УДК 532.591

© 1997 г. И.С. Жукова, А.И. Саичев

СТАТИСТИКА ЭЙЛЕРОВА ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В НЕСЖИМАЕМОЙ И СЖИМАЕМОЙ СРЕДАХ

Получены общие формулы связи лагранжевых и эйлеровых вероятностных распределений якобиана, а также плотности пассивной примеси в турбулентной среде. На их основе в случаях несжимаемой и сжимаемой сред проанализированы вероятностные свойства плотности при различных начальных распределениях последней. Получены и исследованы выражения для моментов поля плотности.

Изучению статистических свойств плотности пассивной примеси в турбулентных средах посвящен ряд работ (например, [1–4]), где обычно исследуют среднюю плотность пассивной примеси. Вероятностные же ее свойства мало изучены. Заметим еще, что хотя в работах по турбулентной диффузии чаще всего обсуждают случай несжимаемой среды, диффузия примеси в сжимаемых средах так же важна для приложений. Это связано с тем, что плавучая примесь на поверхности несжимаемой среды ведет себя подобно примеси в двумерной сжимаемой среде [5, 6]. Данная статья посвящена методам описания вероятностных свойств пассивной примеси в несжимаемых и сжимаемых средах, а также изучению их особенностей.

1. Общие формулы связи лагранжевой и эйлеровой статистик полей в турбулентных средах. Ниже большое внимание уделено сравнению статистики случайных полей в лагранжевом и эйлеровом представлениях, а также установлению связей между подобными статистическими характеристиками турбулентных сред. Эти связи полезны при теоретическом анализе хаотических гидродинамических полей, когда анализ ведется в одном представлении, а требуется описание свойтв полей в другом представлении. Анализируются вероятностные свойства плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ пассивной примеси в случайном поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Полная программа таких исследований должна содержать предварительный анализ статистических свойств поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющего нелинейным гидродинамическим уравнениям. Однако эта очень сложная задача до сих пор не решена. Поэтому будем, следуя, например, [5, 6], считать статистические свойства поля $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ заданными. А именно, будем считать, что $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – статистически однородное изотропное гауссово случайное поле с корреляционным тензором

$$\langle v_i(\mathbf{x},t) v_j(\mathbf{x}+\mathbf{s},t+\tau)\rangle = b_{ij}(\mathbf{s},\tau) \tag{1.1}$$

Между эйлеровыми и лагранжевыми статистическими характеристиками случайных полей имеются достаточно общие связи. Пользуясь ими, удается по известной лагранжевой статистике восстановить эйлерову статистику случайных полей. Поэтому прежде всего выведем и обсудим указанные формулы связи. Для этого рассмотрим совместную эйлерову плотность вероятностей

$$f_E(\mathbf{y}, j; \mathbf{x}, t) = \langle \delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}(\mathbf{x},t))\delta(j - j(\mathbf{x},t))\rangle \tag{1.2}$$

лагранжевых координат $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ частицы, попавшей в точку наблюдения с эйлеровыми координатами **x**, и эйлерова поля якобиана $j(\mathbf{x}, t)$, получающего из соответствующего лагранжева поля $J(\mathbf{y}, t)$ заменой **y** на $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$:

$$j(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), t)$$

Преобразуем правую часть равенства (1.2), воспользовавшись соотношением

$$\delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)) = j(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)) \tag{1.3}$$

Подставив (1.3) в (1.2) и учитывая свойства дельта-функций, получим

$$f_E(\mathbf{y}, j; \mathbf{x}, t) = jf_L(\mathbf{x}, j; \mathbf{y}, t) \tag{1.4}$$

где

$$f_L(\mathbf{x}, j; \mathbf{y}, t) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{y}, t))\delta(j - J(\mathbf{y}, t)) \rangle \tag{1.5}$$

– совместное лагранжево вероятностное распределение координат $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ частицы, имеющей лагранжевы координаты **y**, и лагранжева поля якобиана $J(\mathbf{y}, t)$.

