ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **Том 61. Вып. 5, 1997**

УДК 533.6.011

© 1997 г. **А.Н. Богданов**

ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВОГО РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Исследуются модификации уравнения нестационарного трансзвукового течения, позволяющие преодолеть недостатки описания околозвуковых течений при использовании трансзвукового приближения (уравнения Линя – Рейсснера – Цяня), других уравнений нестационарного трансзвукового течения. Решаются некоторые задачи течений такого рода (устойчивость трансзвуковых течений, образование нестационарных ударных волн, математическое моделирование течений).

Традиционно попытки упростить уравнения, моделирующие движение газа в околозвуковом диапазоне скоростей, связаны с использованием так называемого трансзвукового разложения по малому отклонению текущего значения числа Маха потока от единицы. В случае нестационарного трансзвукового течения такое упрощение было проведено Линем, Рейсснером и Цянем [1]. Хотя в полученном уравнении (уравнении ЛРЦ) удалось сохранить многие важные особенности околозвуковых течений (нелинейность, пространственную неодномерность; уравнение описывает и дозвуковую, и сверхзвуковую области течения), обнаружились и существенные недостатки этого уравнения. Оказалось, что оно дает бесконечные скорости распространения слабых нестационарных возмущений вниз по потоку, а волновые фронты возмущений от точечного источника во все моменты времени представляют собой незамкнутые кривые (параболы); задача Коши для уравнения ЛРЦ некорректна; оно не описывает высокочастотные нестационарные возмущения и т.д. Тем не менее уравнение ЛРЦ, как наиболее простое, широко использовалось для анализа нестационарных трансзвуковых течений. Обзор посвященных этому работ и некоторые результаты можно найти в [2, 3].

Была рассмотрена[1] проблема правильной постановки краевых задач для уравнения ЛРЦ. Поскольку поверхности $t = \text{const}$ являются его характеристиками, на плоскости $t = 0$ нельзя задавать все начальные данные. Условие для искомой функции при $t = 0$ следует дополнить условиями, накладываемыми на функцию и ее первую производную по пространственной координате x, заданными при $x = 0$. Кроме того, необходимо, чтобы эта производная была положительна.

Известные недостатки описания околозвуковых течений на основе использования уравнения ЛРЦ пытались преодолеть разными способами, главным образом, дописывая различные члены [4]. Исследования показали, что добавление в уравнение ЛРЦ слагаемого со второй производной по времени [5, 6] снимает многие проблемы из вышеперечисленных. Получающееся модифицированное уравнение описывает возмущения любой частоты (в том числе и высокочастотные), распространяющиеся во всех направлениях (в том числе и вниз по потоку). Задача Коши для такого уравнения корректна, можно построить конус зависимости решения от начальных данных, получить интеграл энергии и оценки решения для начальных и краевых задач.

Ниже рассматриваются некоторые задачи теории нестационарных трансзвуковых течений на основе модифицированного уравнения нестационарного околозвукового течения [6], а также других модифицированных уравнений, моделирующих течения такого рода.

---

[1] *Мамонтов Е.В.* К теории нестационарных околозвуковых течений газа. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Новосибирск, Ин-т гидродинамики им. Лаврентьева, 1973.

В реальных условиях турбулизация пограничного слоя у границ течения является источником нестационарных возмущений, которые распространяются в поле течения во всех направлениях. Прогрессивные волны, за исключением движущихся против основного потока, быстро исчезают из-за того, что распространяются с относительно большой скоростью. Возмущения, движущиеся против потока, накапливаются в областях торможения сверхзвукового течения до дозвуковых скоростей. Если не происходит рассеивания энергии таких возмущений, они имеют достаточно времени для роста и, в конечном счете, для разрушения плавного стационарного потока. Вероятно [7], такое течение либо делается неустановившимся, либо содержит ударные волны, либо и то и другое вместе. Это мнение подкрепляется данными экспериментов: существуют устойчивые плоские трансзвуковые течения, содержащие стационарные ударные волны [8]. Кроме того, изучение поведения слабых стационарных возмущений, порожденных неровностями границ течения, показало, что их рост может приводить к образованию ударных волн внутри областей сверхзвукового течения [9, 10]. Ударные волны могут возникать из-за роста нестационарных возмущений, приходящих в область трансзвукового течения извне.

Исследование устойчивости околозвуковых течений по отношению к малым нестационарным возмущениям сталкивается с серьезными трудностями из-за нелинейности уравнений трансзвукового приближения [3]. К тому же эти уравнения в частных производных, для стационарного фона (устойчивость которого исследуется) имеющие переменный эллиптико-гиперболический тип. В связи с этим определение устойчивости трансзвукового течения к настоящему времени проведено лишь на основе квазиодномерного приближения [11–13] и линеаризации уравнения ЛРЦ [14] (имеющего, как известно, ряд недостатков, перечисленных выше). Отдельные попытки провести анализ в более общем виде показались неудовлетворительными даже для их авторов [7].

Вопросы возникновения ударных волн в трансзвуковых потоках ранее рассматривались лишь для стационарных случаев. Построенные примеры течений со стационарными ударными волнами реализуются в соплах Лаваля при затянутой переходной части [2].

Использование трансзвукового приближения в его классическом виде [3] искажает структуру области, в которой ищется решение: возникает семейство вырожденных характеристик (тривиальных плоскостей $t = \mathrm{const}$), разрушается конус зависимости, который вырождается в параболоид влияния. Не удается также получить интеграл энергии, используемый обычно в теории уравнений с частными производными для получения оценок решения уравнений такого рода. Заметим, что интеграл энергии можно построить, если поставить для уравнения ЛРЦ смешанную задачу с данными на плоскостях $t = 0$ и $x = 0$ (см. работу, указанную в сноске).

Ниже анализ развития малых нестационарных возмущений в трансзвуковом потоке проведен на основе модифицированного уравнения нестационарного трансзвукового течения [6], позволяющего описывать возмущения, распространяющиеся вниз по потоку. Рассмотрен вопрос образования огибающей у акустических характеристик одного семейства, означающий возникновение нестационарной ударной волны. Показано, что модифицированное уравнение не описывает динамику течения в поперечном основному течению направлении. Кроме того, получен интеграл энергии для нестационарного трансзвукового течения. Для смешанных задач найденные результаты существенно зависят от того, на какой границе ставятся краевые условия, так как предлагаемое модифицированное уравнение (как и уравнение ЛРЦ) не обладает инвариантностью относительно смены осей пространственных координат.

Поскольку модифицированное уравнение ЛРЦ не позволяет достаточно точно решать задачи теории трансзвуковых течений (иногда получаемые результаты просто неверны), в разд. 5 на основе обобщения ранее проведенных исследований по модификации уравнения нестационарного трансзвукового течения предлагается уравнение, позволяющее изучать нелинейную эволюцию волновых фронтов, распространяющихся под углом к направлению основного течения. Новая модификация заключается в учете членов следующего порядка малости традиционного трансзвукового разложения. На основе введенного уравнения решены рассмотренные в разд. 1–4 задачи.

Предлагаемая модификация уравнения нестационарного трансзвукового течения открывает возможность математического моделирования работы трансзвукового сопла в нестационарном режиме [15].

Отметим, что имеются численные расчеты нестационарных трансзвуковых течений на основе других (отличных от уравнения ЛРЦ) уравнений, моделирующих нестационарное околозвуковое течение. Так, модифицированное уравнение [16], содержащее некоторые из членов, входящих в предлагаемое ниже уравнение, использовалось с целью дать более точное описание исследуемого течения, но конкретный вид такой модификации специально не обосновывался и не комментировался.

