

УДК 533.6

© 1997 г. А.Ф. Сидоров

**ДВУМЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ НЕОГРАНИЧЕННОГО
БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ ГАЗА**

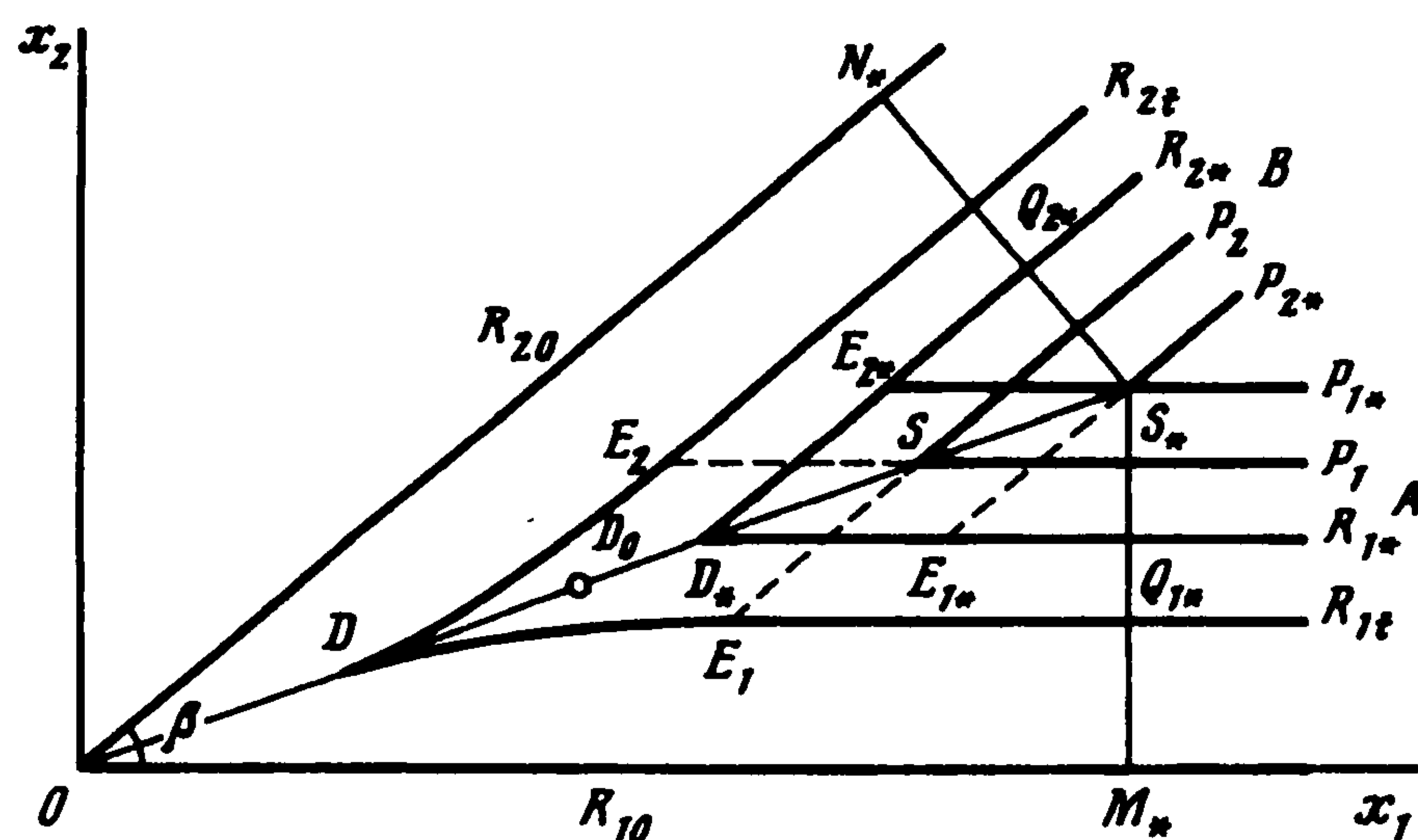
Построено точное решение двумерной нестационарной задачи о взаимодействии двух одномерных неавтомодельных волн сжатия Римана, каждая из которых порождает неограниченный локальный рост плотности газа в окрестности подвижного сжимающего поршня. Решения получены при специально согласованных показателях адиабаты и угла, под которым взаимодействуют волны Римана. Рассмотрены случаи ограниченных и неограниченных затрат энергии на такое сжатие. Показано, что в обоих случаях в области интерференции волн Римана возникает кумулятивная струя газа, в которой степени кумуляции газодинамических величин такие же, как и в процессе неограниченного автомодельного двумерного сжатия газовой призмы. Таким образом, показано, что достижение высоких локальных степеней кумуляции энергии может быть реализовано в рассматриваемых процессах для широкого класса законов управления безударным сжатием. Обнаружено явление частичного коллапса газа.

