

УДК 533.6.011

© 1997 г. А.Н. Крайко, Д.Е. Пудовиков

**О РОЛИ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ДЛИНУ
ПРИ ПОСТРОЕНИИ ТЕЛ МИНИМАЛЬНОГО
СОПРОТИВЛЕНИЯ**

На примере симметричных профилей, реализующих при обтекании сверхзвуковым потоком минимум волнового сопротивления, показана ключевая роль ограничения на длину профилируемого тела. Из-за него оптимальные тела могут содержать торцы, появляющиеся как участки краевого экстремума. По предположению, задние торцы газом не обтекаются, а "донное" давление p^+ , действующее на них, задано и не зависит от формы искомой образующей и от ординаты y . При построении профилей, кроме их длины, обычно задаются площадь продольного сечения F и другие изопериметрические условия. Даже при $p^+ = 0$, чего, естественно, не бывает, задний торец необходимо вводить уже для весьма малых F . При $p^+ > 0$ торец появляется еще раньше. Замена оптимальных образующих с задним торцом на "псевдооптимальные" с острой кромкой ведет к росту сопротивления на десятки и сотни процентов. Особое внимание уделено случаям, в которых p^+ , например из-за подвода тепла в донную область, превышает давление набегающего потока p_∞ . Здесь задний торец есть всегда, а при $F < F_0$, где F_0 зависит от p^+/p_∞ , форма оптимальных образующих такая же, как в задаче без заданного F . При этом оптимальная конфигурация представляет собой полулю или частично полулю "галочку".

Для осесимметричных головных частей минимального волнового сопротивления наличие переднего торца установлено еще Ньютоном. Необходимость такого же торца для достаточно толстых головных частей плоских тел показана в [1]. Для оптимальных головных частей заданного объема ограничение на максимальную величину осевой координаты (при отсутствии таковой – на ее минимальную величину, а следовательно, и на длину головной части) ведет к появлению торца иного типа: обращенной к набегающему потоку торцевой части заданного тела с выступающим из нее острием [2]. При профилировании оптимальных сопел и кормовых частей задние торцы, являющиеся участками краевого экстремума, введены в [3].

Если при профилировании головных и кормовых частей и сопел торцы давно стали привычной принадлежностью оптимальных образующих [1–4], то в задачах построения замкнутых тел это далеко не так. До сих пор в подобных задачах задние торцы, если и вводились, то не в качестве участков краевого экстремума, а ввиду их физической целесообразности. В том смысле показательны работа [5] и сборник [6], в первой из которых достигнуто, пожалуй, наибольшее продвижение в данном направлении. В [5] при оптимальном профилировании тонких симметричных профилей в рамках линейной теории сверхзвуковых течений размер торца и условие его появления получены из решения вариационной задачи. Однако условия оптимальности торца как участка краевого экстремума не выписывались и не обсуждались, а его введение вслед за цитируемыми в [5] предшественниками объяснялось физическими соображениями. В работе [7] сборника [6] в той же задаче возможность появления заднего торца при наличии ссылки на [5] просто игнорируется.

В других работах сборника [6] задний торец появлялся у тел, реализующих минимум коэффициента волнового сопротивления C_x в рамках закона сопротивления Ньютона. При этом давление p^+ , действующее на затененную часть тела, без каких-либо оговорок, в согласии с формулой Ньютона, принималось равным p_∞ . Одновременно нигде не оговаривалось само наличие торца, что вместе с отсутствием в формуле для C_x слагаемого с давлением $p^+ = p_\infty$, действующим на торец, практически полностью маскировало его присутствие. В результате читателю нелегко заметить, что речь идет обо всем теле, а не о его головной части. При такой маскировке наличия торцов не может быть и речи о них как об участках краевого экстремума и даже об их физической целесообразности. В таких условиях неизбежны ошибки, в силу которых задний торец, как в [8], появился при отсутствии ограничений на длину тела.

В обсуждавшихся выше примерах торцы присутствовали в вариационных задачах сверхзвуковой аэрогазодинамики. Особняком к ним стоят задачи построения плоских и осесимметричных тел, которые при заданных длине и площади F или объеме обтекаются дозвуковым потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с максимальным критическим числом Маха M_∞^* . При $M_\infty \leq M_\infty^*$ их $C_x = 0$. Как было установлено с помощью теорем сравнения [9, 10], образующие таких тел состоят из переднего и заднего торцов и соединяющей их звуковой линии тока. Торцы – участки краевого экстремума, появляющиеся из-за ограничения на длину. В рамках модели безотрывного обтекания давление и другие параметры на них переменны и находятся вместе с решением всей задачи профилирования.

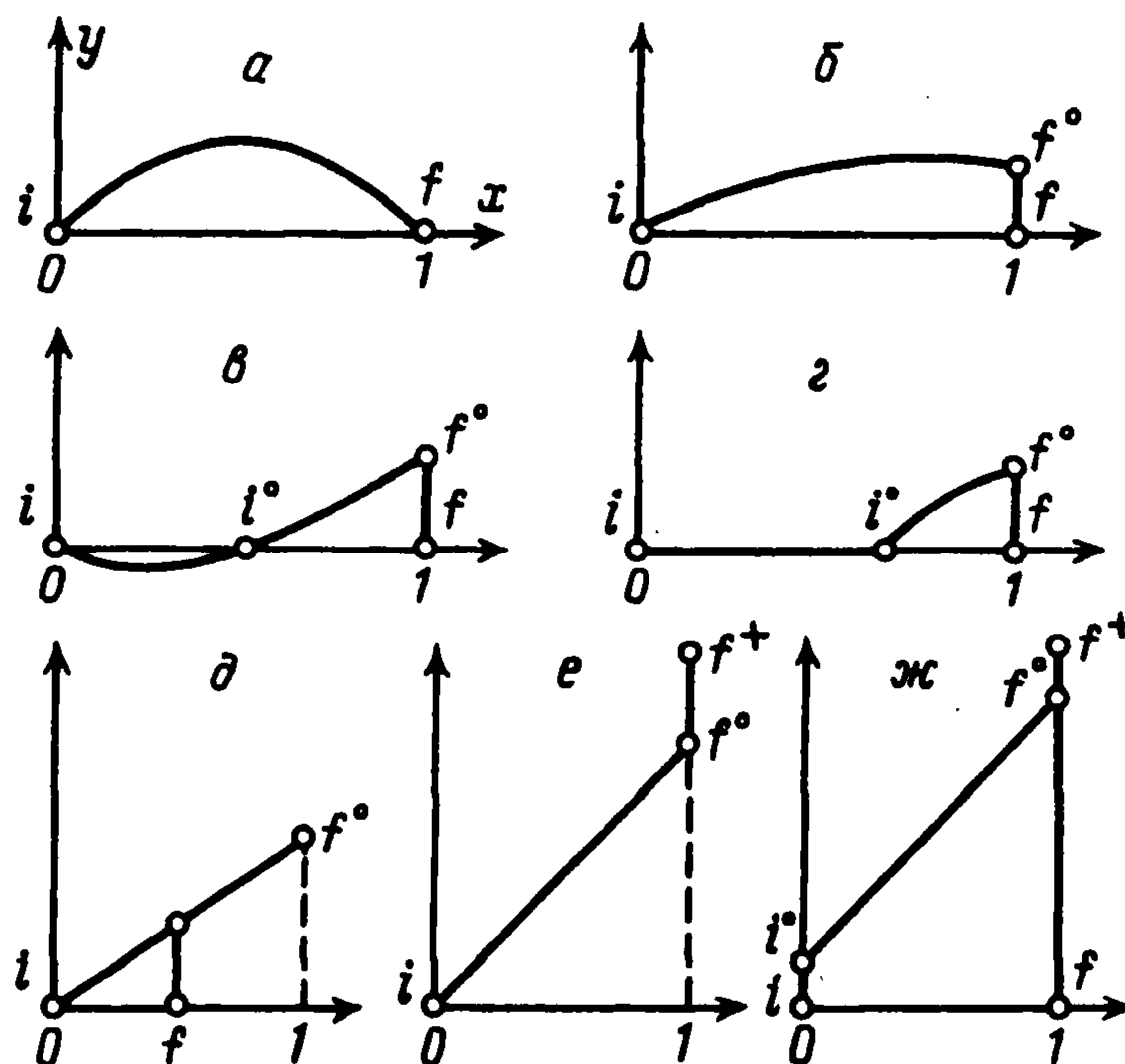
Ниже принят такой порядок изложения. В разд. 1 в рамках нескольких локальных моделей сформулирована решаемая далее вариационная задача. В разделе 2 для нее получены необходимые условия оптимальности, в том числе – условия оптимальности заднего торца как участка краевого экстремума. В разд. 3 условия разд. 2 применяются при построении профилей при одном изопериметрическом условии – заданной площади продольного сечения. При этом преимущества оптимальных тел с задним торцом, построенных в рамках локальных моделей, подтверждается численными расчетами в приближении уравнений Эйлера. В разд. 4 строятся не рассматривавшиеся ранее полые и частично полые "галочки" и тела со щитками, оптимальные при $p^+ > p_\infty$. В разд. 5 анализируются и исправляются ошибки и неточности ряда работ, авторы которых также вводили при построении оптимальных тел задние торцы. В заключение (разд. 6) приводятся соображения о важности задних торцов при построении тел минимального сопротивления, обтекаемых вязким газом (или жидкостью).

