касательное напряжение, G – модуль сдвига, ε – величина перемещения каждого штампа по образующей под действием приложенного к нему усилия T.

Очевидно, решение такой задачи для случаев 1 и 2 будет даваться формулами (4.11), в которых величина e определяется из уравнения (1.8) при $\gamma = \beta$, а $N_0 = T/(Ga)$.

Рассмотрим антиплоскую задачу о деформации защемленной по внешней границе упругой трубы цилиндрическим полосовым штампом. Пусть внешний и внутренний радиусы трубы соответственно a и b, между штампом и внутренней поверхностью трубы осуществляется полное сцепление, угол контакта штампа с поверхностью трубы $2\alpha_0$. Штамп сдвигается вдоль своей образующей касательным усилием T.

Такая задача приводится к случаю 2 интегрального уравнения (1.1), (1.2) [13]. При этом в уравнении

$$\varphi_+(x) = \frac{\tau(\alpha x)}{G}, \quad L(\upsilon) = \operatorname{th}\upsilon, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \ln\frac{b}{a}, \quad f(x) \equiv f_+ = \frac{\varepsilon}{\alpha_0 a} \tag{5.2}$$

Решение задачи дается двумя последними формулами (4.11), в которых величина e определяется из уравнения (1.8) при $\gamma = \beta$, а $N_0 = T/(G\alpha_0 a)$. В таблице даны значения коэффициента сопротивления $V = T/(G\varepsilon)$ для ряда значений параметров α и β.

Автор благодарит Т.М. Ступину за проведенные расчеты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00133а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Периодические контактные задачи для упругой полосы // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 4. С. 18–33.
2. *Александров В.М.* Аналитические методы решения задач теории упругости для тел конечных размеров с собственно смешанными граничными условиями // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1979. С. 21–27.
3. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Контактные задачи для полосовых, цилиндрических, клиновидных и конусообразных областей // Статистические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983. С. 5–19.
4. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
6. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
7. *Иванов В.В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1968. 287 с.
8. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
9. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
10. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
11. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
12. *Коваленко Е.В., Тарасов Д.Г., Чебаков М.И.* Точное решение антиплоской контактной задачи для конечных канонических областей // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 837–841.
13. *Александров В.М., Чебаков М.И.* О методе однородных решений в смешанных задачах теории упругости для усеченного клина и кольцевого сектора // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 790–798.

Москва

Поступила в редакцию
29.II.1996