Неодномерные автомодельные режимы неограниченного безударного сжатия идеальных газов, находящихся в начальный момент времени внутри призм, тетраэдров и конусообразных тел, исследовались ранее [1–6]. Кроме многомерных режимов сжатия, требующих неограниченных затрат энергии, были построены [6] законы управления одномерным плоским сжатием, приводящие к неограниченному локальному росту плотности газа при конечных затратах энергии. Поле течения газа при таком сжатии описывается неавтомодельной простой волной Римана. Хотя полного коллапса всей массы газа при этом не происходит, представляет интерес решение задачи о двумерном взаимодействии под некоторым углом двух одномерных волн сжатия Римана.

Поставим вопрос о нахождении локальных степеней кумуляции газодинамических величин в зоне интерференции этих волн Римана, а также вопрос о величине затрачиваемой на сжатие энергии. Хотя в одномерных волнах Римана для некоторых законов управления сжатием затраты энергии конечны, вопрос о конечности величины энергии при организации взаимодействия таких волн заранее неочевиден и требует исследования. Необходимо также ответить на вопрос о существовании режима безударного сжатия до достижения неограниченного, хотя и локального роста плотности в зоне интерференции.

Решению этих задач для некоторых классов законов управления сжатием и посвящена предлагаемая статья. Для описания движения в зонах двумерного взаимодействия использованы классы точных решений неавтомодельных двойных волн [7, 8], которые использовались ранее для исследования взаимодействия волн разрежения.

1. Построение решения. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ идеальный газ с уравнением состояния $p = p_0(\rho / \rho_0)^\gamma$ (p – давление, ρ – плотность, ρ_0, p_0 – начальные плотность и давление газа, γ – показатель адиабаты) покоится внутри двугранного угла β , образованного плоскостями R_{10}, R_{20} (фиг. 1). Плоскости R_{10}, R_{20} соответствуют начальному положению подвижных криволинейных сжимающих поршней, движение



Фиг. 1

плоских частей которых R_{1t} и R_{2t} вдали от линии ODS определяется уравнениями

$$x_2 = f_1(t), \quad \cos \beta x_2 - \sin \beta x_1 = -f_2(t) \quad (1.1)$$

Будем считать, что движение поршней начинается с нулевыми скоростями $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$ и осуществляется на промежутке $t \in (0, t^*]$ с монотонно возрастающими скоростями $f_1'(t) > 0$, $f_2'(t) > 0$, так что существуют обратные функции $(f_1')^{-1} = z_1$, $(f_2')^{-1} = z_2$. Возьмем за масштаб скорости начальную скорость звука. Тогда $c = c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0} = 1$.

Вдали от вершины угла в областях A и B течениям газа соответствуют простые волны Римана, которые описываются соотношениями $(u_i(\theta))$ – компоненты вектора скорости, $i = 1, 2$)

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \theta - \frac{2}{\gamma - 1}, \quad \theta = \frac{2}{\gamma - 1} c \quad (\text{область } A)$$

$$u_1 = \frac{\gamma + 1}{2h} \left(\theta - \frac{2}{\gamma - 1} \right), \quad u_2 = -\frac{\gamma - 1}{2} \left(\theta - \frac{2}{\gamma - 1} \right), \quad h = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}} \quad (\text{область } B) \quad (1.2)$$

причем

$$u_1' x_1 + u_2' x_2 - \left(\frac{\gamma - 1}{2} \theta + u_1 u_1' + u_2 u_2' \right) t + \Delta_i(\theta) = 0 \quad (1.3)$$

(штрих соответствует дифференцированию по θ). Вторая пара формул (1.2) для u_1 и u_2 записана для так называемого "согласованного случая" [9], когда

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{h} \quad (1 < \gamma < 3) \quad (1.4)$$

При этом решение уравнения двойных волн в области интерференции простых волн имеет очень простой вид. Функции $\Delta_i(\theta)$ в (1.3) для областей A и B определяются по заданным $f_i(t)$ в (1.1) и имеют вид [7]

$$\Delta_i(\theta) = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \theta - \frac{2}{\gamma - 1} \right) y_i - f_i(y_i), \quad y_i = z_i \theta_\gamma, \quad \theta_\gamma = \theta - \frac{2}{\gamma - 1} \quad (1.5)$$

Используем для описания движения газа в области DE_1SE_2 уравнения неавто-

модельных двойных волн [8] для функции $\theta = \theta(u_1, u_2)$ и функции "размещения" $\chi(u_1, u_2)$

$$\frac{\gamma-1}{2}\theta[(1-\theta_1^2)\theta_{22} + 2\theta_1\theta_2\theta_{12} + (1-\theta_2^2)\theta_{11}] + \frac{\gamma-3}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) + 2 = 0, \quad \theta_i = \frac{\partial\theta}{\partial u_i}, \quad \theta_{ik} = \frac{\partial^2\theta}{\partial u_i\partial u_k} \quad (1.6)$$

$$(1-\theta_1^2)\chi_{22} + 2\theta_1\theta_2\chi_{12} + (1-\theta_2^2)\chi_{11} = 0, \quad \chi_{ik} = \frac{\partial^2\chi}{\partial u_i\partial u_k} \quad (1.7)$$

$$x_i = \left(u_i + \frac{\gamma-1}{2}\theta\theta_i\right)t + \chi_i, \quad i, k = 1, 2 \quad (1.8)$$

После нахождения функций θ и χ формулы (1.8) неявно определяют поле скоростей газа в физических переменных x_1, x_2, t .