1. Формулировка вариационной задачи. Пусть x, y – декартовы координаты. Ось x направим по вектору скорости сверхзвукового набегающего потока V_∞ , начало координат совместим с передней точкой тела i , а за масштаб длины выберем заданную длину тела l . Тогда в концевой точке f верхней образующей симметричного относительно оси x тела с остроконечной задней кромкой (фиг. 1, а) $x_f = 1, y_f = 0$. Здесь и далее нижние индексы i, \dots приписываются параметрам в точках i, \dots , а ∞ – параметрам набегающего потока. Аналогично (фиг. 1, б) при наличии торца $f^o f$ на нем $x \equiv 1$. Как уже отмечалось, на торец действует не зависящее от формы образующей if^o и ординаты y донное давление p^+ . Если p^+ и давление p в любой точке if^o отнести к $\rho_\infty V_\infty^2$, где ρ – плотность газа, а $V = |V|$, то для коэффициента волнового сопротивления будем иметь

$$C_x = \int_{y_i=0}^{y_{f^o}} p dy - p^+ y_{f^o} \quad (1.1)$$

с давлением на профиле p , зависящим от формы образующей if^o . Здесь и далее C_x и другие интегральные характеристики определены для половины профиля.

Для целей настоящей работы достаточно ограничиться "локальными" моделями обтекания. Для таких моделей при заданном набегающем потоке давление в любой точке образующей if^o – известная функция угла ϑ между касательной к телу и осью x ,



Фиг. 1

т.е. $p = p(\vartheta)$. Если $x = x(y)$ – уравнение if° , а $x' = dx/dy$, то, согласно определению ϑ ,

$$E \equiv x' - \operatorname{ctg} \vartheta = 0 \quad (1.2)$$

При использовании закона сопротивления Ньютона, справедливого при $\vartheta \leq \pi/2$, в соответствии с принятым способом приведения давления к безразмерному виду имеем

$$p(\vartheta) = p_\infty + 1/2(1 + \operatorname{sign} \vartheta) \sin^2 \vartheta \quad (1.3)$$

Для совершенного газа $p_\infty = 1/(\kappa M_\infty^2)$, где κ – показатель адиабаты. Ограничение $\vartheta \leq \pi/2$ исключает на наветренной стороне тела выемки, с помощью которых можно было бы уменьшить C_x до нуля.

Другая локальная модель получается как комбинация закона сопротивления Ньютона (1.3) при $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ и решения для примыкающей к равномерному набегающему потоку простой волны разрежения при $\vartheta \leq 0$

$$p(\vartheta) = \begin{cases} p_\infty + \sin^2 \vartheta & \text{при } 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \\ P(\vartheta) & \text{при } \vartheta \leq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

$P(\vartheta)$ определяется по формулам для простой волны. Если s – удельная энтропия газа, $h = h(p, s)$ – удельная энтальпия – известная функция p и s , H – полная энтальпия и $\alpha = \arcsin(1/M)$ – угол Маха, то такая простая волна описывается соотношениями [11]

$$2h[P(\vartheta), s_\infty] + V^2 = 2H = \frac{2}{(\kappa - 1)M_\infty^2} + 1, \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s$$

$$I(\vartheta, p) \equiv \vartheta - \int_{p_\infty}^{P(\vartheta)} \frac{dp}{A(p)} = \vartheta - \frac{\pi}{2} + \alpha + \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}} \operatorname{ctg} \alpha \right) = I_\infty = 0 \quad (1.5)$$

$$A(p) = \frac{\rho V^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \equiv \frac{\rho V^2}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad M^2 = \frac{V^2}{a^2}, \quad \frac{1}{a^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = -\rho^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial p^2} \right)_s$$

Здесь I – инвариант Римана, отвечающий C^- -характеристикам; вторые формулы для $2H$ и I записаны для совершенного газа; ρ и a , выражающиеся через производные от h , как и h – известные функции p и s . Соотношения (1.5) дают неявную зависимость

$p = P(\vartheta)$. Эта зависимость взаимнооднозначна, так как, в силу формулы для ϑ ,

$$p_{\vartheta} \equiv \frac{dP(\vartheta)}{d\vartheta} = A(p) \geq 0 \quad (1.6)$$

с равенством только при $M \rightarrow \infty$, когда $V^2 \rightarrow 2H$, а $p \rightarrow 0$. Согласно (1.5) $P(0) = p_{\infty}$ и, следовательно, определяемая равенствами (1.4) функция $p(\vartheta)$ при $\vartheta = 0$ непрерывна при разрывных первой и последующих производных по ϑ . Для отрицательных ϑ в соответствии с неравенством (1.6) $p(\vartheta) < p_{\infty}$, что обеспечивает несколько большую точность модели (1.4) в сравнении с исходной моделью Ньютона (1.3).

При получении формул (1.5) не учитывались неизэнтропичность течения и отличие инварианта I от $I_{\infty} = 0$. Если головная ударная волна, присоединенная к заостренной передней кромке тела, слабая, то, как известно [11, 12], приращения s и I при переходе через нее – величины порядка куба приращения давления. Поэтому для сравнительно тонких тел, а также при небольших сверхзвуковых числах Маха набегающего потока (при условии, что поток за головным скачком сверхзвуковой) локальная модель

$$p(\vartheta) = P(\vartheta) \quad (1.7)$$

с $P(\vartheta)$ из (1.5) с точностью до ϑ^2 включительно справедлива для всей образующей if° . Линеаризация (1.5)–(1.7), предполагающая малость ϑ^2 , дает также справедливую на if° , но теперь с точностью только до ϑ включительно известную формулу линейной теории

$$p = p_{\infty} + \frac{\vartheta}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (1.8)$$

Здесь, как и всюду выше, давление отнесено к $\rho_{\infty} V_{\infty}^2$.

Если задана только длина тела, а $p^+ \leq p_{\infty}$, то решение задачи о построении образующей if , реализующей минимум C_x , тривиально. В приближении любой из описанных выше локальных моделей, а также в рамках полной системы уравнений Эйлера оно дается отрезком $0 \leq x \leq 1$ оси x , т.е. тело минимального волнового сопротивления – пластина и $C_x = 0$.

Пусть наряду с заданием длины профилируемое тело должно удовлетворять N изопериметрическим условиям, в частности, геометрического характера, которые записываются в форме

$$F^n = \int_{y_i=0}^{y_f^{\circ}} \Phi^n(p, \vartheta, x, y) dy - \int_{y_f=0}^{y_f^{\circ}} \varphi^n(p^+, x, y) dy, \quad n = 1, \dots, N \quad (1.9)$$

Здесь F^n – заданные постоянные, Φ^n и φ^n – известные функции своих аргументов. Конечно, φ^n может зависеть и от ϑ , но для целей данного исследования достаточно ограничиться $\varphi^n(p^+, x, y)$. Гораздо важнее, что в (1.9), как и в (1.1), необходимо включать интегралы по возможному, хотя и не всегда присутствующему в оптимальной конфигурации торцу $f^{\circ}f$, причем при записи изопериметрических условий в таких интегралах не следует заменять x на единицу.

2. Необходимые условия оптимальности. Для получения необходимых условий оптимальности составим функционал Лагранжа

$$I = \int_{y_i=0}^{y_f^{\circ}} [\Phi(p, \vartheta, x, y, \mu) + \lambda E] dy - \int_{y_f=0}^{y_f^{\circ}} \varphi(p^+, x, y, \mu) dy$$

$$\Phi(p, \vartheta, x, y, \mu) = p(\vartheta) + \sum_{n=1}^N \mu^n \Phi^n(p, \vartheta, x, y)$$

$$\varphi(p^+, x, y, \mu) = p^+ + \sum_{n=1}^N \mu^n \varphi^n(p^+, x, y)$$

в котором μ^n – постоянные, а $\lambda = \lambda(y)$ – переменный неопределенные множители Лагранжа, μ – N -мерный вектор с компонентами μ^n , а E – левая часть уравнения (1.2). Любую образующую, дающую тело заданной длины с торцом $f^\circ f$ или без него и удовлетворяющую условиям (1.2) и (1.9), назовем допустимой. При варьировании, когда исходная (необязательно оптимальная) и проварьированная образующие являются допустимыми (другие способы варьирования, естественно, не рассматриваются), вариации I и C_x совпадают. В общем случае оптимальная образующая тела фиксированной длины может включать не только задний, но и передний торец, что должно предусматриваться при записи выражения для C_x , условий (1.9) и функционала Лагранжа.