Если случайное поле скорости среды $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ статистически однородно, то из (1.4) следует еще одна полезная формула, связывающая лагранжево и эйлерово вероятностные распределения якобиана. Найдем ее, заметив, что в статистически однородной среде оба входящие в (1.4) вероятностные распределения зависят, помимо j, только от разности пространственных координат **x** и **y**:

$$f_E(\mathbf{y} - \mathbf{x}, j; t) = jf_L(\mathbf{x} - \mathbf{y}, j; t)$$

Интегрируя обе части равенства по всем **x** или **y**, получим, что вероятностное распределение эйлерова поля якобиана $f_E(j; t) = \langle \delta(j - j(\mathbf{x}, t)) \rangle$ равно вероятностному распределению соответствующего лагранжева поля $f_L(j; t) = \langle \delta(j - J(\mathbf{y}, t)) \rangle$ с множителем j, учитывающим увеличение (при $j > 1$) доли расширившихся жидких частиц в статистическом ансамбле эйлеровых полей по сравнению с ансамблем лагранжевых полей.

Формула (1.4) связывает лагранжево и эйлерово вероятностные распределения якобиана. Для физических приложений естественнее вооружиться подобной формулой связи вероятностных распределений плотности пассивной примеси. Вывод ее подобен выводу формулы (1.4). Возьмем эйлерово совместное вероятностное распределение лагранжевых координат и плотности:

$$\varphi_E(\mathbf{y}, \rho; \mathbf{x}, t) = \langle \delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t))\delta(\rho - \rho(\mathbf{x}, t)) \rangle$$

Заметив, что соотношение (1.3) можно записать в эквивалентной форме

$$\delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)) = \frac{\rho_0(\mathbf{y})}{R(\mathbf{y}, t)}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{y}, t))$$

где $\rho_0(\mathbf{y})$ – начальное поле плотности, а $R(\mathbf{y}, t)$ – поле плотности в лагранжевой системе координат, перепишем предыдущее равенство в виде

$$\rho\varphi_E(\mathbf{y}, \rho; \mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{y})\varphi_L(\mathbf{x}, \rho; \mathbf{y}, t) \tag{1.6}$$

где

$$\varphi_L(\mathbf{x}, \rho; \mathbf{y}, t) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{y} - t))\delta(\rho - R(\mathbf{y}, t)) \rangle \tag{1.7}$$

– лагранжево совместное вероятностное распределение полей $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ и $R(\mathbf{y}, t)$. Таким образом, (1.6) – искомая формула связи лагранжева и эйлерова полей плотности. В ней, как и всюду ниже, начальная плотность $\rho_0(\mathbf{y})$ полагается заданной.

Интегрируя равенство (1.6) по всем **y**, придем к формуле

$$\rho\varphi_\rho(\rho; \mathbf{y}, t) = \int \rho_0(\mathbf{y})\varphi_L(\mathbf{x}, \rho; \mathbf{y}, t)d\mathbf{y} \tag{1.8}$$

выражающей одноточечное вероятностное распределение эйлерова поля плотности

$\varphi_\rho(\rho;\mathbf{x},t)=\langle\delta(\rho-\rho(\mathbf{x},t))\rangle$ через совместное вероятностное распределение лагранжевых полей $\mathbf{X}(\mathbf{y},t)$ и $R(\mathbf{y},t)$.

Интегрируя равенство (1.8) по ρ, получим известную под названием фундаментальной теоремы теории турбулентной диффузии [1] формулу

$$\langle\rho(\mathbf{x},t)\rangle_E=\int\rho_0(\mathbf{y})f_X(\mathbf{x};\mathbf{y},t)d\mathbf{y} \qquad (1.9)$$

выражающую среднюю плотность пассивной примеси через вероятностное распределение координат фиксированных частиц

$$f_X(\mathbf{x};\mathbf{y},t)=\langle\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(\mathbf{y},t))\rangle \qquad (1.10)$$

Укажем еще одну, иногда более удобную, модификацию формулы (1.8). Дело в том, что входящее в правую часть равенства (1.8) лагранжево вероятностное распределение φ_L зависит не только от объективных свойств хаотически движущейся среды, но и от "субъективной" начальной плотности примеси $\rho_0(\mathbf{y})$. Чтобы явно разделить вклад объективных и субъективных факторов, выразим φ_L (1.7) через "полностью объективное" лагранжево вероятностное распределение f_L (1.5). При помощи очевидного равенства

$$\delta\left(\rho-\frac{\rho_0(\mathbf{y})}{J(\mathbf{y},t)}\right)=\frac{\rho_0(\mathbf{y})}{\rho^2}\delta\left(J(\mathbf{y},t)-\frac{\rho_0(\mathbf{y})}{\rho}\right)$$