Для согласованного случая (1.4) решение уравнения (1.6) в области DE_1SE_2 имеет вид

$$\theta = \frac{2}{\gamma-1} + u_1h + u_2 \quad (1.9)$$

а общее решение уравнения (1.7) для χ запишем в виде

$$\chi = \Psi_1(u_1) + \Psi_2(u_1 + \delta u_2), \quad \delta = \frac{\sqrt{(\gamma+1)(3-\gamma)}}{\gamma-1} \quad (1.10)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 – произвольные функции своих аргументов. Их производные выражаются через заданные $f_i(t)$ [7] следующим образом:

$$\Psi_1'(\xi) = -\kappa\{(1+h\xi)z_2(\kappa\xi) - f_2[z_2(\kappa\xi)]\}, \quad \kappa = \frac{2}{(\gamma-1)\delta} \quad (1.11)$$

$$\Psi_2'(\eta) = -\frac{1}{\delta}\left\{\left(1 + \frac{\gamma+1}{2}\frac{\eta}{\delta}\right)z_1\left(\frac{\eta}{\delta}\right) - f_1\left[z_1\left(\frac{\eta}{\delta}\right)\right]\right\}$$

Формулы (1.2) – (1.5) и (1.9) – (1.11) определяют полное точное решение поставленной задачи, если выполняются условия разрешимости соотношений (1.3), (1.8), из которых определяется поле скоростей.

С использованием (1.8), (1.10) можно представить якобиан в виде

$$J = \frac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, u_2)} = \left(\frac{2t}{3-\gamma} + \Psi_1''(\xi)\right) \left(\frac{\gamma+1}{2}t + \frac{1}{(\gamma-1)^2}\Psi_2''(\eta)\right) \quad (1.12)$$

Из (1.3), (1.5), (1.9) – (1.11) сразу же следует, что если в якобиане J выражение в одной из скобок обращается в нуль, то в одной из волн Римана в области A или B наступает градиентная катастрофа. Таким образом, если до какого-либо момента времени в областях A и B не происходит градиентной катастрофы, то она не происходит до этого момента и в области двойной волны, т.е. выполнены условия разрешимости неявных уравнений (1.8).

2. Симметричный случай. Исследование степеней кумуляции газодинамических величин и затрат энергии в случае произвольных законов движения поршней R_{it} , приводящих к неограниченному росту плотности газа, представляет значительные трудности. Поэтому далее ограничимся симметричным случаем движения сжимающих

поршней, когда функции $f_i(t)$ имеют вид

$$f_1(t) = f_2(t) = B_1 + B_2 t + B_3 (t_* - t)^\alpha, \alpha < 1 \quad (2.1)$$

$$B_1 = \frac{r_*}{1-\alpha}, \quad B_2 = -\frac{r_* \alpha}{t_* (1-\alpha)} < 0, \quad B_3 = \frac{r_*}{t_*^\alpha (1-\alpha)} < 0$$

Постоянные B_k определены из условий

$$f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = 0, \quad f_1(t_*) = r_*$$

причем параметры r_* и t_* определяют место и время появления бесконечных скоростей и плотностей, которые возрастают по степенному закону.

Именно такие законы движения поршня были рассмотрены ранее [6] и было показано, что при выполнении условия

$$\frac{2\gamma}{3\gamma-1} < \alpha < 1 \quad (2.2)$$

затраты энергии на перемещение плоского поршня, необходимые для достижения бесконечной плотности, конечны. При $\tau \rightarrow 0$ ($\tau = t_* - t$) степень кумуляции n скорости звука ($c = O(\tau^{-n})$) на поршне равна $1 - \alpha$.

Если $\alpha = 2/(\gamma + 1)$, $t_* = r_* = 1$, то формулы (2.1) определяют закон управления сжатием, когда в автотомельном режиме плоский слой единичной толщины в момент времени $t = 1$ весь коллапсирует [10]. Для этого требуется конечно, бесконечная энергия.