С учетом сказанного выше и выражений для I и E при допустимом варьировании заостренной в точке i и либо заостренной в точке f , либо имеющей задний торец образующей if имеем

$$\delta C_x = \delta I = X^{f^\circ} \Delta x_{f^\circ} + Y^{f^\circ} \Delta y_{f^\circ} + \int_{y_i=0}^{y_{f^\circ}} (A^x \delta x + A^\vartheta \delta \vartheta) dy - \int_{y_f=0}^{y_{f^\circ}} A^+ \delta x dy \quad (2.1)$$

Здесь Δx_{f° и Δy_{f° – приращения координат точки f° , а при отсутствии торца, когда $f^\circ \equiv f$, – точки f ; δx и $\delta \vartheta$ – вариации, т.е. приращения x и ϑ проварьированной и исходной образующей при фиксированной ординате y ; X^{f° , Y^{f° , A^x , A^ϑ и A^+ – известные функции x , y , $p = p(\vartheta)$, ϑ , p^+ и множителей Лагранжа в соответствующих точках. Для тел без заднего торца здесь и далее f° заменяется на f . В силу этого для таких тел в (2.1) отсутствует последний интеграл.

При варьировании любой допустимой образующей, пользуясь произволом в выборе переменного множителя Лагранжа λ , можно обратить в нуль коэффициент A^ϑ на if° . С учетом выражения для A^ϑ это даст для определения λ конечное уравнение

$$\lambda = -(\Phi_\vartheta + \Phi_p p_\vartheta) \sin^2 \vartheta, \quad \Phi_\vartheta = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)_{p,x,y}, \quad \Phi_p = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{\vartheta,x,y} \quad (2.2)$$

в котором $p_\vartheta = dp/d\vartheta$ находится в соответствии с используемой локальной моделью.

После этого в (2.1) остаются только слагаемые, пропорциональные Δx_{f° и Δy_{f° , и интегралы от вариаций δx на if° и $f^\circ f$. Интеграл по $f^\circ f$ есть в (2.1), разумеется, только тогда, когда исходная образующая имеет торец. При наличии N изопериметрических условий указанные приращения и вариации не являются независимыми. Их независимость достигается введением на участке if° образующей тела N "компенсирующих" точек k_n и определением постоянных множителей Лагранжа μ^1, \dots, μ^N из линейной системы, которая получается, если в точках k_n положить

$$A^x \equiv \Phi_x - \lambda' = 0, \quad \Phi_x = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{p,\vartheta,y} \quad (2.3)$$

с производной $\lambda' = d\lambda/dy$, найденной для исходного контура дифференцированием правой части (2.2).

Выполнение равенств (2.3) пока только в точках k_n позволяет при варьировании x в окрестности любой точки образующей if за счет одновременного варьирования x в малых окрестностях точек k_n сохранять величину всех заданных в (1.9) функционалов. Благодаря выбору μ , варьирование x в малых окрестностях точек k_n вносит в вариацию C_x вклад более высокого порядка, чем δx в других точках if , а также Δx_{f° и

Δy_{f^0} . Поэтому δx , Δx_{f^0} и Δy_{f^0} теперь можно считать независимыми. Следовательно, если участок образующей if^0 , на котором δx произвольны, реализует минимум C_x , то равенство (2.3) должно выполняться не только в компенсирующих точках, но всюду на if^0 .

Если оптимальное тело имеет торец, то допустимые Δy_{f^0} произвольны. При отсутствии торца точки f и f^0 совпадают и допустимые $\Delta y_{f^0} \geq 0$. Кроме того, в обоих случаях $\Delta x_{f^0} \leq 0$. Если образующая if^0 оптимальна, то при любом допустимом варьировании $\delta C_x \geq 0$. С учетом возможных знаков Δy_{f^0} и Δx_{f^0} условия оптимальности, которые должны выполняться в точке f^0 , совпадающей или не совпадающей с f , сводятся к двум неравенствам

$$Y^{f^0} \equiv (\Phi - \varphi - \lambda \operatorname{ctg} \vartheta)_{f^0} \geq 0, \quad X^{f^0} \equiv \lambda_{f^0} \leq 0$$

После исключения λ с помощью уравнения (2.2) они принимают вид

$$[\Phi - \varphi + (\Phi_\vartheta + \Phi_p p_\vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta]_{f^0} \geq 0 \tag{2.4}$$

$$(\Phi_\vartheta + \Phi_p p_\vartheta)_{f^0} \sin^2 \vartheta_{f^0} \geq 0$$

где величины, кроме φ , – предельные значения при подходе к точке f^0 слева вдоль if^0 , а $\varphi_{f^0} = \varphi(p^+, 1, y_{f^0}, \mu)$.

Нарушение первого неравенства (2.4) в точке $f^0 \equiv f$ тела без торца указывает на необходимость его введения. Для тел без торца выполнение второго неравенства (2.4) указывает на то, что при уменьшении длины тела C_x увеличивается. Для тел с торцом то же неравенство есть условие того, что торец $f^0 f$ является участком краевого экстремума. На самом торце допустимые $\delta x \leq 0$. Поэтому еще одно условие того, что торец – участок краевого экстремума по x , сводится к неравенству

$$A^+ \equiv \varphi_x(p^+, 1, y, \mu) \geq 0 \tag{2.5}$$

Исключив λ из (2.2) и (2.3), приходим к уравнению для определения оптимальной образующей (OO) , т. е. функции $x = x(y)$

$$[(\Phi_\vartheta + \Phi_p p_\vartheta) \sin^2 \vartheta]' + \Phi_x = 0 \tag{2.6}$$

Второй порядок этого уравнения делает возможным (по крайней мере в принципе) построение участка $if^0 OO$, которая, выходя из точки i с координатами $x = y = 0$, реализует минимум C_x . При этом второй произвол для тела без торца используется для того, чтобы искомая образующая пришла в точку $f^0 \equiv f$ с координатами $x_f = 1$, $y_f = 0$. Как уже отмечалось, построенная образующая оптимальна только при выполнении в точке f неравенств (2.4). Если же для нее нарушается первое неравенство (2.4), то OO содержит торец, размер которого, т. е. y_{f^0} определяется условием

$$[\Phi - \varphi + (\Phi_\vartheta + \Phi_p p_\vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta]_{f^0} = 0 \tag{2.7}$$

Напротив, если при выполнении первого неравенства из (2.4) нарушается второе, то оптимальная длина тела без торца, т. е. величина $x_f < 1$ определяется при $y_f = 0$ условием

$$(\Phi_\vartheta + \Phi_p p_\vartheta)_f \sin^2 \vartheta_f = 0 \tag{2.8}$$

Хотя в этих условиях одна из координат концевой точки участка if^0 или всей OO if , определяемых уравнением (2.6), неизвестна и находится с помощью условий (2.7) и

(2.8), второй порядок уравнения (2.6) обеспечивает приход начального участка или всей искомой образующей соответственно в точку f^0 или f . Наконец, подбор входящих в уравнение (2.6) неопределенных постоянных множителей Лагранжа, по крайней мере в принципе, позволяет удовлетворить все изопериметрические условия (1.9).

3. Оптимальный профиль при заданной площади продольного сечения. В качестве примера рассмотрим задачу с одним изопериметрическим условием – заданной площадью продольного сечения, отнесенной к квадрату длины тела,

$$F = \int_{y_i=0}^{y_{f^0}} (1-x)dy - \int_{y_f=0}^{y_{f^0}} (1-x)dy \quad (3.1)$$

Заметим, кстати, что площадь F одновременно определяет объем, приходящийся на единицу ширины профиля.