1. Слабые нестационарные возмущения трансзвукового течения и модифицированное уравнение Линя – Рейсснера – Цяня. Проводимое ниже исследование относится к нестационарному трансзвуковому течению в канале (сопле) с плоской геометрией. Принято, что ось канала совпадает с осью X.

В рассматриваемом приближении, основанном на разложении параметров потока по малому отклонению текущего значения числа Маха течения от единицы (традиционное трансзвуковое разложение), ударные волны (если они есть) остаются слабыми, возникающая в потоке завихренность мала, и, следовательно, можно ввести потенциал скорости Φ: $u = \Phi_X$, $v = \Phi_Y$. Для потенциала Φ имеет место уравнение, следующее из уравнений движения и неразрывности:

$$(a^2 - \Phi_X^2)\Phi_{XX} - 2\Phi_X\Phi_Y\Phi_{XY} + (a^2 - \Phi_Y^2)\Phi_{YY} - 2\Phi_X\Phi_{XT} - 2\Phi_Y\Phi_{YT} - \Phi_{TT} = 0 \qquad (1.1)$$

причем скорость звука a определяется уравнением сохранения энергии

$$\Phi_T + \frac{1}{2}(\Phi_X^2 + \Phi_Y^2) + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{U^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1}a_\infty^2 \qquad (1.2)$$

a_∞, U – характерные скорость звука и скорость основного течения в канале, γ – показатель адиабаты.

Введем новые безразмерные пространственные координаты и время

$$Lx = X, \quad Ly = \delta^{1/3}Y, \quad t = \delta^{2/3}UL^{-1}T$$

(L – характерная длина, $\delta \ll 1$) и разложение потенциала в виде [3]

$$\Phi = U(Lx + \delta^{2/3}L\varphi(x, y, t) + \ldots)$$

(трансзвуковое течение представляется как возмущение одномерного течения вдоль оси x с постоянной скоростью U). Имеем

$$\Phi_X = U(1 + \delta^{2/3}\varphi_x), \quad \Phi_Y = U\delta\varphi_y, \quad \Phi_T = U^2\delta^{4/3}\varphi_t \qquad (1.3)$$

и система уравнений (1.1), (1.2) преобразуется к уравнению

$$\left\{\delta^{-2/3}\left(\frac{a_\infty^2}{U^2} - 1\right) - \delta^{2/3}(\gamma - 1)\varphi_t - (\gamma + 1)\varphi_x - \frac{\gamma + 1}{2}\delta^{2/3}\varphi_x^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\delta^{4/3}\varphi_y^2\right\}\varphi_{xx} -$$

$$-2(1 + \delta^{2/3}\varphi_x)\delta^{2/3}\varphi_y\varphi_{xy} + \left(\frac{a_\infty^2}{U^2} - (\gamma - 1)\delta^{2/3}(\varphi_x + \delta^{2/3}\varphi_t) - \frac{\gamma - 1}{2}\delta^{4/3}\varphi_x^2 - \frac{\gamma + 1}{2}\delta^2\varphi_y^2\right)\varphi_{yy} -$$

$$-2(1 + \delta^{2/3}\varphi_x)\varphi_{xt} - 2\delta^{4/3}\varphi_y\varphi_{ty} - \delta^{2/3}\varphi_{tt} = 0 \qquad (1.4)$$

Для членов порядка $\delta^{4/3}$ получим [3]

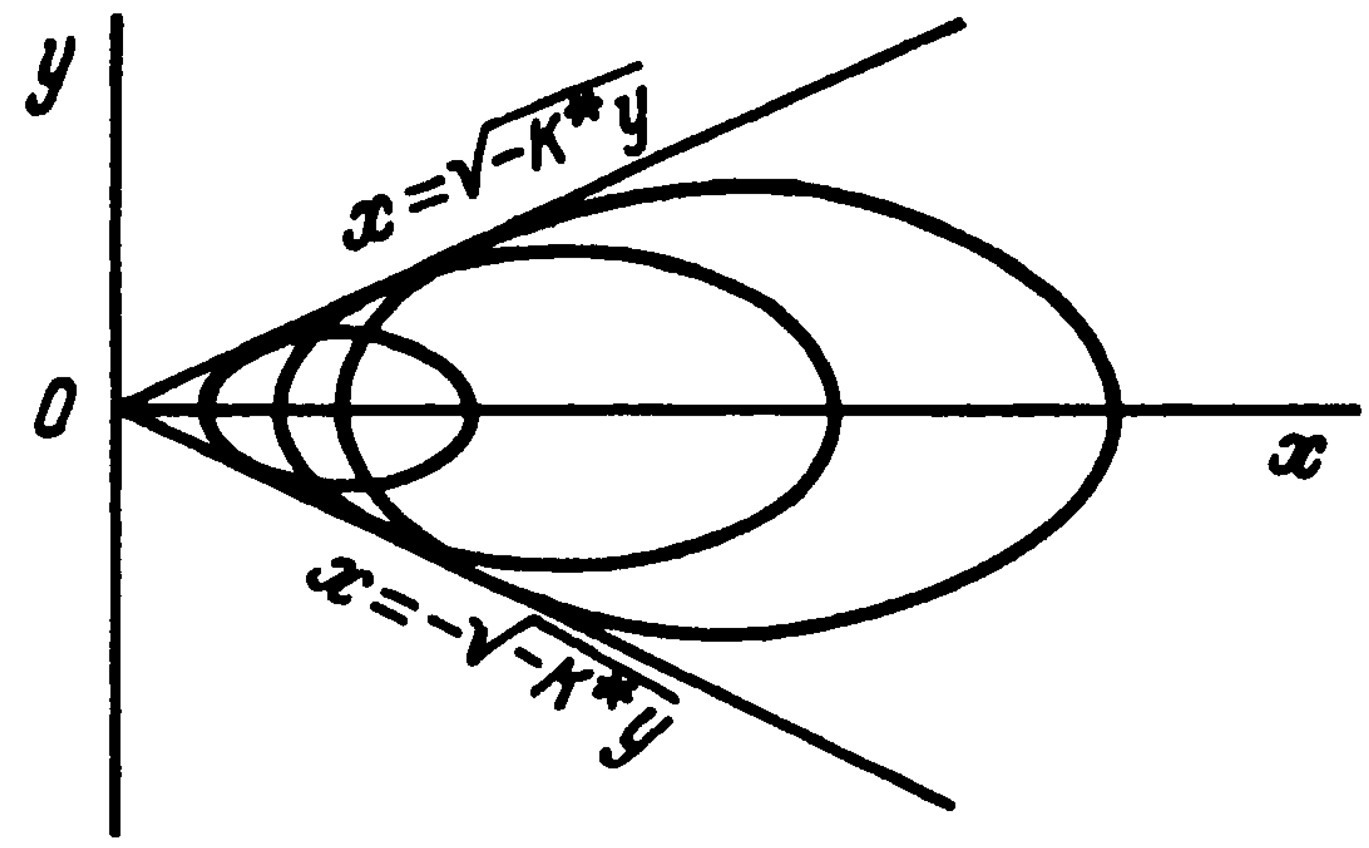
$$(K - (\gamma + 1)\varphi_x \quad \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - 2\varphi_{xt} = 0, \quad K = \bar{\delta}^{2/3}(1 - M_\infty^2), \quad M_\infty = U / a_\infty \qquad (1.5)$$

Уравнение (1.5) известно как уравнение ЛРЦ. Оно несправедливо для высоких частот возмущений $\Phi_{TT} \geqslant \Phi_T$.