В области A соотношение (1.3) преобразуется к виду

$$x_2 - r_* + (t_* - t) \left(\frac{\gamma+1}{2} u_2 + 1 \right) - t_* \left[\frac{\gamma-1}{2} B_2 + 1 - B_2 \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{\gamma+1}{2} \right) \left(1 - \frac{u_2}{B_2} \right) \right] \left(1 - \frac{u_2}{B_2} \right)^{\alpha-1} = 0 \quad (2.3)$$

Выразив из (2.3) $\partial x_2 / \partial u_2$ и $\partial^2 x_2 / \partial u_2^2$ и проведя прямой анализ полученного представления, получим ограничение на параметры t_* , r_* , γ и α :

$$t_* \geq \frac{\gamma+1}{2} r_* \alpha, \quad \alpha > \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\gamma+1} < \frac{2\gamma}{3\gamma-1} \right)$$

при выполнении которых градиентная катастрофа в областях A и B до момента $t = t_*$ не наступает. При $t \rightarrow t_*$ ($u_2 \rightarrow \infty$) градиентная катастрофа возникает на поршне.

В области двойной волны соотношения (1.8) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(u_1, u_2)t + \Psi_1'(u_1) + \Psi_2'(u_1 + \delta u_2) \\ x_2 &= X_2(u_1, u_2)t + \delta \Psi_2'(u_1 + \delta u_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$X_1(u_1, u_2) = h + \frac{\gamma^2 - 2\gamma + 5}{2(3-\gamma)} u_1 + \frac{\gamma-1}{2} h u_2$$

$$X_2(u_1, u_2) = 1 + \frac{\gamma-1}{2} h u_1 + \frac{\gamma+1}{2} u_2$$

где

$$\Psi_1'(\xi) = a_1 + b_1 \xi + (p_1 + q_1 \xi)(1 + s_1 \xi)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\Psi_2'(\eta) = a_2 + b_2 \eta + (p_2 + q_2 \eta)(1 + s_2 \eta)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (2.5)$$

$$a_1 = -p_1 = -\kappa(t_* - r_*), \quad a_2 = -p_2 = -\frac{1}{\delta}(t_* - r_*)$$

$$b_1 = -\frac{2t_*}{3-\gamma}, \quad b_2 = -\frac{(\gamma-1)^2 t_*}{2(3-\gamma)}$$

$$s_1 = -\frac{\kappa}{B_2} > 0, \quad s_2 = -\frac{1}{\delta B_2} > 0$$

$$q_1 = -b_1 \left(1 - \frac{2}{\alpha(\gamma+1)} \right), \quad q_2 = -b_2 \left(1 - \frac{2}{\alpha(\gamma+1)} \right)$$

Линии примыкания двойной волны к областям простых волн E_1S и E_2S в каждый момент времени являются прямыми. Действительно, полагая в (2.4) $u_1 = 0$, получаем следующее уравнение движения характеристики E_1S :

$$x_2 - \delta x_1 = -\frac{2}{\gamma-1}t - \delta\Psi'_1(0)$$

Для того чтобы найти закон движения $F(x_1, x_2, t) = 0$ подвижного криволинейного поршня DE_1 , необходимо для заданного посредством (2.4) поля скоростей решить уравнение первого порядка

$$F_{x_1} u_1 + F_{x_2} u_2 + F_t = 0 \quad (2.6)$$

Это уравнение соответствует условию непроницаемости поршня, а краевое условие для него определяет известный закон движения точки E_1 в простой волне Римана. Однако уравнения для характеристик (2.6), имеющие вид

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1(x_1, x_2, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = u_2(x_1, x_2, t) \quad (2.7)$$

где u_1 и u_2 неявно определяются из (2.4), не интегрируются в квадратурах. Более того, не удастся найти даже асимптотический (при $t \rightarrow t_*$) закон движения поршня DE_1 , хотя при больших $|u_1|$ и $|u_2|$ в окрестности острия D поле скоростей автомодельно.

Действительно, при больших ξ и η в (2.5) $\Psi'_1(\xi)$ и $\Psi'_2(\eta)$ – линейные функции, а формулы (2.4) асимптотически преобразуются к виду

$$\xi_1 = \frac{x_1 - hr_*}{t - t_*} = X_1(u_1, u_2), \quad \xi_2 = \frac{x_2 - r_*}{t - t_*} = X_2(u_1, u_2) \quad (2.8)$$