Хотя на торце f^0f , где $x = 1$, второе слагаемое в (3.1) равно нулю, согласно сказанному ранее, оно включено в формулу для F , чтобы учесть вклад в δC_x варьирования торца, на котором допустимые $\delta x \leq 0$. В рассматриваемом примере имеем

$$\Phi = p(\vartheta) + \mu(1-x), \quad \varphi = p^+ + \mu(1-x) \quad (3.2)$$

с единственным постоянным множителем Лагранжа μ . Подставив (3.2) в уравнение (2.6), найдем, что участок $if^0 OO$ определяется уравнением

$$(p_\vartheta \sin^2 \vartheta)' = \mu \quad (3.3)$$

Для тела без торца условия (2.4) принимают форму

$$[p(\vartheta) - p^+ + p_\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta]_f \geq 0, \quad (p_\vartheta \sin^2 \vartheta)_f \geq 0 \quad (3.4)$$

В рассмотренных выше локальных моделях второе неравенство выполняется всегда, становясь равенством для модели Ньютона (1.3) при $\vartheta_f \leq 0$, а для других моделей только при $\vartheta_f = 0$.

Условие (2.7), определяющее при нарушении для тела без торца первого неравенства из (3.4) оптимальную ординату $y_{f^0} > 0$, записывается так:

$$[p(\vartheta) - p^+ + p_\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta]_{f^0} = 0 \quad (3.5)$$

Наконец, для тела с торцом второе неравенство из (3.4) с заменой f на f^0 вместе с получающимся из (2.5) для (3.1) неравенством

$$\mu \leq 0 \quad (3.6)$$

являются необходимыми условиями того, что торец – участок краевого экстремума по x .

Для модели Ньютона (1.3) уравнение (3.3), определяющее форму if^0 , принимает вид

$$[(1 + \text{sign } \vartheta) \cos \vartheta \sin^3 \vartheta]' = \mu \quad (3.7)$$

Отсюда сразу следует, что в рамках данной модели OO не может содержать отличного от торца подветренного участка с отрицательными $\vartheta > -\pi/2$. Поэтому при $F > 0$ ордината y_{f^0} положительна, $\vartheta_{f^0} \geq 0$, и оптимальное тело обязательно содержит торец. Последнее понятно, так как в силу (1.3) на подветренной стороне образующей $p \equiv p_\infty$ вне зависимости от величины ϑ , а на наветренной тем больше, чем больше ϑ . Поэтому в рамках модели (1.3) протяженность по x наветренной стороны образующей нужно делать максимально возможной ($x_{f^0} = 1$), что автоматически уменьшает ϑ и p на ней.

Именно такой результат получался в тех работах сборника [6], в которых в рамках формулы Ньютона строились плоские и осесимметричные тела минимального сопро-

тивления в случаях, когда среди заданных геометрических характеристик отсутствовала полувысота симметричного плоского тела или радиус тела вращения. Правда, как уже отмечалось, авторы указанных работ, вводя задний торец, не только не показывали, что торец появляется как участок краевого экстремума по x , но вообще умалчивали о его наличии.

В рамках модели (1.3) неравенство $p^+ < p_\infty$ не имеет смысла, что, кстати, согласуется и с условием (3.5), которое при $\vartheta_{f^0} \geq 0$ может выполняться лишь для $p^+ \geq p_\infty$. Как уже упоминалось, в [6] p^+ молчаливо полагалось равным p_∞ . В отличие от этого ниже допускается, что $p^+ \geq p_\infty$. Последнее может быть результатом специальных воздействий типа подвода тепла в донную область, а при $M_\infty \gg 1$ для сравнительно толстых тел [13] $p^+ > p_\infty$ и в отсутствие таких воздействий. Условие (3.5), определяющее при $p^+ \geq p_\infty$ неотрицательное ϑ_{f^0} , для $p(\vartheta)$ из (1.3) принимает вид

$$\sin^2 \vartheta_{f^0} (1 + 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta)_{f^0} = N \equiv p^+ - p_\infty = \left(\frac{p^+}{p_\infty} - 1 \right) \frac{1}{\kappa M_\infty^2} \quad (3.8)$$

причем второе выражение для N относится к совершенному газу.

Разрешив уравнение (3.8) относительно $q_{f^0} \equiv \operatorname{tg} \vartheta_{f^0}$, найдем, что

$$q_{f^0} = \left(\frac{3 - \sqrt{9 - 8N}}{1 + \sqrt{9 - 8N}} \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

Как и в [2], уравнение (3.7) интегрируется, после чего для if^0 получается параметрическое представление

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{1}{\mu} \left[\frac{1 - q_{f^0}^2}{(1 + q_{f^0}^2)^2} - \frac{1 - q^2}{(1 + q^2)^2} \right] \\ y &= y_{f^0} + \frac{2}{\mu} \left[\frac{q^3}{(1 + q^2)^2} - \frac{q_{f^0}^3}{(1 + q_{f^0}^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь в силу (3.6) $\mu \leq 0$, параметр $q = \operatorname{tg} \vartheta$ монотонно уменьшается от $q_i > q_{f^0}$ до q_{f^0} из (3.9), q_i выражается через μ и q_{f^0} из первого равенства (3.10) с $x_i = 0$, а множитель μ после этого подбирается таким, чтобы найденная с помощью формул (3.10) площадь продольного сечения была равна заданной величине F . Участок образующей if^0 выпуклый, причем, согласно [2], $q \leq 1$. Если q_i оказывается больше единицы, то OO содержит два торца $x = 1$ и $x = 0$, что отвечает весьма большим F .

Для комбинированной модели (1.4)–(1.6) наветренный участок образующей с $\vartheta \geq 0$, как и в модели (1.3), определяется уравнением (3.7). Плавно примыкающий к нему в точке $\vartheta = 0$ подветренный участок с $\vartheta \leq 0$, если такой имеется, удовлетворяет уравнению

$$(\rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \vartheta)' = \mu \quad (3.11)$$

которое в силу (1.5) и (1.6), как и (3.7), является дифференциальным уравнением второго порядка относительно $x = x(y)$.

Для тел с острой задней кромкой, где $\vartheta_f \leq 0$, теперь должны выполняться неравенства

$$(p - p^+ + \rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta \cos \vartheta)_f \geq 0, \quad (\rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \vartheta)_f \geq 0 \quad (3.12)$$

Второе из них выполняется всегда, становясь равенством только при $\vartheta_f = 0$. В

противоположность этому, первое может нарушиться даже при $p^+ = 0$, когда для совершенного газа

$$(p - p^+ + \rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta \cos \vartheta)_f = p_f \left(1 + \frac{\kappa M^2 \sin 2\vartheta}{2\sqrt{M^2 - 1}} \right)_f$$

Второе слагаемое в скобках, будучи для тела без торца отрицательным, растет по модулю с ростом числа Маха M_f и площади F . В конце концов его модуль обязательно превзойдет единицу. При $p^+ > 0$ первое условие (3.12) нарушается еще раньше. С этого момента y_{f^0} будет определяться условием

$$(p - p^+ + \rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta \cos \vartheta)_{f^0} = 0 \quad (3.13)$$

а условия того, что $f^0 f$ – участок краевого экстремума по x , сводятся ко второму равенству (3.12) с f^0 вместо f и к неравенству (3.6). Модель (1.7) отличается от комбинированной лишь тем, что в ней уравнение (3.11) определяет и наветренную часть образующей. Наконец, можно показать, что в данной задаче условия (3.12) и (3.13) тождественны необходимым условиям минимума C_x , которые получаются в приближении уравнений Эйлера с помощью локального варьирования [4] оптимальной образующей в малой окрестности точек f и f^0 .

Для совершенного газа уравнение (3.11) в силу равенств (1.5) и (1.6) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \equiv \ddot{y} = \frac{\mu \operatorname{ctg} \alpha}{2\rho V^2 \cos^4 \alpha} \zeta^{-1}, \quad \zeta = 1 + \frac{4(1 - M^2) + (\kappa + 1)M^4}{4 \operatorname{ctg}^3 \alpha} \operatorname{tg} \vartheta \quad (3.14)$$

В интеграле по if^0 функционала Лагранжа в задаче с заданным F стоит выражение, линейное по x и x' и нелинейное по ϑ . Поэтому, например, в модели (1.7) при сохранении членов второго порядка в δC_x добавляется единственное слагаемое:

$$\delta C_x = \dots + \int_0^1 \rho V^2 \zeta \operatorname{tg} \alpha (\delta \vartheta)^2 dx$$

Следовательно, еще одно необходимое условие минимума C_x в этой модели имеет вид

$$\zeta \geq 0, \quad x \in [0, 1] \quad (3.15)$$

В силу (3.14) и (3.15) кривизна OO не меняет знака, а при $\mu = 0$ всюду равна нулю. Для оптимальных тел без торца из этого следует, что при $F \neq 0$ они выпуклы, ибо в противном случае ($\ddot{y} \geq 0$) лежащая над осью x образующая не может соединять точки i и f , принадлежащие этой оси. Отсюда же видно, что таким телам отвечают отрицательные μ . Для оптимальных тел с торцом соединить точку i с точкой f^0 , в которой $x_{f^0} = 1$, а $y_{f^0} > 0$, можно и выпуклой, и вогнутой кривой. То, что и здесь в модели (1.7) участок $if^0 OO$ выпуклый, а при $\mu = 0$ прямой, следует из (3.15) и (3.6). Таким образом, здесь необходимому условию того, что торец – участок краевого экстремума по x , принадлежит весьма важная роль.