Согласно оценкам (1.3)

$$\Phi_{TT} = L^{-1}U^3\delta^2\varphi_{tt} \qquad (1.6)$$

Допуская, что величина φ_{tt} может быть очень велика, сохраним член (1.6), выпи-



Фиг. 1

сывая трансзвуковой предел. Получим ($\varepsilon = \delta^{2/3} \ll 1$)

$$(K-(\gamma+1)\varphi_x)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}-2\varphi_{xt}-\varepsilon\varphi_{tt}=0 \tag{1.7}$$

Коэффициент при φ_{xx} – знакопеременная величина в зависимости от того, дозвуковым или сверхзвуковым является течение, так как

$$a^2-u^2=(K-(\gamma+1)\varphi_x)\delta^{2/3}+O(\delta^{2/3}).$$

Независимо от знака этого коэффициента уравнение (1.7) гиперболическое, а поскольку коэффициент зависит от первой производной от потенциала, – квазилинейное.

Можно получить [3] характеристические поверхности для уравнения (1.7) (или (1.5)). Для уравнения (1.7) характеристические поверхности – конусы

$$K^*t^2+2t(x-x_0)-\varepsilon(x-x_0)^2=(y-y_0)^2(1+\varepsilon K^*) \tag{1.8}$$

При $K^*=K-(\gamma+1)\varphi_x=\text{const}$ уравнение (1.8) при каждом фиксированном t дает эллипс в плоскости x, y (фиг. 1).

Случай $\varepsilon = 0$ рассмотрен ранее [3]. Уравнение (1.8) переходит в этом случае (пусть также $x_0 = y_0 = 0$) в уравнение вида

$$K^*t^2+2tx=y^2 \tag{1.9}$$

Решения (1.9) для заданного t есть параболы в плоскости x, y. Такие решения подразумевают бесконечные скорости распространения волновых фронтов слабых возмущений вниз по потоку и нереальны с физической точки зрения. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ характеристическими поверхностями будут и плоскости $t = \text{const}$. Формально следствием этого являются бесконечные скорости распространения возмущений вниз по потоку и некорректность задачи Коши для уравнения ЛРЦ.

Рассмотрим огибающую волновых фронтов (1.9) при изменении времени t. Эта огибающая (при $K^* = \text{const}$) определяется системой

$$K^*t^2+2tx=y^2,\quad K^*t+x=0$$

откуда получим ($K^*<0$, течение сверхзвуковое)

$$x=\pm\sqrt{-K^*}\,y \tag{1.10}$$

Огибающая (1.10) определяет угол Маха. Можно проверить, что такую же огибающую имеют волновые фронты (1.8), идущие от источника возмущений в точке $x_0 = y_0 = 0$. Это свидетельствует в пользу того, что возмущения, распространяющиеся вверх по потоку, описываются с достаточной точностью.

Имеются другие модификации уравнения нестационарного трансзвукового течения. Было предложено [5] учитывать нестационарную составляющую нелинейности (слагаемое порядка ε согласно уравнению (1.4)). Тогда вместо (1.7) имеем уравнение

$$(K-(\gamma+1)\varphi_x-\varepsilon(\gamma-1)\varphi_t)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}-2\varphi_{xt}-\varepsilon\varphi_{tt}=0 \tag{1.11}$$

использованное [5] при рассмотрении трансзвуковых нестационарных течений газа в канале. Некоторые особенности анализа околозвуковых течений, выявляемые при использовании уравнения (1.11), других модифицированных уравнений, будут рассмотрены ниже.

Уравнение (1.4), являющееся базовым при выводе приближенных трансзвуковых уравнений, не обладает инвариантностью относительно смены осей пространственных координат. Кроме того, при использовании достаточно грубого приближения более слабая нелинейность уравнения в поперечном основному течению направлении просто игнорируется. Это может приводить к неполным и неправильным результатам и выводам относительно свойств трансзвуковых течений, изучаемых в пространственной постановке.

2. Устойчивость трансзвуковых течений. Основной вывод всех ранее проведенных исследований устойчивости трансзвуковых течений заключается в том, что ускоряющиеся течения с переходом через скорость звука устойчивы, тормозящиеся течения – неустойчивы [7, 8, 11, 14, 17].

Существует мнение [7], что поведение возмущений в окрестности перехода через скорость звука типично нелинейное и обычно используемую при анализе устойчивости линеаризацию проводить нельзя.

Покажем, что общепринятое трансзвуковое приближение, сохранив нелинейность, совершенно не учитывает возмущения, распространяющиеся вниз по течению, а предложенная ранее [5] модификация уравнения ЛРЦ дает неправильные результаты для возмущений, распространяющихся поперек направлению основного течения. Влияние нелинейности будет учтено ниже в разд. 3.

Рассмотрим поведение слабых нестационарных возмущений

$$\varphi=\varphi^0(x,y)+\tilde{\delta}\varphi(x,y,t),\quad \tilde{\delta}\ll 1$$

Линеаризуя уравнение (1.7) по $\tilde{\delta}$, имеем

$$K^{*0}\tilde{\delta}\varphi_{xx}-(\gamma+1)\tilde{\delta}\varphi_x\varphi_{xx}^0+\tilde{\delta}\varphi_{yy}-2\tilde{\delta}\varphi_{xt}-\varepsilon\tilde{\delta}\varphi_{tt}=0\quad (K^{*0}=K-(\gamma+1)\varphi_x^0) \tag{2.1}$$

Пусть возмущения имеют плоский фронт, а анализ их поведения будет локальным. Будем считать коэффициенты уравнения (2.1) постоянными и искать решение в виде

$$(\tilde{\delta}\varphi\sim\exp(i(-\omega t+kx+ly))) \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим дисперсионное соотношение

$$-K^{*0}k^2-ik(\gamma+1)\varphi_{xx}^0-l^2-2k\omega+\varepsilon\omega^2=0 \tag{2.3}$$

которое имеет два корня (при учете условия $\varepsilon\ll 1$)

$$\omega_1=2\frac{k}{\varepsilon}+\frac{k}{2}\Omega,\quad \omega_2=-\frac{k}{2}\Omega,\quad \Omega=K^{*0}+\frac{i}{k}(\gamma+1)\varphi_{xx}^0+\left(\frac{l}{k}\right)^2$$

Если $\varphi_{xx}^0=u_x^0>0$ (невозмущенное течение ускоряется), то корень ω_1 имеет положительную мнимую часть и малые возмущения нарастают, что означает неустойчивость течения. В случае $\varphi_{xx}^0=u_x^0<0$ (невозмущенное течение замедляется) нарастать будут возмущения, соответствующие второму корню ω_2, и снова имеем неустойчивость течения.

При $\varepsilon\to 0$ корень ω_1 выпадает и получается известный в газовой динамике результат [7, 11, 14] о неустойчивости трансзвукового тормозящегося течения. Вывод же об устойчивости трансзвукового ускоряющегося течения, как видно, в значительной мере связан с использованием трансзвукового приближения и пренебрежением корнем ω_1.

Для стационарно ускоряющихся трансзвуковых течений со стационарными возмущениями утверждение о сохранении безударности течения остается справедливым [9, 10].

Возмущения, соответствующие корню ω_1, распространяются в направлении основного (невозмущенного) течения газа и в обычных условиях не успевают вырасти достаточно сильно. Если же в основном течении происходят физико-химические процессы с выделением энергии, то слабые возмущения могут расти гораздо быстрее и приводить к смене режима течения (в нем могут появиться скачки или же характер его станет неустановившимся). В квазиодномерном приближении анализ этих вопросов проведен в [9].