согласно которому

$$\varphi_L(\mathbf{x},\rho;\mathbf{y},t)=\frac{\rho_0(\mathbf{y})}{\rho^2}f_L\left(\mathbf{x},\frac{\rho_0(\mathbf{y})}{\rho};\mathbf{y},t\right)$$

Отсюда и из (1.8) получаем

$$\varphi_\rho(\rho;\mathbf{x},t)=\frac{1}{\rho^3}\int\rho_0^2(\mathbf{y})f_L\left(\mathbf{x},\frac{\rho_0(\mathbf{y})}{\rho};\mathbf{y},t\right)d\mathbf{y} \qquad (1.11)$$

2. Вероятностные свойства плотности в несжимаемой среде. Анализ вероятностных свойств плотности начнем с простейшего случая хаотически движущейся несжимаемой жидкости. При этом входящее в правую часть равенства лагранжево распределение имеет вырожденный вид

$$f_L(\mathbf{x},j;\mathbf{y},t)=f_X(\mathbf{x};t|\mathbf{y})\delta(j-1),\quad f_X(\mathbf{x};t|\mathbf{y})=\langle\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(\mathbf{y},t))\rangle \qquad (2.1)$$

где $f_X(\mathbf{x};t|\mathbf{y})$ – вероятностное распределение координат фиксированной частицы примеси.

В дальнейшем будем изучать статистические свойства пассивной примеси в диффузионном приближении. Применительно к обсуждаемой задаче это приближение предполагает быстрое спадание корреляций поля скорости, так что корреляционный тензор (1.1) можно заменить эффективным $b_{ij}(\mathbf{s},\tau)=d_{ij}(\mathbf{s})\delta(\tau)$ с временем корреляции равным нулю. При этом распределение, определяемое второй формулой (2.1), удовлетворяет стандартному уравнению диффузии [5–7]

$$\frac{\partial f_X}{\partial t}=D\Delta f_X,\quad f_X(\mathbf{x};t=0|\mathbf{y})=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad D=\frac{1}{N}\int_0^\infty b_{ii}(0,\tau)d\tau \qquad (2.2)$$

Здесь D – коэффициент турбулентной диффузии, а N – размерность пространства. Заметим, что в случае несжимаемой среды из первой формулы (2.1) как частный случай следует тождество

$$f_X(\mathbf{x};t|\mathbf{y})\equiv f_Y(\mathbf{y};t|\mathbf{x})$$

Пользуясь им, перепишем первую формулу (2.1) в более удобной для анализа форме

$$f_L(\mathbf{x}, j; \mathbf{y}, t) = f_Y(\mathbf{y}; t|\mathbf{x})\delta(j-1) \tag{2.3}$$

После подстановки (2.3) в (1.11), выражение для эйлерова вероятностного распределения плотности в турбулентной несжимаемой среде преобразуется к виду

$$\varphi_\rho(\rho; \mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho}\int \rho_0(\mathbf{y}) f_Y(\mathbf{y}, t|\mathbf{x})\delta(\rho - \rho_0(\mathbf{y}))d\mathbf{y} \tag{2.4}$$

Укажем несколько тривиальных, но полезных для понимания дальнейшего, следствий этой формулы. При $t = 0$, когда перемешивание примеси из-за хаотического движения среды еще отсутствует, $f_Y = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, и вероятностное распределение (2.4) вырождается в дельтаобразное: $\varphi_\rho(\rho; \mathbf{x}, t) = \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{x}))$. Такое же вырожденное распределение получим в любой момент времени, если плотность примеси вначале была всюду одинакова: $\rho_0(\mathbf{x}) = \rho_0 = \text{const}$. Тогда любые движения несжимаемой жидкости оставляют плотность примеси неизменной, а ее вероятностное распределение (2.4) равным $\varphi_\rho(\rho; \mathbf{x}, t) = \delta(\rho - \rho_0)$. Если же начальная плотность примеси распределена в пространстве неравномерно, то за счет хаотического движения среды, в точку наблюдения с эйлеровыми координатами $\mathbf{x}$ попадают, в разных реализациях, частицы примеси с разными начальными (лагранжевыми) координатами $\mathbf{y}$, а значит, и с различными, вообще говоря, значениями плотности $\rho_0(\mathbf{y})$. В итоге плотность примеси в эйлеровом представлении становится случайной, а ее вероятностное распределение перестает быть дельтаобразным, "размазываясь" по оси ρ.