При $\mu < 0$, когда угол ϑ при движении от i к f^0 или к f монотонно уменьшается, за независимую переменную, как и в модели (1.3), удобно взять $q = \operatorname{tg} \vartheta$. В этом случае уравнение (3.14) заменится на два интегрируемых в квадратурах уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dq} = f(q) \equiv \frac{2\rho V^2 \cos^4 \vartheta}{\mu \operatorname{ctg} \alpha} \zeta, \quad \frac{dy}{dq} = qf(q)$$

Все сказанное выше для подветренной ($\vartheta < 0$) части участка if^0 комбинированной модели справедливо для всего участка $if^0 OO$ в модели (1.7).

Уравнения и условия, определяющие OO в приближении линейной модели (1.8), практически сразу получаются линеаризацией в предположении, что $|\vartheta| \ll 1$, уравнений и условий (3.11)–(3.15). При этом линеаризованное уравнение (3.14) после интегрирования дает уравнение образующей if или if° в форме параболы

$$y = ax + bx^2 \quad (3.16)$$

с подлежащими определению постоянными a и b . При отсутствии торца данное уравнение, впервые полученное Друге [7], определяет параболу, симметричную относительно $x = 0,5$, с коэффициентами $a = -b = 6F$. Как было показано еще Чепмэном в [5], парабола (3.16) с такими a и b , т. е. решение [7] без торца даже при $p^+ = 0$ реализует минимум C_x лишь при очень малых F . По этой причине назовем его "псевдооптимальным". Условия, при которых оно, тем не менее, обеспечивает минимум C_x , получаются линеаризацией (3.12) и сводятся к выполнению двух неравенств

$$p_\infty - p^+ + \frac{\dot{y}_f}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = p_\infty \left(1 - \frac{p^+}{p_\infty} - \frac{12\kappa M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} F \right) \geq 0 \quad (3.17)$$

$$\dot{y}_f^2 = 36F^2 \geq 0$$

Второе неравенство (3.17) выполняется всегда. Первое же, как уже отмечалось, нарушается при весьма малых F . Так, минимальное значение коэффициента при F , получающееся при $M_\infty^2 = 2$, равно 24κ . При $M_\infty = \sqrt{2}$ и $\kappa = 1,4$, согласно [14], $p^+/p_\infty \approx 0,5$. Отсюда следует, что при таких M_∞ и κ первое неравенство (3.17) нарушается уже при $F \geq 0,015$, где площадь отнесена к квадрату длины. При меньших и при больших M_∞ оно нарушается для еще более тонких профилей. Разумеется, торец, как это впервые было сделано в [5], можно вводить и в рамках линейной модели. Условие, определяющее оптимальный размер торца, получается линеаризацией (3.13) и для совершенного газа сводится к формуле

$$\dot{y}_{f^\circ} = L \equiv \left(\frac{p^+}{p_\infty} - 1 \right) \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{2\kappa M_\infty^2} \quad (3.18)$$

Участок $if^\circ OO$ по-прежнему остается параболой (3.16). Однако теперь

$$a = 3F - 0,5L, \quad b = 0,75(L - 2F) \quad (3.19)$$

В рамках линейной модели оптимальное тело имеет торец, если, как следует из (3.17), заданная неотрицательная величина F превосходит минимальное значение $F_m = -L/6$.

Как и в модели Ньютона, для $p^+ \geq p_\infty$, когда $F_m \leq 0$, оптимальное тело имеет торец при любом $F > 0$.

Пусть $p^+ = p_\infty$. Тогда в силу (3.18) и (3.19), $L = 0$ и $a = -2b = 3F$. Воспользовавшись затем формулами (1.1), (1.8) и (3.16), найдем, что для OO с торцом в этом случае $\sqrt{M_\infty^2 - 1}C_x = 3F^2$. Аналогичный расчет для псевдооптимального тела без торца, для которого $a = -b = 6F$, дает $\sqrt{M_\infty^2 - 1}C_x = 12F^2$ при одинаковом вкладе его наветренной и подветренной частей. Таким образом, C_x псевдооптимальных тел при фиксированных F и $p^+ = p_\infty$ превосходит C_x оптимальных тел с торцом в четыре раза. Интересно, что, если для тех же тел рассчитать C_x по линеаризованному варианту формулы Ньютона, то и для них получается такое же четырехкратное превышение C_x тела без торца. Данный результат получается, несмотря на разную роль в линейной и в ньютоновской

моделях подветренной части тела. В ньютоновской модели согласно (1.3) весь вклад в C_x вносит только его наветренная часть.

Для тонких тел, однако, существенно, сопротивление трения, которое превышает волновое или соизмеримо с ним и почти не зависит от формы образующей. Важна лишь ее длина, в этих случаях практически равная длине тела. Поэтому найденное уменьшение сопротивления тонких тел с задним торцом, как и результаты работы [5], рассчитанные также по формулам линейной теории, на самом деле могут оказаться не столь внушительными. С учетом этих соображений было выполнено профилирование достаточно толстых тел. При этом, хотя само профилирование осуществлялось в рамках ньютоновской и линейной моделей, коэффициент волнового сопротивления C_x построенных тел затем рассчитывался численным интегрированием уравнений Эйлера с помощью монотонной разностной схемы второго порядка с выделением головной ударной волны.

Типичные результаты проведенных расчетов представлены на фиг. 2 и в таблице для тел с $F = (\text{tg}30^\circ)/6 = 1/(6\sqrt{3}) \approx 0,096$, обтекаемых совершенным газом с $\kappa = 1,4$ при разных p^+/p_∞ . Выбранное значение F отвечает весьма толстым телам. Например, симметричное относительно $x = 0,5$ псевдооптимальное тело, с параболической образующей при таком F имеет $\vartheta_i = -\vartheta_f = 30^\circ$ и полутолщину $\tau_0 = y(0,5) \approx 0,144$. Для тел с торцом сечение минимальной толщины располагается при x , либо равных, либо близких к единице, а величина τ близка к τ_0 .

В таблице даны коэффициенты волнового сопротивления C_{xL} , C_{xN} и C_{xD} тел с торцом, оптимальное профилирование которых осуществлялось в рамках линейной и ньютоновской моделей, соответственно, и упоминавшегося выше симметричного относительно $x = 0,5$ псевдооптимального тела без торца. Для C_x дано два значения: найденное численным интегрированием уравнений Эйлера, которое назовем "точным", и (в скобках) – определенное по формулам ньютоновской модели для C_{xN} и линейной – для C_{xL} и C_{xD} . В согласии со сказанным ранее при $p^+/p_\infty = 0$ ньютоновские OO не строились. Представлены также относительные отличия в процентах C_{xD} от C_{xL} , которые, как и сами C_x , рассчитывались по их точным и приближенным, т. е. найденным по линейной теории значениям (вторые – в скобках). Наконец, в двух последних строках приведены y_{f° , оптимальные для линейной и ньютоновской моделей. При рассмотренных значениях p^+/p_∞ они слабо зависят от величины донного давления, увеличиваясь с его ростом. Влияние p^+/p_∞ уменьшается с ростом числа Маха M_∞ . Последнее естественно, так как $p_\infty / (\rho_\infty V_\infty^2) = 1/(\kappa M_\infty^2)$ и при $M_\infty \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а вклад в C_x торца при p^+/p_∞ порядка единицы становится много меньше вклада наветренного участка образующей.

p^+/p_∞	0			1			2	
	3	6	12	3	6	12	6	12
$C_{xL} \times 10^4$	254	125	85	140	92	75	58	65
	(202)	(74)	(30)	(98)	(47)	(23)	(17)	(15)
$C_{xN} \times 10^4$				140	90	71	59	63
				(53)	(53)	(53)	(21)	(45)
$C_{xD} \times 10^4$	448	296	253	448	296	253	296	253
	(393)	(188)	(93)	(393)	(188)	(93)	(188)	(93)
$\Delta C_{xD}(\%)$	76	137	198	220	222	237	410	289
	(95)	(154)	(210)	(301)	(300)	(304)	(1005)	(520)
$y_{f^L} \times 10^3$	116	130	137	144	144	144	159	151
$y_{f^N} \times 10^3$				159	159	159	168	162