Заметим, что уравнение (2.3) не содержит производных по координате y, а следовательно, изменение параметров течения по оси y (поперек направлению основного потока) учитывается лишь опосредованно (φ^0_{xx} может зависеть от y). Из (2.3) следует, что течение нейтрально устойчиво по отношению к возмущениям, распространяющимся вдоль оси y (с $k = 0$). Таким образом, анализ устойчивости трансзвукового течения, проведенный на основе модифицированного уравнения (1.7), дает неполную и неправильную информацию. Уточнение полученных результатов будет проведено ниже в разд. 5.

3. Образование нестационарных ударных волн в трансзвуковых течениях. Возникновение ударных волн в трансзвуковых течениях – проблема, далекая от окончательного разрешения. Важность осуществления безударности течения для приложений, вызвавшая первоначальный интерес к вопросу возникновения и существования скачков в течениях такого рода, привела к постановке одной из самых принципиальных проблем газовой динамики.

Исследования возникновения нестационарных ударных волн в трансзвуковых течениях автору неизвестны.

Рассмотрим возникновение с течением времени огибающей у характеристик (1.8), означающее образование ударной волны. Выберем два центра – источника возмущений с координатами (x_{01}, $_0$), (x_{02}, y_0) (и одинаковой ординатой) (фиг. 2). Используя уравнение (1.8), вычислим $\partial x/\partial x_0$ вдоль луча $y = y_0$ (при этом $\partial y/\partial x_0 = 0$, $\partial y_0/\partial x_0 = 0$). Имеем

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 + \frac{\gamma+1}{2}\frac{t^2}{t-\varepsilon(x-x_0)}\frac{\partial u}{\partial x_0} = 0 \tag{3.1}$$

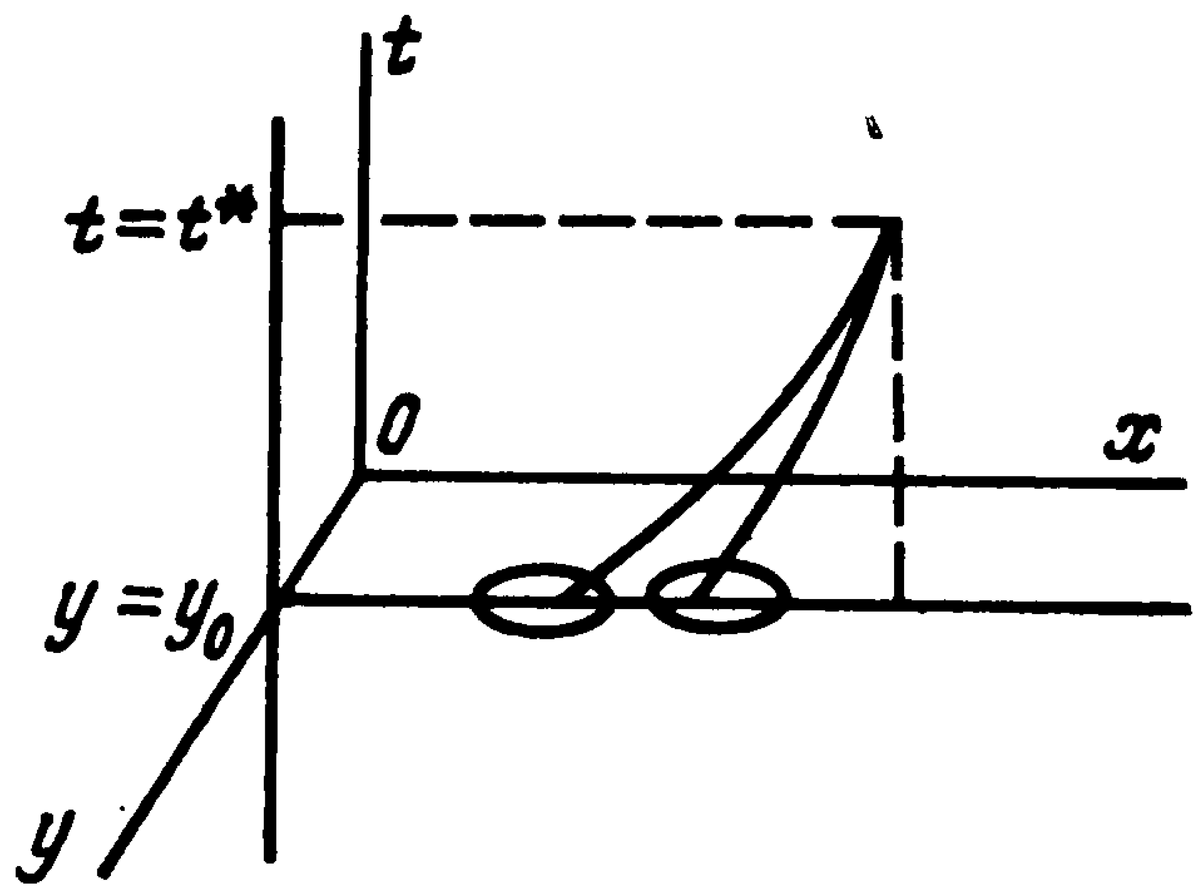
откуда при $\varepsilon = 0$ следует

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = -\frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{t} < 0 \tag{3.2}$$

Отрицательный градиент скорости означает, что огибающая возникает только у возмущений сжатия, при этом тем раньше (при меньшем t), чем больше абсолютная величина градиента скорости.

Соотношение (3.1) показывает, что и в случае $\varepsilon \neq 0$ огибающая возникает только у возмущений сжатия, причем в распространяющихся вниз по течению ($x > x_0$) возмущениях огибающая возникает быстрее (при той же начальной амплитуде возмущения). Анализ же, проводимый на основе уравнения ЛРЦ, совершенно не учитывает возмущения, распространяющиеся вниз по потоку.

Рассмотрим участки волновых фронтов, движущихся вдоль луча $x = x_0$. Вычислим



Фиг. 2

$\partial y/\partial y_0$ (в этом случае $\partial x/\partial y_0 = 0$, $\partial x_0/\partial y_0 = 0$). Имеем

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = 1 - \frac{\gamma+1}{2}\frac{t^2 - \varepsilon(y-y_0)^2}{(y-y_0)(1+\varepsilon K^*)}\frac{\partial u}{\partial y_0} \tag{3.3}$$

Для участков волновых фронтов, близких к плоскому, $\partial u/\partial y_0 = 0$ и опрокидывания не происходит (согласно (3.3) $\partial y/\partial y_0 = 1$).

При $\varepsilon = 0$ уравнение (3.3) дает условие пересечения характеристик, откуда следует

$$\frac{\partial u}{\partial y_0} = \frac{2}{\gamma+1}\frac{y-y_0}{t^2} \tag{3.4}$$

Используя условие потенциальности течения, восстановим по (3.4) $\partial v/\partial y_0$. После дифференцирования по y_0 и интегрирования по x_0 имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y_0} = -\frac{2}{\gamma+1}\frac{x_0}{t^2} + V(y, y_0)$$

Первое слагаемое – отрицательная величина, описывающая профиль волны сжатия, второе – неопределенная функция, и полной информации об опрокидывании волнового фронта получить не удается. Следовательно, использование модифицированного уравнения (1.7) при выяснении процессов образования ударных волн в трансзвуковом течении дает неполные или неправильные результаты для участков волновых фронтов, распространяющихся поперек направлению основного потока.