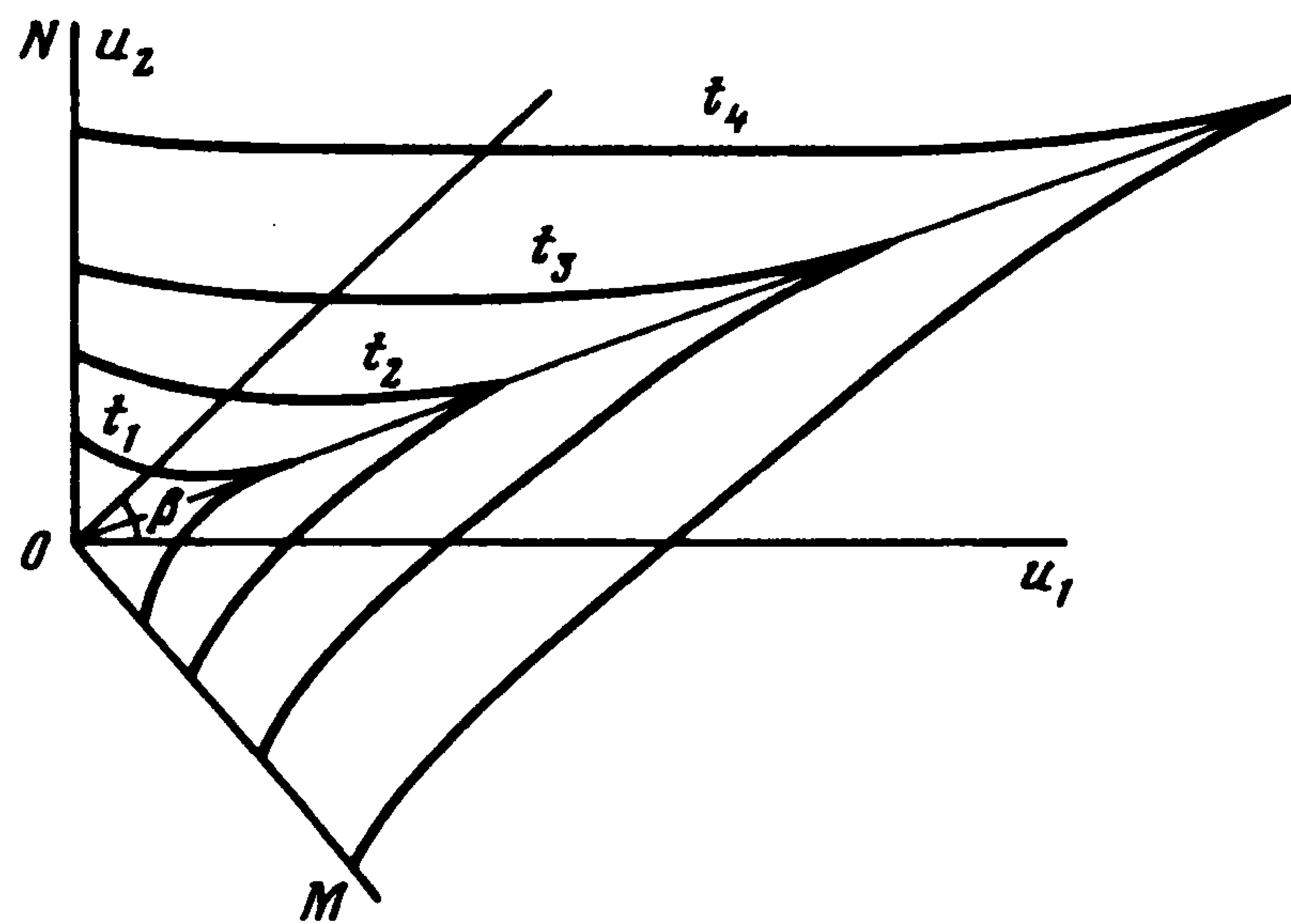
где ξ_k – автомодельные переменные.

Интегрирование уравнений (2.7) с u_k из (2.8) можно осуществить элементарно, но оно не приводит к нахождению закона движения поршня DE_1 , так как на кривой примыкания к простой волне в зоне A $u_1 = 0$ и рассуждение об автомодельности оправданно только в районе острия D .

Систему уравнений (2.7) с помощью соотношений (2.4) можно привести к виду

$$\frac{du_1}{dt} = G_1(u_1, u_2, t), \quad \frac{du_2}{dt} = G_2(u_1, u_2, t) \quad (2.9)$$

причем функции G_1 и G_2 выражаются явно с использованием (2.5). Однако и систему (2.9) не удастся проинтегрировать аналитически. Область определения течения в плоскости годографа скоростей u_1, u_2 будет зависеть от t . Качественная эволюция этой области для различных t изображена на фиг. 2. При $t \rightarrow t_*$ области определения



Фиг. 2

двойной волны отвечает сектор, ограниченный слева и снизу линиями ON и OM , которые соответствуют простым волнам Римана A и B .

Конечно, формулу поршня DE можно найти численно, проинтегрировав уравнение характеристик (2.7), покрывающих поверхность поршня $F(x_1, x_2, t) = 0$, на составном поле скоростей u_1, u_2 , определяемых из соотношений (1.2) и (1.3) для простых волн, и (2.4) – для двойной волны. Начальные условия для численного интегрирования определяются заданием начальной формы подвижного поршня – линии R_{10} .

Несмотря на указанные трудности аналитического нахождения формы поршня DE , траекторию движения точки D и законы изменения скорости и плотности в ней удастся найти точно для всех $t \in [0, t_*]$. Тем самым можно найти аналитически локальные степени кумуляции газодинамических величин в окрестности точки D при $t \rightarrow t_*$.