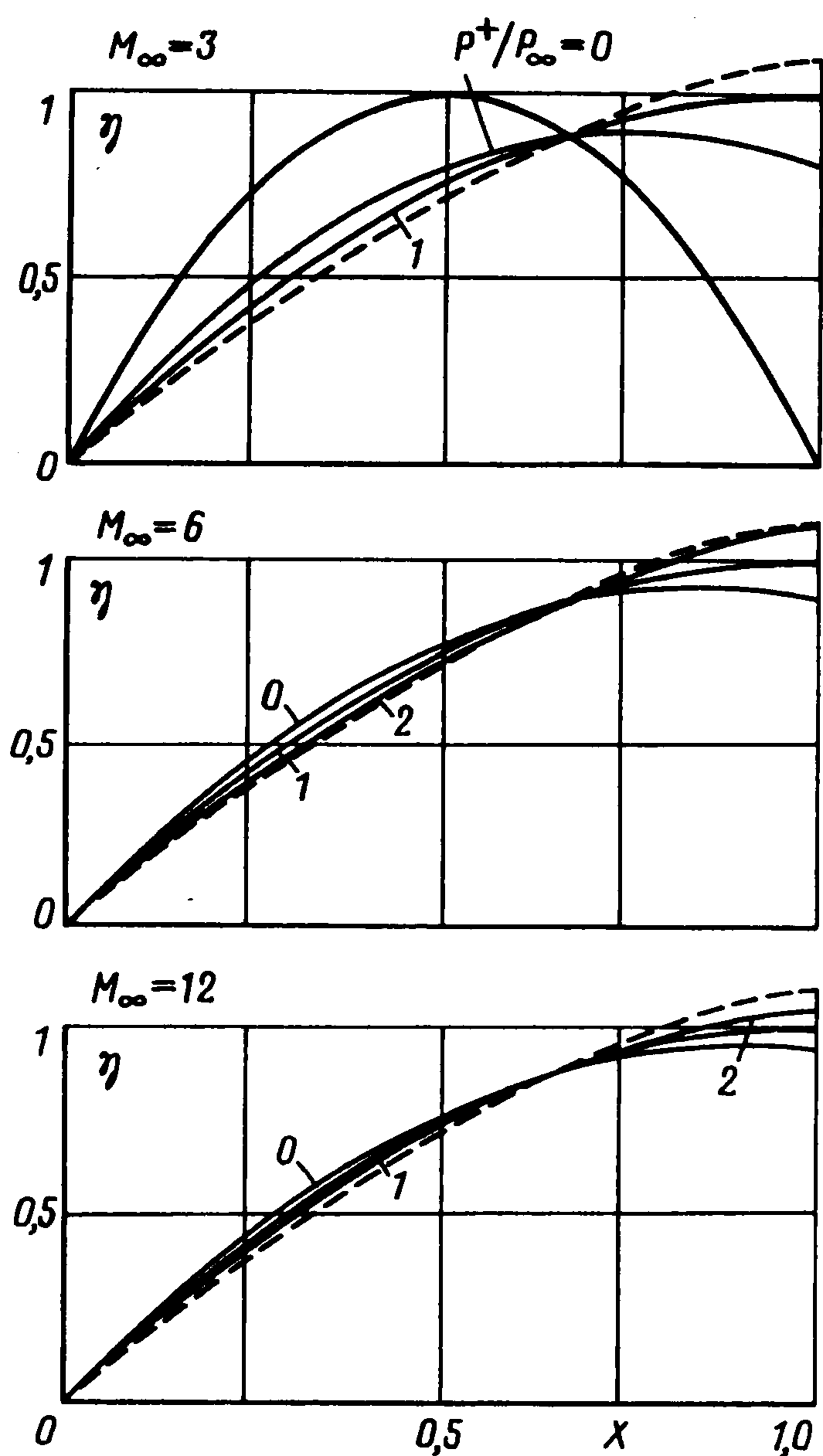
Слабую зависимость от p^+/p_∞ не только y_{f° , но и формы всей образующей демонстрируют фиг. 2, на которой для разных M_∞ сплошными кривыми даны образующие, оптимальные в рамках линейной модели для разных p^+/p_∞ (цифры около кривых), а $\eta = y/\tau_0$. Там же штрихами представлены OO для ньютоновской модели при $p^+=p_\infty$. Кроме того, на фиг. 2 вместе с OO , отвечающими $M_\infty = 3$, сплошной кривой дана образующая не зависящего от M_∞ и p^+/p_∞ псевдооптимального тела без торца.

Рассмотрение таблицы и фиг. 2 показывает, что несмотря на очень большие ошибки, получающиеся при определении C_x по приближенным моделям, построенные с их помощью OO близки по форме и особенно по точным значениям C_x , которые оказываются значительно меньше также точных значений C_x псевдооптимальных тел с острой задней кромкой. Близость точных результатов для OO , построенных с помощью обеих моделей, причем вне диапазона их ожидаемой работоспособности, представляется удивительной.

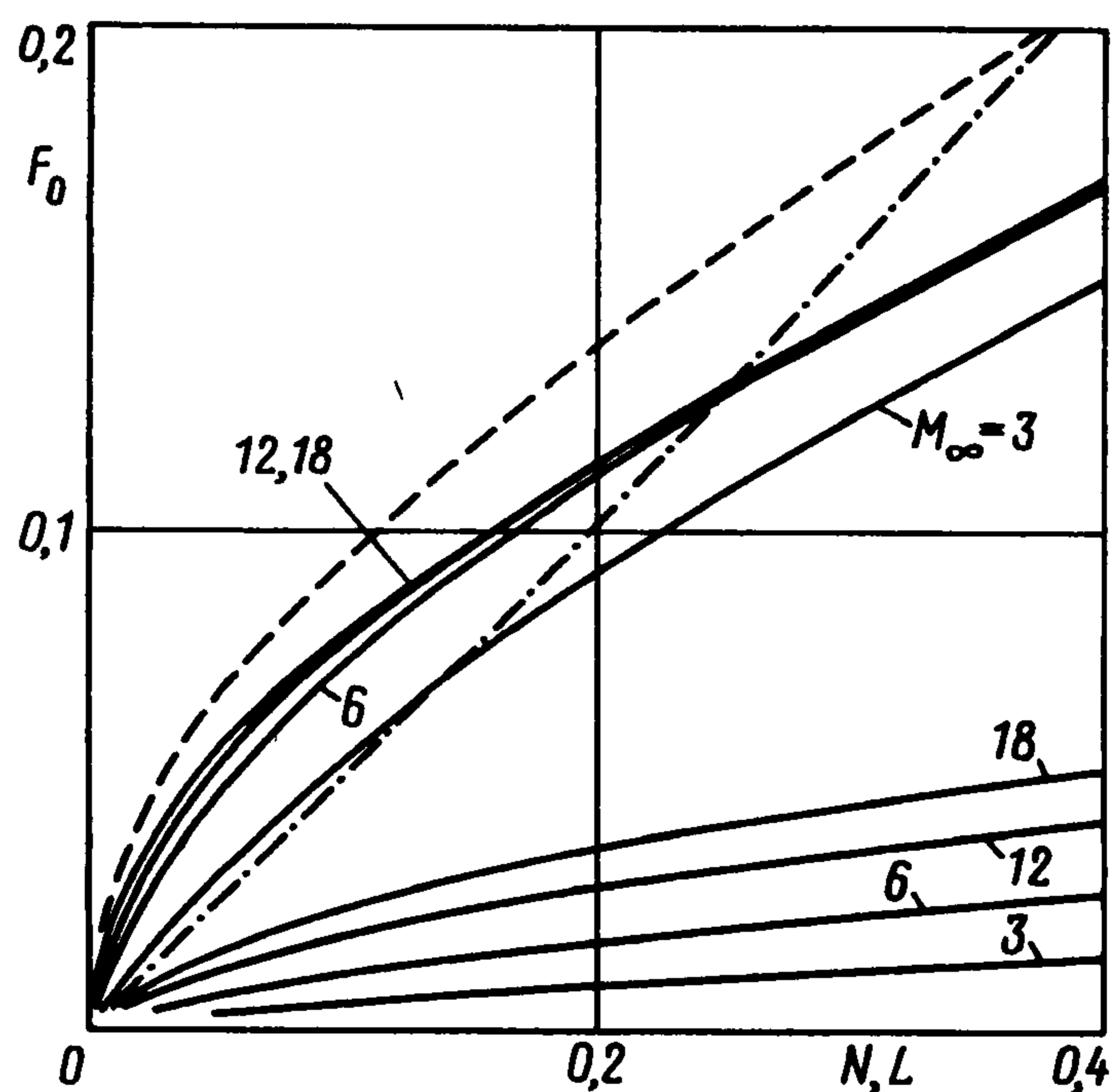
4. Оптимальные конфигурации при $p^+ > p_\infty$. Согласно сказанному в начале статьи, торцы – не единственная особенность рассматриваемых задач. Если $p^+ > p_\infty$, то оптимальны полые или частично полые "галочки". Таким "нестандартным" конфигурациям посвящен данный раздел.