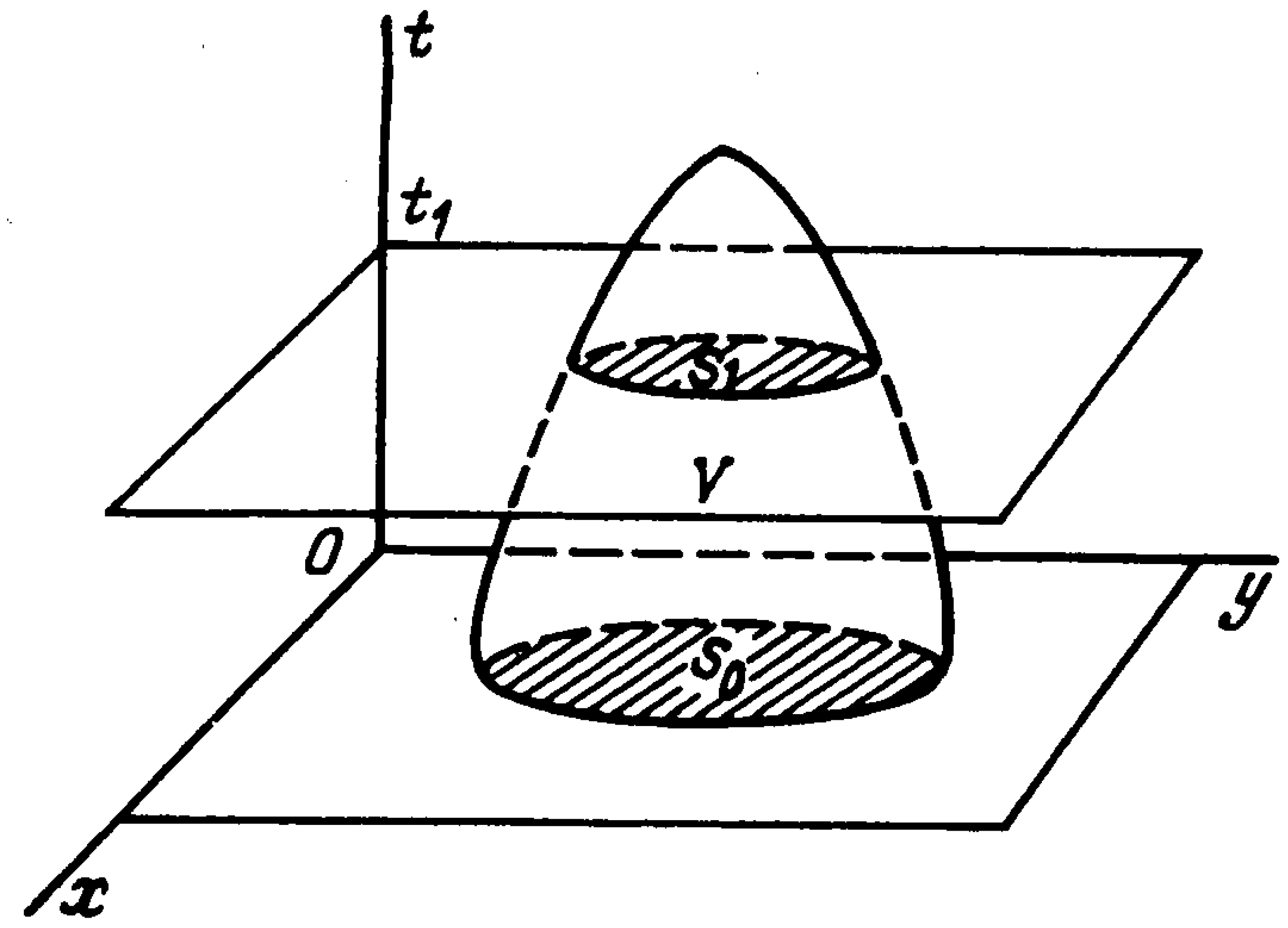
4. Интегралы энергии для уравнений нестационарных трансзвуковых течений. В теории уравнений в частных производных интеграл энергии применяется для получения оценок решения; использование этого интеграла позволяет доказать теорему единственности решений уравнений такого рода. Детальное рассмотрение этих вопросов приведено, например, в [18, 19]. Введенное в разд. 1 модифицированное уравнение позволяет провести аналогичное рассмотрение для нестационарного трансзвукового течения. К сожалению, и этот анализ не лишен недостатков (см. ниже разбор смешанных задач).

Продифференцируем уравнение (1.7) по x, введем новую неизвестную функцию $u = \varphi_x$ и после умножения на u_t запишем уравнение в дивергентном виде

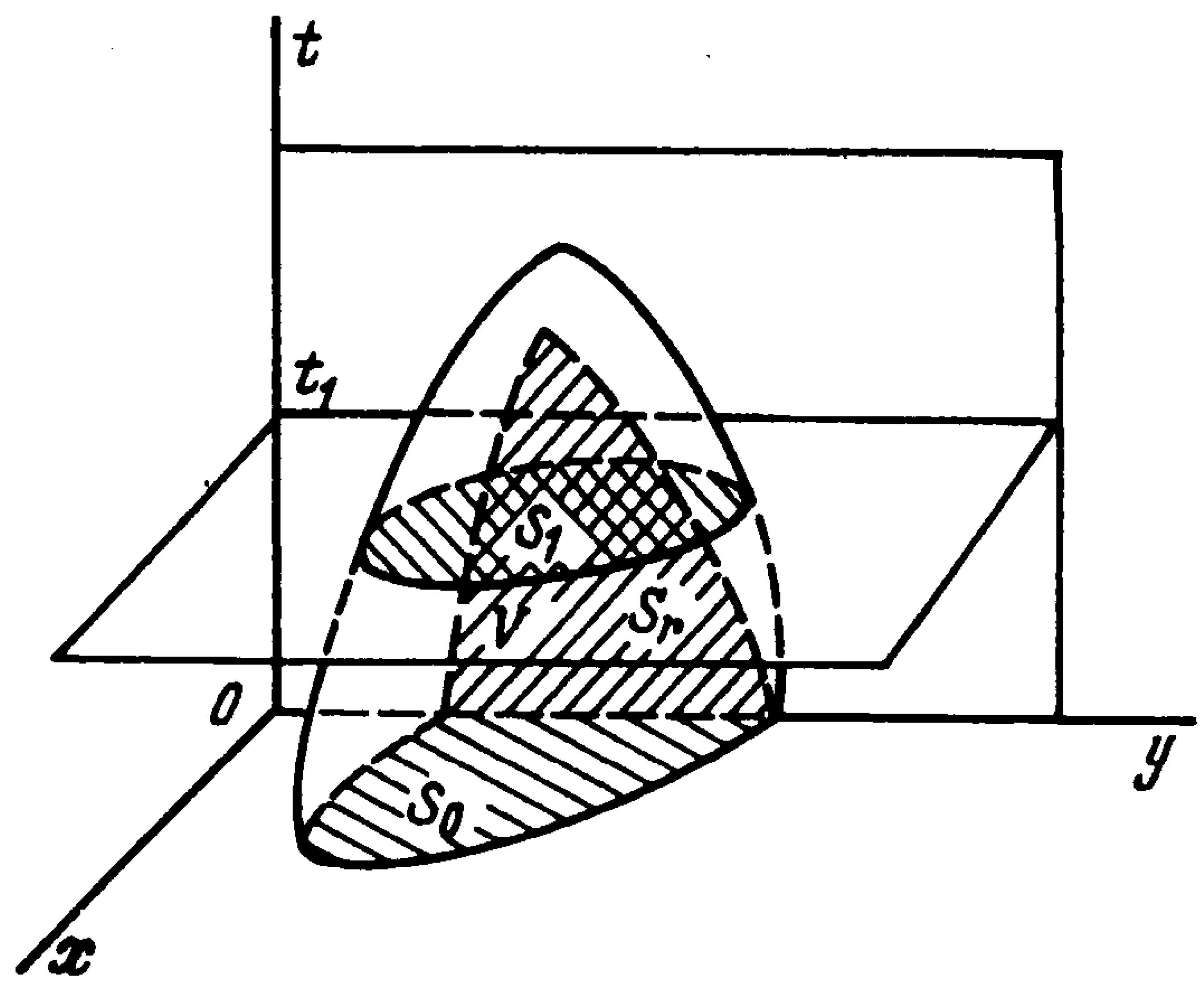
$$-\left(\frac{K^*}{2}(u_x)^2\right)_t + (K^* u_x u_t)_x - \left(\frac{1}{2}(u_y)^2\right)_t + (u_y u_t)_y - ((u_t)^2)_x - \left(\frac{\varepsilon}{2}(u_t)^2\right)_t = Q \tag{4.1}$$