Пользуясь "выкалывающим" свойством дельта-функции, перепишем выражение (2.4) для вероятностного распределения поля плотности в виде поверхностного интеграла

$$\varphi_\rho(\rho; \mathbf{x}, t) = \int\limits_{S(\rho)} \frac{f_Y(\mathbf{y}; t|\mathbf{x})}{|\nabla\rho_0(\mathbf{y})|}ds \tag{2.5}$$

где интегрирование ведется по поверхности $S(\rho)$ равного уровня начального поля плотности $\rho_0(\mathbf{y})$. Точки этой поверхности $\mathbf{y}(\rho)$ удовлетворяют равенству $\rho_0(\mathbf{y}(\rho)) = \rho$. При естественных предположениях о виде $\rho_0(\mathbf{y})$ выражение (2.5) еще более упрощается. Пусть, например, примесь в начале сферически симметрично распределена, т.е. $\rho_0 = \rho_0(r)$, где r – радиальная координата. Тогда поверхности равного уровня будут сферами, а (2.5) переходит в равенство

$$\varphi_\rho(\rho; \mathbf{x}, t) = -r^2(\rho)\frac{dr}{d\rho}\int\limits_0^\pi d\theta \sin\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi f_Y(\mathbf{y}; t|\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

где θ и φ – угловые координаты на сфере радиуса $r(\rho)$, определяемого как корень уравнения $\rho_0(r) = \rho$. Положим для простоты, что $\rho_0(r)$ – монотонно убывающая функция, так что каждому значению ρ соответствует лишь одна сфера.

Подставим в (2.6) решение диффузионного уравнения (2.2)

$$f_Y(\mathbf{y}; \mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{4Dt}\right] \tag{2.7}$$

и сориентируем сферическую систему координат так, чтобы направление $\theta = 0$ совпадало с направлением на точку наблюдения $\mathbf{x}$. Тогда

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = \mathrm{r}^2(\rho) + R^2 - 2r(\rho)R\cos\theta$$

где $R = |\mathbf{x}|$ – расстояние от точки наблюдения до начала координат, а формула (2.6) после преобразований и интегрирования примет вид

$$\varphi_\rho(\rho;R,t)=-\frac{2r^2}{R\sqrt{4\pi Dt}}\frac{dr}{d\rho}\exp\left(-\frac{r^2+R^2}{4Dt}\right)\operatorname{sh}\frac{Rr}{2Dt} \tag{2.8}$$

Осталось подставить сюда явный вид функции $r(\rho)$ для конкретного профиля начального поля плотности. Возьмем, например, гауссов профиль

$$\rho_0(r)=\rho_m\exp(-r^2/l^2) \tag{2.9}$$

где ρ_m – максимальное значение плотности, а l – эффективный радиус пятна пассивной примеси. Тогда

$$r(\rho)=l\sqrt{\ln\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right)},\quad \frac{d\rho}{dr}=-\frac{2r\rho}{l^2},\quad 2r\frac{dr}{d\rho}=-\frac{l^2}{\rho}$$

и выражение (2.8) преобразуется к виду:

$$\varphi_\rho(\rho;R,t)=\frac{1}{\rho_m}\varphi(a,z,\gamma)$$
$$\varphi(a,z,\gamma)=\begin{cases}0, & a\geqslant 1\\ \dfrac{a^{1/\gamma-1}}{z\sqrt{\pi\gamma}}\exp\left(-\dfrac{z^2}{\gamma}\right)\operatorname{sh}\left(\dfrac{2z}{\gamma}\sqrt{\ln\dfrac{1}{a}}\right), & 0<a<1\end{cases} \tag{2.10}$$

где a, z, γ – безразмерные переменные

$$a=\frac{\rho}{\rho_m},\quad z=\frac{R}{l}=\frac{|\mathbf{x}|}{l},\quad \gamma=\frac{4Dt}{l^2} \tag{2.11}$$

Графики вероятностного распределения поля плотности (2.10) при $z = 0{,}8$ и различных значениях γ приведены на фиг. 1.