Как отмечалось выше, $p^+ > p_\infty$, во-первых, для достаточно толстых тел при $M_\infty \gg 1$ и, во-вторых, при специальных воздействиях на донную область, например, подводом в нее тепла. Пусть реализуется вторая возможность и независимо от величины $F \geq 0$ за счет дополнительного воздействия на донную область $p^+/p_\infty > 1$. Если при этом уменьшать заданную площадь F , приближая ее к нулю, то требуемые малые F , казалось бы, могут обеспечить вогнутые экстремали с участком ii° , лежащим под осью абсцисс (фиг. 1, в). Такие экстремали, однако, запрещены по двум причинам. Во-первых, как установлено выше, в рассматриваемой задаче OO не может быть вогнутой. Во-вторых, if° формирует верхнюю часть симметричного тела и поэтому не может проходить под осью абсцисс. Вытекающий отсюда другой возможный выход (фиг. 1, г) в виде комбинации отрезка ii° оси x с выпуклой экстремалью $i^\circ f^\circ$ и с изломом в точке их стыковки бракуется не допускающим излома условием трансверсальности в точке i° .

Возникшая в результате проблема построения оптимальной образующей при $p^+ > p_\infty$ и достаточно малых F разрешается так. Начнем с более простой задачи без задания F . Для этой задачи необходимые условия минимума C_x получаются из найденных ранее, если положить в них $\mu = 0$. В рамках любой из описанных выше моделей построим OO , которая при $\mu = 0$ будет прямой, и определим из условия (3.5) с соответствующим выражением для $p(\vartheta)$ оптимальные угол ее наклона



Фиг. 2



Фиг. 3

$\vartheta \equiv \vartheta_{f^\circ}$ и $y_{f^\circ} = \text{tg } \vartheta_{f^\circ}$. Для модели Ньютона, согласно (3.9), $y_{f^\circ} = \text{tg } \vartheta_{f^\circ} = q_{f^\circ}$ — известная функция параметра N из (3.8), а для линейной модели, в силу (3.18), $y_{f^\circ} = \text{tg } \vartheta_{f^\circ} = L$. При любом $\vartheta_{f^\circ} > 0$ условие возрастания C_x с уменьшением длины "тела" выполняется всегда. Нетрудно видеть, что "галочка" из построенного таким способом отрезка if° и из его зеркального отражения относительно оси x дает решение исходной задачи при $F = 0$. Заполняя внутренность галочки произвольным симметричным способом (фиг. 1, д), получим решение задачи с заданной площадью F для любого значения $F \leq F_0$, где F_0 — площадь полностью заполненной галочки с задним торцом ff° . Множитель Лагранжа μ

становится отличным от нуля и отрицательным, а образующие if° — выпуклыми только при $F > F_0$.

На фиг. 3 представлены зависимости F_0 от N из (3.8) (верхнее семейство кривых) и L из (3.18) (нижнее семейство), т.е. от параметров подобия, получающихся в этой задаче в ньютоновской и в линейных моделях, а также еще от M_∞ для совершенного газа с $\kappa = 1,4$. Штриховой линией дана кривая, рассчитанная по ньютоновской модели, а штрих-пунктирной — по линейной модели. Сплошными кривыми показаны зависимости, рассчитанные по точным формулам сверхзвукового обтекания клина с условием (3.13) в концевой точке f° его образующей. При отсутствии дополнительных изопериметрических условий образующая оптимальной плоской конфигурации близка к прямой [4, 15], а согласно сказанному ранее, условие (3.13) в ее концевой точке справедливо и в приближении полной системы уравнений идеального газа. Поэтому галочки, получающиеся таким способом (с отвечающими им F_0) можно рассматривать как решение той же вариационной задачи в постановке, близкой к точной. Как видно из поведения кривых верхнего семейства на фиг. 3, N с ростом M_∞ становится параметром подобия не только в ньютоновском, но и в почти точном приближении. В противоположность этому, L параметром подобия не является.

Как уже отмечалось, в модели Ньютона построенная экстремаль (в данном случае отрезок прямой) оптимальна, если, согласно [2], на ней $q \equiv \text{tg } \vartheta \equiv \text{tg } \vartheta_{f^\circ} \leq 1$. В силу (3.9) $q_{f^\circ} = 1$ при $N = 1$. Этому случаю отвечает $F_0 = 0,5$, а в силу (1.3) $p^+ > 1 + p_\infty$, т.е. донное давление превышает величину, отвечающую $\vartheta = \pi/2$. Можно показать, что при таких p^+ и $F \leq 0,5$ в модели Ньютона оптимум по C_x , который при этом отрицателен (за счет большого p^+ создается тяга), дает полая или частично полая галочка с $\text{tg } \vartheta_{f^\circ} = 1$ и с вертикальным щитком $f^\circ f^+$. Ее верхняя половина нарисована на фиг. 1, е. В дополнение к длине тела и $F \leq 0,5$ в таких случаях необходимо задавать максимальную высоту устройства Y , причем, как нетрудно сообразить, оптимальная ордината верхней точки щитка $y_{f^+} = Y$. Если $F > 0,5$ у оптимального тела опять же из-за ограничения на длину появляется передний торец ii° , на котором $x = 0$. При этом прямолинейный участок образующей $i^\circ f^\circ$ с $\vartheta = \pi/4$ смещается вверх (фиг. 1, ж).

5. Критические замечания о построении замкнутых оптимальных тел в работах [5] и [8]. Выше уже отмечалась особая роль работы [5]. В ней в линейном приближении был

рассмотрен целый класс задач профилирования плоских заостренных спереди симметричных относительно плоскости $y = 0$ тел, реализующих минимум C_x при заданных p^+ , длине и либо максимальной толщине τ в заранее неизвестном сечении, либо функционале

$$\chi = \frac{1}{\tau^\sigma} \int_0^1 y^n dx$$

с $n = 1, 2$ и 3 и $\sigma = 0$ и 1 . Если $n = 1$, а $\sigma = 0$, то $\chi = F$.

Как уже упоминалось, в [5] задний торец не рассматривался в качестве участка краевого экстремума. Правда, в исследовавшихся в [5] случаях с $p^+ < p_{f^\circ}$, в силу условия (3.18), $\dot{y}_{f^\circ} < 0$. Поэтому вопрос о знаке кривизны экстремали if° в [5] решался без привлечения неравенства $\mu \leq 0$ — одного из отсутствующих там условий оптимальности торца как участка краевого экстремума. Более того, в задаче с $\chi = F$ получающаяся благодаря знаку \dot{y}_{f° отрицательная кривизна if° требовала выбора отрицательных μ , что, в свою очередь, обеспечивало выполнение отсутствующего в [5] условия (3.6). Линейный аналог второго условия (3.4), отсутствующий в [5], как и (3.6), при $\dot{y}_{f^\circ} < 0$ также выполнялся автоматически. Таким образом, не упоминавшиеся и не проверявшиеся в [5] необходимые условия краевого экстремума в задачах, решавшихся в этой работе, не могли привести к ошибочным результатам. Сказанное, к сожалению, не гарантировало автора [5] от ошибок, не связанных с торцом. В частности, неверны результаты, относящиеся к $\sigma = 1$. Пытаясь компенсировать появившееся при $\sigma = 1$ в выражении для $\delta C_x = \delta l$ с $l = C_x + \mu \chi$ приращение $\Delta \tau$, автор при свободном τ ввел в искомую образующую участок $y = \tau$ длины l° , а затем варьировал его как целое, положив на нем $\delta y = \Delta \tau$. В результате обратить в нуль коэффициент при $\Delta \tau$ удалось за счет подбора "оптимальной" длины l° . Это, конечно, неверно, ибо вариации y на указанном участке свободны. На самом деле при $\sigma \neq 0$ ордината экстремали if° достигает равного τ максимума либо в точке f° , либо во внутренней точке излома d . Учет этого обстоятельства и дает правильное решение задач с $\sigma \neq 0$.