$$Q = -\frac{1}{2}K_t^*(u_x)^2$$

Проинтегрируем уравнение (4.1) по области V, представляющей собой внутренность



Фиг. 3



Фиг. 4

конуса зависимости с основанием – плоскостью $t = 0$. Поверхность S этой области образована поверхностями конуса зависимости S_l и S_0 – вырезаемой этим конусом частью плоскости $t = 0$ (фиг. 3). Применяя теорему Гаусса – Остроградского, получим

$$\iint\limits_S q dS = \iiint\limits_V Q dV \tag{4.2}$$

$$q = \tau\varkappa + ((K^* u_x - u_t)u_t)\xi + (u_y u_t)\eta, \quad \varkappa = -\frac{1}{2}(\varepsilon(u_t)^2 + (u_y)^2 + K^*(u_x)^2) \tag{4.3}$$

(τ, ξ, η – компоненты орта внешней к S нормали по осям t, x, y).

Проведем еще одно сечение (S_1) характеристического конуса плоскостью $t = t_1 > 0$. Тогда аналогично (4.2) имеем

$$\iint\limits_{S_l} q dS + \iint\limits_{S_1} q dS + \iint\limits_{S_0} q dS = \iiint\limits_V Q dV \tag{4.4}$$

(V – усеченная плоскостью $t = t_1$ внутренность конуса зависимости с основанием $t = 0$).

По определению характеристического конуса на его поверхности квадратичная форма (4.3) неотрицательна. Тогда из (4.4) следует

$$\iint\limits_{S_1} \varkappa dS \leqslant \iint\limits_{S_0} \varkappa dS + \iiint\limits_V Q dV \tag{4.5}$$

(на S_0 орт внешней нормали есть (–1, 0, 0), на S_1 –(1, 0, 0)). В (4.5) подынтегральное выражение Q можно оценить через подынтегральные выражения поверхностных интегралов и, переходя от объемного интеграла к повторному, получить оценку решения рассматриваемого уравнения.

Введем обозначение

$$I(t_1) = \iint\limits_{S_1} \varkappa dS$$

после чего (4.5) можно переписать в виде интегрального

$$I(t_1) \leqslant I(t_0) + M\int\limits_{t_0}^{t_1} I(\hat{t}) d\hat{t}$$

или дифференциального неравенства $dI/dt \leqslant MI$ с решением $I \leqslant I(t_0)e^{Mt}$.

Очевидно, что если $I(t_0) = 0$, то $I \equiv 0$ для любого $t_1 > t_0$ внутри конуса зависимости решения от начальных данных. Поэтому тождественность нулю начальных условий приводит к тому, что решение остается нулевым во все последующие моменты времени. Следовательно, любое нетривиальное решение единственно внутри конуса зависимости.

Заметим, что проведение подобного доказательства для решений уравнения ЛРЦ невозможно, поскольку у этого уравнения конус зависимости отсутствует. Нетривиальные характеристики, выходящие из пространственной поверхности $t = \text{const}$, образуют параболоид влияния. Задача Коши для уравнения ЛРЦ либо вообще не имеет решения, либо имеет их бесчисленное множество.

Были рассмотрены [20] вопросы корректной постановки ряда смешанных задач газовой динамики. Смешанная задача оказывается корректно поставлённой (ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных и граничных данных) внутри конуса зависимости при диссипативности интеграла энергии. Необходимым условием для этого является диссипативность граничных условий.

При рассмотрении смешанных задач область V, в которой строится интеграл энергии, имеет границу (фиг. 4), состоящую из части поверхности характеристического конуса, сечений его поверхностями $t = 0$, $t = T$, а также $S_г$ – сечения конуса поверхностью $x = 0$ (или другой плоскостью $Ax + By = \text{const}$), где заданы граничные условия.

Интегрируя соотношение (4.1) по области V и применяя теорему Гаусса–Остроградского, получим неравенство, отличающееся от (4.5) наличием в левой части дополнительного слагаемого

$$-\iint\limits_{S_г}(K^*u_x - u_t)u_t dydt$$

(орт внешней нормали к $S_г$ есть (0, –1, 0)).

По определению [20] граничные условия диссипативны, если

$$u_t(K^*u_x - u_t)|_{x=0} \leqslant 0 \tag{4.6}$$

В этом случае интеграл энергии получается по методике, использованной для задачи Коши.

Отметим физический смысл условия (4.6). Для сверхзвукового ($K^* < 0$) ускоряющегося и в направлении оси x ($u_x > 0$), и с течением времени ($u_t > 0$) потока условие (4.6) удовлетворяется и граничные условия диссипативны. В этом случае выполняется неравенство (4.5), следовательно, задача Коши для трансзвуковых ускоряющихся течений корректна, что находится в согласии с результатами разд. 2 об устойчивости такого ускоряющегося течения.

Если с течением времени скорость растет ($u_t > 0$), но $u_x < 0$ (рассматривается область торможения сверхзвукового потока $K^*u_x > 0$), если при этом еще и $K^*u_x > u_t$, то условие (4.6) не выполняется, задача Коши некорректна. В случае $K^*u_x < u_t$ ситуация обратная. Таким образом, в сверхзвуковом нестационарно разгоняющемся течении малые возмущения имеют возможность нарастать и вызывать развитие неустойчивости только в областях сильного пространственного торможения течения.

Если сверхзвуковое течение нестационарно тормозится, то неустойчивость может развиться при достаточно большом положительном градиенте u_x.

В зонах дозвукового течения ($K^* > 0$) при нестационарном разгоне ($u_t > 0$) можно ожидать рост возмущений и в областях ускорения течения (при достаточно больших градиентах u_x, так что $K^*u_x > u_t$). В этом случае картина оказывается прямо противоположной случаю сверхзвукового течения.

Заметим, что результаты получаются совершенно другими, если граничные условия ставятся не на плоскости $x = 0$, а на плоскости $y = 0$. В этом случае имеем неравенство, отличающееся от (4.5) наличием в левой части дополнительного слагаемого

$$-\iint\limits_{S_\Gamma} u_y u_t dxdt$$

(орт внешней нормали к S_Γ теперь есть (0, 0, –1))

Граничные условия диссипативны, если

$$u_y u_t|_{y=0} \leqslant 0 \tag{4.7}$$

Условие (4.7) удовлетворяется, например, при $u_t > 0$, $u_y < 0$. Для таких течений в каждый момент времени продольная составляющая скорости течения уменьшается при удалении от оси симметрии течения $y = 0$. Очевидно, что условие (4.7) не выполняется для нестационарного течения Тейлора, реализующегося при запуске (разгоне) трансзвукового сопла. Для нестационарно тормозящегося трансзвукового течения имеем $u_t < 0$ и (4.7) выполняется при $u_y > 0$, т.е. для течений с продольной составляющей скорости, растущей при удалении от оси симметрии течения $y = 0$ (таковы, например, течения Тейлора, реализующиеся при торможении трансзвукового сопла).