Выражение (2.10), содержащее в компактной форме всю информацию об одноточечных статистических характеристиках поля плотности примеси в несжимаемой среде, все же не очень удобно, если представляет интерес только моменты поля плотности и, в частности, его дисперсия. Более удобные выражения для моментов эйлерова поля плотности получим, домножив общее выражение (2.4) на ρ^n и проинтегрировав по всем возможным ρ. Это дает

$$\langle\rho^n(\mathbf{x},t)\rangle_E=\int\rho_0^n(\mathbf{y})\,f_Y(\mathbf{y};|\,\mathbf{x})\,d\mathbf{y} \tag{2.12}$$

В частности, для гауссовой формы начального распределения примеси (2.9) и вероятностного распределения координат (2.7) имеем

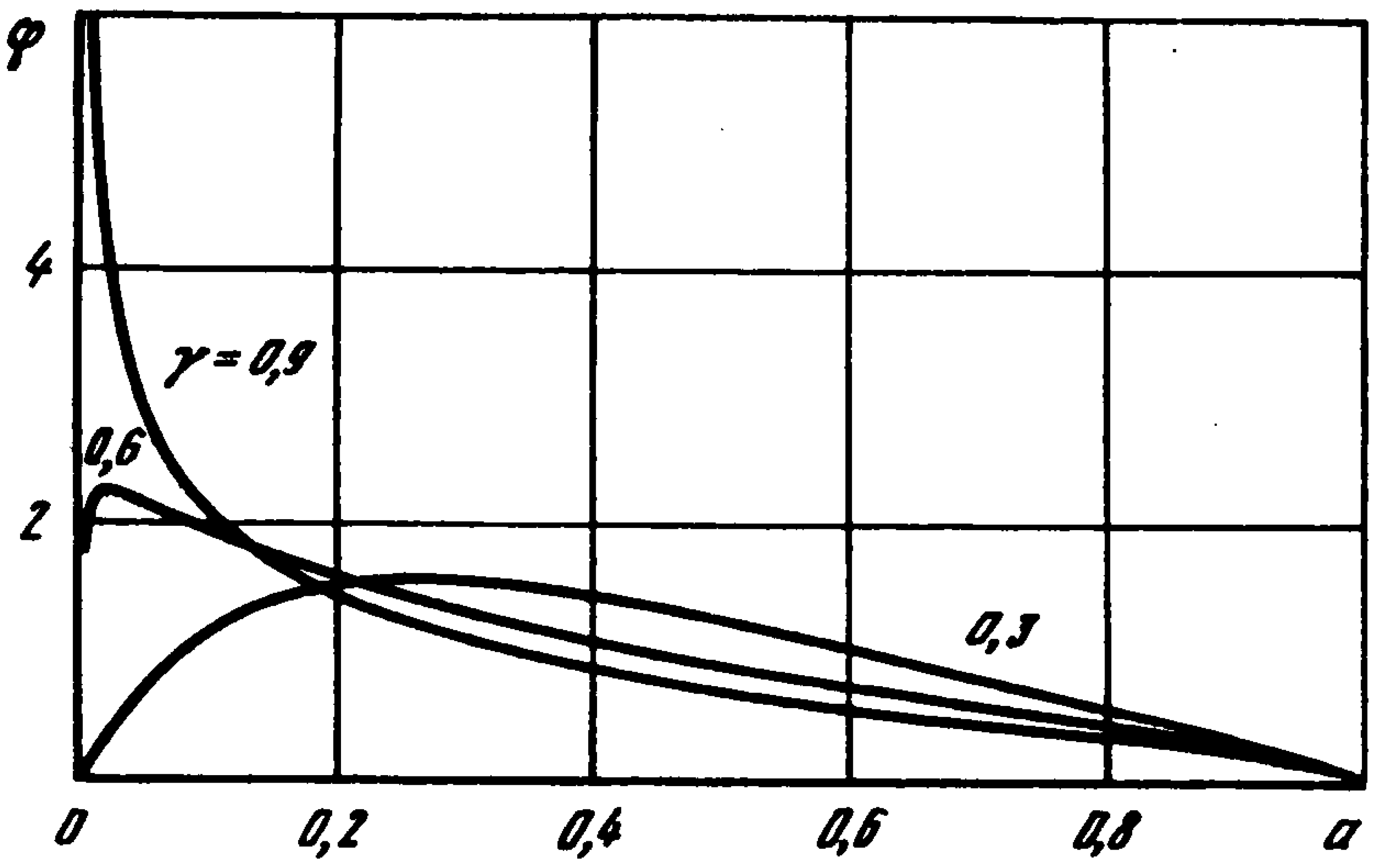
$$\langle\rho^n(\mathbf{x},t)\rangle_E=\frac{\rho_m^n}{(n\gamma+1)^{3/2}}\exp\left(-\frac{nz^2}{n\gamma+1}\right) \tag{2.13}$$

Здесь использованы безразмерные переменные (2.11).