Отмеченные недостатки, как и отсутствие в [5] подтверждения полученных в линейном приближении выигрышей по C_x с помощью более точных методов, вряд ли объясняют причину того, почему весьма эффективные результаты этой работы не были опубликованы в периодической печати.

Как не раз подчеркивалось выше, непонимание причины появления заднего торца — недостаток почти всех публикаций, посвященных оптимальному профилированию замкнутых тел. В этом смысле весьма показательна также уже упоминавшаяся работа [8]. В ней задний торец введен при решении в приближении модели Ньютона задачи построения осесимметричного тела, реализующего минимум коэффициента волнового сопротивления C_x при заданном объеме F и площади Ω омываемой, т.е. наветренной части поверхности, но при отсутствии ограничений на длину и радиус. Построенные в [8] "оптимальные" тела с задним торцом в зависимости от величины безразмерного параметра $f = F / \Omega^{3/2}$ оказываются остроконечными или затупленными (с $\dot{y}_i = \infty$), а их коэффициент волнового сопротивления положителен и обращается в нуль только при $f = 0$.

Не ограничиваясь осесимметричным случаем, покажем, что построенные в [8] тела неоптимальны, ибо при свободных длине и полувысоте или радиусе в задаче с заданными F и Ω можно построить сколь угодно много тел с $C_x \rightarrow 0$ и с $C_D = C_x / \tau^{1+v} \rightarrow 0$. Здесь и далее $v = 0$ в плоском и $v = 1$ в осесимметричном случае, τ — заранее неизвестные полувысота или радиус миделя, все линейные размеры, включая длину тела l и τ , отнесены к $\Omega^{1/(1+v)}$, а C_x — к Ω . С учетом принятого перехода к безразмерным величинам и определения в модели Ньютона (1.3) "омываемой" поверхности с точностью до несущественных положительных множителей имеем

$$l = \frac{1}{2} \int_0^l y^v \sqrt{1 + \dot{y}^2} (1 + \text{sign } \dot{y}) dx, \quad f = \int_0^l y^{1+v} dx, \quad C_x = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{y^v \dot{y}^3}{1 + \dot{y}^2} (1 + \text{sign } \dot{y}) dx \quad (5.1)$$

где, как и ранее, начало координат (цилиндрических для $v = 1$) помещено в переднюю точку тела.

Пусть l_1 – длина наветренной и $l_2 = l - l_1$ – подветренной частей тела, а $y = \tau y_{1,2}(x_{1,2})$ – уравнения их образующей с $x_1 = x/l_1$ и $x_2 = (x - l_1)/l_2$. В соответствии с этим, $\dot{y}_1 \equiv dy_1/dx_1 \geq 0$, а $\dot{y}_2 \equiv dy_2/dx_2 \leq 0$. Теперь формулы (5.1) примут вид

$$l = \tau^v l_1 k_1, \quad f = \tau^{1+v} (l_1 k_2 + l_2 k_3), \quad C_x = \frac{\tau^{3+v}}{l_1^2} k_4$$

$$k_1 = \int_0^1 y_1^v \sqrt{1 + \varepsilon \dot{y}_1^2} dx_1, \quad k_{2,3} = \int_0^1 y_{1,2}^{1+v} dx_{1,2} \quad (5.2)$$

$$k_4 = \int_0^1 \frac{y_1^v \dot{y}_1^3 dx_1}{1 + \varepsilon \dot{y}_1^2}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\tau}{l_1} \right)^2$$

причем в формуле для $k_{2,3}$ первому (второму) индексу отвечают первые (вторые) индексы справа.

Выберем далее достаточно произвольную монотонно возрастающую от 0 до 1 функцию $y_1(x_1)$ и монотонно убывающую от 1 до 0 функцию $y_2(x_2)$ при $x_{1,2} \in [0, 1]$ и устремим τ к нулю. Тогда в силу первого условия из (5.2) в главном порядке по τ при $\tau \rightarrow 0$ будем иметь $l_1 = 1/(k_{10} \tau^v)$. Здесь и далее $k_{n0} = k_n$ при $\varepsilon = 0$. С учетом полученного выражения для l_1 заключаем, что входящие в формулы (5.2) комбинации τ и l_1 при $\tau \rightarrow 0$ в главных порядках по τ ведут себя так: $\varepsilon = k_{10}^2 \tau^{2(1+v)} \rightarrow 0$, $\tau^{1+v} l_1 = \tau/k_{10} \rightarrow 0$ и $\tau^{3+v}/l_1^2 = k_{10}^2 \tau^{3(1+v)} \rightarrow 0$. Поэтому одновременно стремятся к нулю первое слагаемое в формуле для f , а также $C_x = k_{10}^2 k_{40} \tau^{3(1+v)}$ и $C_D = k_{10}^2 k_{40} \tau^{2(1+v)}$. Заданное же значение f сохраняется при этом, если длину подветренной части взять равной $l_2 = f/(k_{30} \tau^{1+v})$. Значения k_{n0} зависят от выбора функций $y_{1,2}$, что дает бесчисленное множество тел с C_x и C_D , стремящимися к нулю, т.е. меньшими, чем конечные C_x и C_D "оптимальных" тел работы [8].

6. О построении оптимальных тел заданной длины в потоке вязкого газа или жидкости. В выполненном исследовании использовались приближенные локальные модели и, кроме того, не учитывались силы трения. Что касается перехода к более точным моделям, то здесь при возможной количественной коррекции не приходится ожидать сколько-нибудь существенных изменений принципиального характера. Относительно влияния вязкости следует различать оптимальное профилирование тел, обтекаемых вязким сверхзвуковым потоком, и тел, обтекаемых вязким газом без возникновения даже местных сверхзвуковых зон или вязкой несжимаемой жидкостью. В первом случае при больших числах Рейнольдса, когда силы трения можно рассчитывать в приближении пограничного слоя, их добавка к волновому сопротивлению, уменьшая выигрыши (по полному сопротивлению) тела с торцом относительно тел с острой задней кромкой, не скажется на типе оптимальной конфигурации. Это связано с тем, что в подобных ситуациях проекция на ось x интеграла действующих на тело сил трения, слабо завися от формы образующей, определяется в основном его длиной. Само же наличие пограничного слоя, как известно [14], увеличивает p^+ , что в свою очередь ведет к росту размера торца. Во втором случае при отсутствии волнового сопротивления вопрос о целесообразности введения заднего торца нуждается в дополнительном исследовании. Тем не менее при решении задач оптимального профилирования тел фиксированной длины, обтекаемых дозвуковым потоком вязкого газа или вязкой несжимаемой жидкостью, возможность появления в оптимальной образующей заднего торца обязательно должна заранее предусматриваться. О том, что введение

заднего торца может существенно улучшить силовые характеристики обтекаемого тела, свидетельствуют и результаты экспериментов [16].

Авторы благодарят Н.И. Тилляеву и Ю.Д. Шмыглевского за обсуждения, а С.В. Бафталовского и В.А. Вострецову за помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01825).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А.Н.* Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 484–495.
2. *Крайко А.Н.* Головная часть заданного объема, оптимальная по волновому сопротивлению в приближении закона сопротивления Ньютона // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 382–388.
3. *Крайко А.Н., Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д.* К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 178–182.
4. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
5. *Chapman D.R.* Airfoil profiles for minimum pressure drag at supersonic velocities – general analysis with application to linearized supersonic flow // NASA Rep. 1952. 1063. 14 p.
6. Теория оптимальных аэродинамических форм. / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
7. *Друге Г.* Плоские крылья минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 87–94.
8. *Ладж Е.* Нетонкие тела минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 275–283.
9. *Gilbarg D., Shiffman M.* On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // J. Ration. Mech. and Analysis. 1954. V. 3. №. 2. P. 209–230.
10. *Крайко А.Н.* Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941–950.
11. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
13. *Елькин Ю.Г., Нейланд В.Я., Соколов Л.А.* О донном давлении за клином в сверхзвуковом потоке. // Инж. журн. 1963. Т. 3. Вып. 2. С. 362–366.
14. *Korst H.H.* A theory for base pressure in transonic and supersonic flow // J. Appl. Mech. 1956. V. 23. № 4. P. 593–600.
15. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е.* К построению оптимального контура головной части тела в сверхзвуковом потоке // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 419–434.
16. *Sato J., Sunada Y.* Experimental research on blunt trailing-edge airfoil sections at low Reynolds numbers / AIAA Journal. 1995. V. 33. № 11. P. 2001–2005.

Москва

Поступила в редакцию
10.IX.1996