Сравнивая (4.6) и (4.7), можно сделать вывод, что доказательство устойчивости трансзвукового течения, выполненное на основе интеграла энергии для модифицированного уравнения (1.7), существенно зависит от положения в пространстве линии постановки граничных условий, и, следовательно, полученные результаты ограниченно пригодны, а иногда и неправильны.

5. Учет высших приближений трансзвукового разложения. Обобщая изложенный материал по модификации уравнения нестационарного трансзвукового течения, и учитывая указанные недостатки полученных уравнений, естественно предложить для анализа проблем околозвуковых течений уравнение, включающее члены следующего порядка малости (порядка $\delta^2 = \varepsilon$). Имеем из (1.4) (малые постоянные слагаемые εK и εK^2 опущены):

$$\begin{gathered}K^*\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - 2\varphi_{xt} - \varepsilon\left[\left((\gamma-1)\varphi_t + \frac{\gamma+1}{2}(\varphi_x)^2\right)\varphi_{xx} + 2\varphi_y\varphi_{xy} + \right.\\ \left. +(\gamma-1)\varphi_x\varphi_{yy} + 2\varphi_x\varphi_{xt} + \varphi_{tt}\right] = 0\end{gathered} \tag{5.1}$$

Член φ_{tt} соответствует сингулярным возмущениям. Других сингулярных слагаемых нет, но могут быть велики производные и их комбинации φ_t, $(\varphi_x)^2$, φ_y, φ_{xy} (например, при $(\varphi_x)^2 \sim \varepsilon^{-1}$ величина φ_x не очень велика, но $(\varphi_x)^2$ нужно учитывать), другие комбинации входящих в (5.1) производных. Кроме того, оставленные нелинейные члены порядка ε имеют различный физический смысл: $\varphi_y\varphi_{xy}$ и $\varphi_x\varphi_{yy}$ описывают нелинейность в поперечном основному трансзвуковому течению направлении; $\varphi_t\varphi_{xx}$ и $\varphi_x\varphi_{xt}$ – дополнительную нелинейность, проявляющуюся при нестационарном движении; $(\varphi_x)^2\varphi_{xx}$ – дополнительную нелинейность в направлении основного течения.

Характеристические поверхности, определяемые уравнением (5.1), удовлетворяют соотношению (отброшены члены порядка заведомо выше ε)

$$\begin{gathered}K_1^* t^2 - K_3 t(x-x_0) - K_4 t(y-y_0) - \varepsilon(x-x_0)^2 = \left(\frac{K_3}{4K_2} + \varepsilon K^*\right)(y-y_0)^2\\ K_1^* = K^* - \varepsilon\left((\gamma-1)\varphi_t + \frac{\gamma+1}{2}(\varphi_x)^2\right),\ K_2 = 1 - \varepsilon(\gamma-1)\varphi_t, \qquad (5.2)\\ K_3 = -2(1+\varepsilon\varphi_x),\ K_4 = -2\varepsilon\varphi_y\end{gathered}$$

При постоянных коэффициентах K_1^*, K_2, K_3, K_4, K^* уравнение (5.2) для каждого фиксированного t дает эллипс в плоскости переменных x, y. С течением времени эллипс увеличивается в размерах, фокусы и центр эллипса смещаются вдоль оси x. Вообще говоря, коэффициенты в уравнении (5.2) непостоянны и могут менять знаки в разных областях поля течения.

Уравнение огибающей характеристик (5.2) при изменении времени определяется уравнением (коэффициенты считаются постоянными, учитывается разложение по ε)

$$(x-x_0)=\left\{\frac{K_4}{2}\pm\sqrt{-K^*}\left[1-\frac{\varepsilon}{2K^*}\left(\frac{\gamma+1}{2}(\varphi_x)^2+(\gamma-1)(\varphi_t+\varphi_x)\right)\right]\right\}(y-y_0) \tag{5.3}$$

Видно, что (как и в (1.10)) огибающая существует только в сверхзвуковом течении $K^*<0$. Слагаемое $K_4/2$ в (5.3) отвечает распространению возмущения в поперечном основному течению направлении со скоростью $2\varepsilon v$. Приближенно можно считать эту скорость постоянной и имеющей разное направление по разные стороны от оси $y = y_0$. Таким образом, огибающая волновых фронтов от точечного источника возмущений идет круче, чем (1.10). Кроме того, наклон увеличивается за счет слагаемого в (5.3), связанного с $(\varphi_x)^2$, и может уменьшаться или увеличиваться за счет взятых с соответствующим знаком слагаемых, содержащих φ_t и φ_x.

Для исследования устойчивости трансзвукового течения по отношению к слабым (линейным) нестационарным возмущениям на основе уравнения (5.1), как обычно, проведем линеаризацию этого уравнения и, считая коэффициенты его постоянными, будем искать решение, пропорциональное $\exp(-i\omega t + ikx + ily)$. Получим дисперсионное соотношение с корнями (использована малость ε)

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}=\frac{k}{\varepsilon}\Bigg[&1-\frac{\varepsilon}{2k}(i(\gamma-1)\varphi^0_{xx}-2k\varphi^0_x)\pm(1-\frac{\varepsilon}{2k}(i(\gamma-1)\varphi^0_{xx}-2k\varphi^0_x)-\\&-\frac{\varepsilon}{2k^2}\Big\{-k^2K^{*0}-ik(\gamma+1)\varphi^0_{xx}-l^2-\varepsilon(\gamma+1)ik\varphi^0_x\varphi^0_{xx}+\varepsilon k^2\left((\gamma-1)\varphi^0_t+\frac{\gamma+1}{2}(\varphi^0_x)^2\right)-\\&-2il\varepsilon\varphi^0_{xy}+2\varepsilon kl\varphi^0_y+(\gamma-1)\varepsilon ik\varphi^0_{yy}+(\gamma-1)\varepsilon l^2\varphi^0_x-2\varepsilon ik\varphi^0_{xt}\Big\}\Big)\Bigg]\end{aligned} \tag{5.4}$$

По виду корней (5.4) можно заключить, что любая неоднородность течения, выражаемая производными $\overset{0}{\varphi}_{yy}=v_y$, $\overset{0}{\varphi}_{xy}=v_x=u_y$, $\overset{0}{\varphi}_{xt}=u_t$ и функциями $\overset{0}{\varphi}_y=v$, $\overset{0}{\varphi}_x=u$, приводит к нарастанию возмущений, соответствующих или первому, или второму корню (5.4).

На основе уравнения (5.1) рассмотрим возникновение нестационарных ударных волн из волновых фронтов, распространяющихся поперек направлению основного течения, от двух источников на оси $x = x_0$, с ординатами y_{01}, y_{02}. Вычислим по уравнению (5.2) $\partial y/\partial y_0$ вдоль луча $x = x_0$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial y_0}=1+\frac{t}{2(y-y_0)}\Bigg[&(y+1)t\frac{\partial u}{\partial y_0}\left(1+\varepsilon\left((\gamma+3)u-K-(\gamma-1)\varphi_t+\frac{vt}{y-y_0}\right)\right)+\\&+\varepsilon t(\gamma-1)\frac{\partial\varphi_t}{\partial y_0}+\varepsilon t(\gamma+1)u\frac{\partial u}{\partial y_0}-2\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y_0}(y-y_0)\Bigg]\end{aligned}$$

Для фронтов, близких к плоскому, $\partial u/\partial y_0 = 0$ и главным будет влияние последнего слагаемого, т.е.