Вдоль биссектрисы OS : $x_1 = hx_2$, на которой $u_1 = hu_2$, из (2.4) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения $x_1(\tau)$ ($\tau = t_* - t$):

$$x_1(\tau) = h(r_* - \tau) + h^2 \tau x_1'(\tau) - h(r_* - t_* - r q x_1'(\tau)) \times \\ \times \left(1 - 2(1 - \alpha) \frac{r}{r_*} x_1'(\tau) \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad r = \frac{t_* x}{2\alpha}, \quad q = 2 - \alpha(\gamma + 1) \quad (2.10)$$

с начальным условием

$$x_1(t_*) = 0$$

Из (2.10) сразу же следует, что и $x_1'(t_*) = 0$.

Уравнение (2.10) является уравнением Лагранжа и интегрируется в квадратурах. Полагая $-x_1'(\tau) = b(\tau)$, для нахождения скорости $b(\tau) \in [0, \infty)$ в точке D получаем уравнение

$$\frac{d\tau}{db} + h \left(1 + \frac{2}{\delta} b \right)^{-1} \tau = -h \left(1 + 2(1 - \alpha) \frac{r}{r_*} b \right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \left(s - \frac{q x}{r_*} b \right) \left(1 + \frac{2}{\delta} b \right)^{-1} \quad (2.11)$$

$$s = 2 \frac{t_*}{r_*} - \alpha(\gamma + 1)$$

Интегрируя уравнение (2.11), получаем соотношение, которое неявно определяет величину скорости $b(\tau)$ в точке D :

$$-\tau = \left(1 + \frac{2}{\delta} b \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} G \quad (2.12)$$

$$G = -t_* + r \int_0^b \left\{ \left(s - \frac{q\kappa}{r_*} x \right) \left(1 + 2(1-\alpha) \frac{r}{r_*} x \right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \left(1 + \frac{2}{\delta} x \right)^{\frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}} \right\} dx$$

Из (2.11) можно найти степень кумуляции скорости b (а следовательно, и скорости звука c по (1.9)) при малых τ . При $\alpha > 2/(\gamma + 1)$ в (2.11) постоянная $q > 0$ и $db/dt > 0$ при всех $t \in (0, t_*]$. Таким образом, точка D движется с монотонно возрастающей от нуля до бесконечности скоростью $b \geq 0$. При больших b интеграл в (2.12) при $\alpha > 1/h^2$ сходится, т.е. при $\alpha > 2/(\gamma + 1)$, $b = \infty$ его величина конечна.

Если величина G в (2.12) при $b \rightarrow \infty$ не стремится к нулю, то из (2.12) следует, что асимптотический закон возрастания скорости газа и скорости звука c при $\tau \rightarrow 0$ имеет вид

$$c = O\left(\tau^{-2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right) \quad (2.13)$$

Таким образом, степень кумуляции скорости (и скорости звука) в точке D не зависит от величины α и совпадает со степенью кумуляции скорости при неограниченном автомодельном сжатии призм [1].

Анализ величины несобственного интеграла в выражении для G при $b = \infty$ громоздок. Можно показать, что по крайней мере в некотором диапазоне изменения параметров α , γ , t_* и r_* величина его строго меньше t_* .

3. Оценки энергии. Исследуем величину энергии $E(t)$, затрачиваемую на движение поршней R_{1t} и R_{2t} до достижения момента t_* в случае, когда показатель α удовлетворяет неравенству (2.2). Хотя при плоском движении затраты энергии на единицу длины в случае (2.2) конечны, вопрос об оценке величины энергии в области интерференции простых волн (будет ли она конечной?) нетривиален.

Использовать непосредственно интегральное выражение в виде

$$E(t) = 2 \int_0^{t_*} \int_{DE_1(t)} P_{DE_1(t)} u_n dl dt$$

где $P_{DE_1(t)}$ — давление на поршне $DE_1(t)$, u_n — нормальная скорость движения поршня, dl — элемент длины дуги поршня, не удастся. Дело в том, что, как уже отмечалось, закон движения поршня $DE_1(t)$ найти в аналитической форме не удалось. С другой стороны, работа поршней R_{1t} и R_{2t} идет на приращение внутренней и кинетической энергии газа в области DE_1SE_2 . Поэтому изучим финальное состояние газа в момент времени $t = t_*$ и предельную форму поршня $DE_1(t)$. После этого полную энергию $E(t_*)$ можно попытаться оценить, непосредственно оценивая внутреннюю $\mathcal{E}(t_*)$ и кинетическую $K(t_*)$ энергии.

При $t \rightarrow t_*$ из представлений (2.4) с учетом (2.5) и того факта, что хотя u_1 и u_2 и неограниченно возрастают, но справедливы оценки (2.13), получим сначала такие асимптотические формулы:

$$x_1 \approx x_{1f} + (p_2 + q_2 \eta)(1 + s_2 \eta)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad x_{1f} = hr_* + (p_1 + q_1 \xi)(1 + s_1 \xi)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (3.1)$$

$$x_2 \approx x_{2f} + \delta(p_2 + q_2 \eta)(1 + s_2 \eta)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad x_{2f} = r_*$$

На поршне DE_1 при $t \rightarrow t_*$ величина $\xi = u_1$ меняется от нуля до бесконечности, а $\eta = u_1 + \delta u_2$ неограниченна. Поэтому в финальном состоянии форму поршня $DE_1(t_*)$

можно в параметрической форме представить так: $x_1 = x_{1f}$, $x_2 = x_{2f}$, т.е. поршень DE_1 в момент времени $t = t_*$ становится прямолинейным отрезком D_*E_{1*} (фиг. 1)

$$x_1 \in [hr_*, hr_* + p_1], \quad x_2 = r_*$$

Параллелограмм $D_*E_{1*}S_*E_{2*}$ соответствует финальной области неавтономной двойной волны.

В окрестности точки D_* распределение скоростей можно найти из асимптотических формул, следующих из (3.1), при больших ξ и η

$$x_1 - hr_* \approx m_1 \xi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + m_2 \eta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \quad x_2 - r_* \approx n_2 \eta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad (3.2)$$

$$m_1 = q_1 s_1^{\frac{1}{\alpha-1}} > 0, \quad m_2 = q_2 s_2^{\frac{1}{\alpha-1}} > 0, \quad n_2 = \delta m_2 > 0$$

Из (3.2) следует, что

$$\xi = \zeta_1^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \quad \eta = \zeta_2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

$$\zeta_1 = (x_1 - \delta^{-1} x_2 - \kappa r_*) m^{-1}, \quad \zeta_2 = (x_2 - r_*) n_2^{-1}$$

В области $D_*E_{1*}S_*E_{2*}$ выполняется неравенство $\zeta_1 \geq 0$. Из (1.9) далее получаем

$$\theta = \frac{2}{\gamma-1} c(t_*) = \frac{2}{\gamma-1} + \kappa \zeta_1^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \frac{1}{\delta} \zeta_2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

Как внутренняя $\varepsilon(t)$, так и кинетическая $K(t_*)$ энергии для внутренних точек области $D_*E_{1*}S_*E_{2*}$ пропорциональны двойному интегралу по этой области от $\frac{2\gamma}{c^{\gamma-1}}(t_*, x_1, x_2)$. Задачу об оценке энергии сводим к исследованию сходимости несобственного интеграла

$$J = \int_0^{\mu} \int_0^{\mu} \left(\alpha_1 + \alpha_2 \zeta_1^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \alpha_3 \zeta_2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} d\zeta_1 d\zeta_2$$

где α_k, μ – некоторые положительные постоянные. Величину J мажорирует интеграл

$$J_0 = (3 \max \alpha_k)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \int_0^{\mu} \int_0^{\mu} (1 + \zeta_1^g + \zeta_2^g) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad g = \frac{2\gamma(\alpha-1)}{\alpha(\gamma-1)}$$

Так как $g + 1 > 0$ при выполнении неравенства (2.2), то $J_0 < \infty$.

Для того чтобы оценить полные затраты энергии $E(t_*)$ до достижения финального состояния, необходимо дополнительно подсчитать баланс массы. Действительно, конечная часть исходной массы газа может, в принципе, коллапсировать в момент t_* в точку D_* и вдоль линий D_*E_{1*}, D_*E_{2*} . Поэтому необходимо проверить выполнение соотношения

$$M_0 = 2M_1 + M_2 \quad (3.3)$$

$$M_1 = \iint_{E_{1*}Q_{1*}S_*} \rho_1(x_1, x_2, t_*) dx_1 dx_2, \quad M_2 = \iint_{D_*E_{1*}S_*E_{2*}} \rho_2(x_1, x_2, t_*) dx_1 dx_2$$

где $M_0 = hr_0 t_*^2$ – полная масса сжимаемого объема газа, $\rho_1(x_1, x_2, t_*)$ для простой волны находится из (1.2), (2.3), а $\rho_2(x_1, x_2, t_*)$ для двойной волны – из (1.9), (2.4). Если соотношение (3.3) выполняется тождественно, то из оценки $J_0 < \infty$ следует, что общие

затраты энергии конечны. Если M_0 больше правой части равенства (3.3), то в изучаемом процессе сжатия часть массы претерпевает в момент времени t_* коллапс и сосредотачивается вдоль линий D_*E_{1*} , D_*E_{2*} .

Величины ρ_1 и ρ_2 определяются из указанных уравнений неявным образом, и точные вычисления интегралов в (3.3) в плоскости x_1, x_2 провести не удастся. Более удобно перейти в (3.3) при $t = t_*$ к переменным плоскости годографа u_1, u_2 .