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}=1+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y_0}t$$

Для возникновения ударной волны необходимо

$$\frac{\partial v}{\partial y_0} = -\frac{1}{\varepsilon t} < 0$$

что соответствует результату (3.3) (опрокидываются волновые фронты возмущений сжатия).

Уравнение нестационарного трансзвукового течения в модифицированном виде (5.1) также является неинвариантным относительно замены осей пространственных координат x, y. Поэтому условие диссипативности граничных условий в смешанной задаче будет по-прежнему сильно зависеть от выбора линии постановки граничных условий.

Выясним все же, чего можно добиться учетом дополнительных членов трансзвукового разложения. Рассмотрим интеграл энергии для смешанной задачи на основе уравнения (5.1).

Требование диссипативности граничных условий теперь такое:

при постановке граничных условий на оси $x = 0$

$$u_t\left[K^* u_x - u_t - \varepsilon\left((y-1)\varphi_t + \frac{\gamma+1}{2}u^2\right)u_x + \varphi_y u_y + uu_t\right]\Bigg|_{x=0} \leqslant 0 \tag{5.5}$$

при постановке граничных условий на оси $y = 0$

$$u_t[u_y - \varepsilon(\varphi_y u_x + (\gamma-1)uu_y)]|_{y=0} \leqslant 0 \tag{5.6}$$

Очевидно, что (5.5) и (5.6) заметно различаются.

Если величины $\varphi_y = v$, u_y велики, то вместо (5.6) можно использовать неравенство

$$u_t[u_y - \varepsilon v u_x]|_{y=0} \leqslant 0$$

Оно выполняется, например, при $u_t > 0$, $u_y > 0$, $v > 0$, $u_x > 0$, $u_y < \varepsilon v u_x$ (что справедливо для нестационарных течений тейлоровского типа, реализующихся при запуске трансзвукового сопла).

Таким образом, использование уравнения (5.1) вместо (1.7) позволяет получить результат об устойчивости нестационарного ускоряющегося течения Тейлора при достаточно больших v, u_x.

Рассмотрим оставшиеся в (1.4) члены более высокого порядка малости по δ. При учете третьего и более высоких приближений возмущенное течение уже нельзя считать изэнтропическим. Возникающие искривленные слабые ударные волны порождают градиенты энтропии (скачок энтропии на таких разрывах – величина третьего порядка по амплитуде скачка давления), определяющие в соответствии с формулой Крокко завихренность течения. Можно принять, что составляющие скорости газа в возмущенном течении представляют собой сумму потенциальной и малой непотенциальной составляющих. Производные от последней войдут в третье приближение в соответствии с формулой (1.5).

Рассмотрим оставшиеся члены третьего порядка малости (порядка ε^2), определяемые потенциалом в уравнении (1.4):

$$\frac{\gamma-1}{2}\varphi_y^2\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} - (\gamma-1)\varphi_t\varphi_{yy} - 2\varphi_y\varphi_{yt} \tag{5.7}$$

Новой, неучтенной предыдущими приближениями, производной является в (5.7) только φ_{yt}.

Потенциальный член четвертого порядка малости (порядка ε^3) в (1.4) только один

$$-\frac{\gamma+1}{2}\varphi_y^2\varphi_{yy} \tag{5.8}$$

Неучтенных предыдущими приближениями производных он не содержит.

Как и следовало ожидать, третье и четвертое приближения содержат главным образом малые добавки к членам, уже учтенным предыдущими приближениями, что приводит к непринципиальности учета высших (третьего и четвертого) приближений трансзвукового разложения при исследовании околозвуковых течений. По-видимому, уравнение (5.1) оказывается вполне пригодным для анализа нестационарных трансзвуковых течений. Единственно заметим, что и после учета (5.7), (5.8) уравнение не инвариантно относительно смены осей пространственных координат. Поэтому результаты, получаемые из энергетических неравенств для смешанных задач, будут зависеть от выбора линии постановки граничных условий.

6. Заключение. Рассмотренное здесь сингулярное уравнение, по-видимому, следует использовать вместо уравнения ЛРЦ при изучении нестационарных трансзвуковых течений. Приведенное уравнение более правильно с физической точки зрения описывает структуру течения в окрестности линии перехода через скорость звука. Оно позволяет анализировать поведение и низко-, и высокочастотных нестационарных возмущений течения, не имеет вырожденных характеристических поверхностей и допускает построение конуса зависимости решения от начальных данных. Постановка задачи Коши для него оказывается корректной и, по крайней мере в малом, решение задачи единственно. При исследовании особенностей трансзвуковых течений в пространственной (двумерной) постановке следует использовать модификации уравнения нестационарного трансзвукового течения, включающие высшие приближения трансзвукового разложения.

Большое влияние на интересы автора в области трансзвуковых течений оказали монография О.С. Рыжова [2] и многочисленные беседы с В.Н. Диесперовым, которому автор выражает глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S.* On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Mathematics and Physics. 1948. V. 27. № 3. P. 220–231 (см. также *Х.Ш. Тзян, Ц.Ц. Лин, Е. Рейснер*. О двумерном неустановившемся движении тонкого тела в сжимаемой жидкости / Газовая динамика. Сб. статей. Под ред. С.Г. Попова и С.В. Фальковича. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. С. 183–196).
2. *Рыжов О.С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 238 с.
3. *Коул Дж., Кук Л.* Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
4. *Севостьянов Г.Д.* Уравнение нестационарных околозвуковых течений идеального газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 105–109.
5. *Ehlers F.E.* A finite difference method for the solution of the transonic flow around harmonically oscillating wings // AIAA Paper. 1974. № 543. 6 p.
6. *Севостьянов Г.Д.* О некоторых решениях околозвуковых уравнений // Аэродинамика / Под ред. С.В. Фальковича. Саратов: Изд.-во Сарат. ун-та, 1975. Вып. 4(7). С. 47–55.
7. *Куо И.Х., Сирс У.Р.* Плоские дозвуковые и трансзвуковые потенциальные течения // Общая теория аэродинамики больших скоростей / Под ред. У.Р. Сирса. М.: Воениздат, 1962. С. 432–515.
8. *Ван Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 181 с.
9. *Богданов А.Н., Куликовский В.А.* Стационарные слабовозмущенные трансзвуковые течения колебательно-релаксирующего газа // ПМТФ. 1993. № 2. С. 48–58.
10. *Богданов А.Н., Куликовский В.А.* Возникновение ударных волн в трансзвуковых течениях колебательно-релаксирующего газа // Мат. моделирование. 1992. Т. 4. № 12. С. 155–159.
11. *Кантровиц А.* Образование и устойчивость прямых скачков при установившихся течениях в каналах // Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 349–363.
12. *Куликовский А.Г., Слободкина Ф.А.* Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 593–602.

13. *Prasad P.* Nonlinear wave propagation on an arbitrary steady transonic flow // J. Fluid Mech. 1973. V. 57. Pt. 4. P. 721–737.
14. *Кузьмин А.Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. 204 с.
15. *Богданов А.Н.* Моделирование переходного режима работы трансзвукового сопла // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 9. С. 117–126.
16. *Гурусвами Г.П., Гурджиан П.М.* Расчет нестационарного трансзвукового обтекания комбинации крыла полного размаха с фюзеляжем // Аэрокосм. техника. 1989. № 11. С. 3–11.
17. *Kuo Y.H.* On the stability of two-dimensional smooth transonic flows // J. Aeronaut. Sci. 1951. V. 18. № 1. P. 1–6.
18. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
19. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 391 с.
20. *Блохин А.М.* Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.VIII.1994