Вычисление якобиана J (1.12) при $t = t_*$ приводит к представлению

$$J_* = \frac{(\gamma+1)(3-\gamma)}{(\gamma-1)^2} (1+s_1\xi)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} (1+s_2\eta)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} (f_1+g_1\xi)(f_2+g_2\eta) \quad (3.4)$$

$$f_k = q_k + s_k p_k (\alpha-1)^{-1}, \quad g_k = q_k s_k \alpha (\alpha-1)^{-1}, \quad k=1,2$$

$$\xi = u_1, \quad \eta = u_1 + \delta u_2$$

После этого получим

$$M_2 = 2\rho_0 \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \int_0^\infty du_2 \int_{hu_2}^\infty J_* \left(\frac{2}{\gamma-1} + hu_1 + u_2\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} du_1 \quad (3.5)$$

Величина ρ_1 в (3.3) не зависит от x_1 . Поэтому после перехода с помощью (2.3) к переменной интегрирования u_2 получим

$$M_1 = \rho_0 \int_0^\infty \left(\frac{2}{\gamma-1} + u_2\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{u_2}{B_2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \times \\ \times (l_0 + l_1 u_2) \left[h_0 + h_1 \left(1 - \frac{u_2}{B_2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + h_2 \left(1 - \frac{u_2}{B_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right] du_2 \quad (3.6)$$

где h_k, l_k – постоянные, зависящие от r_*, t_*, γ, α . Выражения для них громоздки и не приводятся. Для произвольных α и γ интегралы в (3.5), (3.6) можно найти численно. Точные аналитические вычисления (весьма громоздкие) были проведены при $\alpha = 6/7$, $\gamma = 5/3$, $t_* = 1$, $r_* = 1/2$, когда выполняется условие (2.2). Оказалось, что баланс масс (3.3) не выполняется¹. Аналитические вычисления при указанных значениях параметров показали, что

$$M_0 = \rho_0 \sqrt{2}, \quad M_1 = \rho_0 \sqrt{2} \frac{m_1}{n_1}, \quad M_2 = \rho_0 \sqrt{2} \left(\frac{m_2}{n_2} + \frac{m_3}{n_3} \ln 3 \right)$$

где m_k, n_k – целые числа. Наличие $\ln 3$ в представлении M_2 доказывает факт дисбаланса. При $r_* = 1/2$ $\rho_0 = 1$ получим $2M_1 \approx 0,471$; $M_2 \approx 0,891$; $2M_1 + M_2 < M_0$. С ростом r_* дисбаланс быстро растет.

Таким образом, обнаружено явление частичного коллапса при неавтономном сжатии рассматриваемого типа.

Интересно проследить динамику материальных точек, находящихся на биссектрисе OS_* , которые все коллапсируют в точку D_* . Оказывается, что это можно сделать точно, используя уравнение (2.10), описывающее траектории частиц, движущихся вдоль OS_* .

Пусть в момент времени $t = t_0$ в точку D_0 на биссектрисе пришел слабый разрыв

¹ Этот факт был впервые обнаружен В.А. Кукушкиным с помощью численных расчетов.

P_{t_0} , и материальная частица, находящаяся до $t \leq t_0$ в точке D_0 в покое, пришла в движение. Ее траектория описывается уравнением (аналог (2.12))

$$-\tau = \left(1 + \frac{2}{\delta} b\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} G_0, \quad G_0 = t_0 + G \quad (3.7)$$

Наибольшее время t_0^* , когда траектория соответствующей частицы, находившейся при $t = t_0^*$ в некоторой точке D_{0^*} на биссектрисе, приходит в момент t_* в точку D_* , определяется равенством

$$t_0^* = t_* - r \int_0^{\infty} R(x) dx \quad (3.8)$$

$R(x)$ совпадает с подынтегральной функцией из (2.12). Представление (3.8) получается из условия $G_0 \leq 0$.

Таким образом, все точки, находящиеся на биссектрисе OS_* левее точки D_0 , коллапсируют в точку D_* .

Описание конфигурации всей начальной подобласти из призмы с сечением $OM_*S_*N_*$, которая стягивается в отрезки $D_*E_{1^*}$ и $D_*E_{2^*}$, может быть получено численным интегрированием системы уравнений (2.9) с применением алгоритмов высокой точности.

Итак, затраты энергии на движение сжимающих поршней в области двойной волны бесконечны, хотя в областях волн Римана эти затраты конечны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00115).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А.Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном безударном сжатии газа // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 3. С. 548–552.
2. Сидоров А.Ф. Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 444–448.
3. Sidorov A.F. Calculation methods of optimal control of space unshocked compression of ideal gas // Proc. 5th Intern. Symp. on Computational Fluid Dynamics. 1993. V. 3. P. 137–143.
4. Сидоров А.Ф. Исследование особенностей нестационарных конических течений газа // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 6. С. 732–735.
5. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 81–92.
6. Sidorov A.F. Mathematical modelling of the processes of unshocked gas compression // Rus. J. Numer. Analysis and Math. Modelling. 1995. V. 10. № 3. P. 255–276.
7. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. О точных решениях некоторых краевых задач газовой динамики в классах двойных и тройных волн // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. 1978. Вып. 25. С. 52–66.
8. Сидоров А.Ф., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
9. Сучков В.А. Истечение в вакуум на косо́й стенке // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 739–740.
10. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехтеориздат, 1955. 804 с.