Из (2.13) следует, что дисперсия флуктуаций плотности в начале координат $\mathbf{x} = 0$ равна

$$\sigma_\rho^2(x=0,t)=\langle\rho^2(0,t)\rangle_E-(\langle\rho(0,t)\rangle_E)^2=\rho_m^2\left[\frac{1}{(1+2\gamma)^{3/2}}-\frac{1}{(1+\gamma)^3}\right] \tag{2.14}$$

3. Вероятностные свойства плотности в сжимаемой среде. Перейдем к анализу вероятностных свойств эйлерова поля плотности "тяжелой" пассивной примеси $\rho(\mathbf{x}, t)$ в



Фиг. 1

сжимаемой среде без учета молекулярной диффузии. Аналитически их проще всего описывать в лагранжевой системе координат, где поведение примеси подчиняется системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае "тяжелой" примеси уравнения принимают вид

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(\mathbf{y}, t = 0) = \mathbf{y}; \quad \frac{dJ}{dt} = u(\mathbf{X}, t)\, J, \quad J(\mathbf{y}, t = 0) = 1 \tag{3.1}$$

где $u(\mathbf{X}, t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ – вспомогательное скалярное поле.

От стохастических уравнений (3.1) в диффузионном приближении [5–7], удается перейти к замкнутому уравнению (аналогичному (2.2)), типа уравнения Колмогорова, для лагранжева распределения вероятностей (1.5)

$$\frac{\partial f_L}{\partial t} = D\Delta f_L + B\frac{\partial^2}{\partial j^2}(j^2 f_L) \tag{3.2}$$

$$f_L(\mathbf{x}, j; t = 0 | \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,\delta(j - 1), \quad B = -\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} b_{ii}(\mathbf{s}, \tau)\right)\bigg|_{\mathbf{s}=0} d\tau$$

Из вида уравнения (3.2) и его начальных условий следует, что его решение представимо в виде двух сомножителей

$$f_L(\mathbf{x}, j; t | \mathbf{y}) = f_X(\mathbf{x}; t | \mathbf{y})\, f_J(j; t) \tag{3.3}$$

первый из которых – вероятностное распределение координат фиксированной частицы примеси, определяемое второй формулой (2.1) и удовлетворяющее стандартному уравнению диффузии (2.2). Второй сомножитель, описывающий вероятностные свойства сжатий и растяжений бесконечно малых объемов примеси, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f_J}{\partial t} = B\frac{\partial^2}{\partial j^2}(j^2 f_J), \quad f_J(j; t = 0) = \delta(j - 1) \tag{3.4}$$

Его можно интерпретировать как уравнение Колмогорова для переходного вероятностного распределения вспомогательного марковского процесса $J(t)$, удовлетворяющего стохастическому уравнению

$$\frac{dJ}{dt} + BJ = u(t)\, J, \quad J(t = 0) = 1 \tag{3.5}$$

где $u(t)$ – гауссов белый шум с корреляционной функцией $\langle u(t)\, u(t + \tau)\rangle = 2B\delta(\tau)$. Естественно полагать вспомогательный процесс $J(t)$ и рассматриваемый процесс сжатий и растяжений $J(\mathbf{y}, t)$ статистически эквивалентными. Поэтому изучим поведение реализаций вспомогательного процесса $J(t)$, приписывая их свойства реальному процессу $J(\mathbf{y}, t)$.

Решение стохастического уравнения (3.5) имеет вид

$$J(t) = \exp[-Bt + \omega(t)] \tag{3.6}$$

где $\omega(t)$ – винеровский процесс, такой, что $\langle \omega(t) \rangle = 0$, $\langle \omega^2(t) \rangle = 2Bt$. Из (3.6), как и из (3.4) следует, что распределение вероятностей процесса $J(t)$ (а значит и $J(\mathbf{y}, t)$) логарифмически нормально:

$$f_J(j;t) = \frac{1}{2j\sqrt{\pi Bt}} \exp\left[-\frac{\ln^2(je^{Bt})}{4Bt}\right] \quad (j > 0) \tag{3.7}$$

с интегральной функцией распределения

$$F_J(j;t) = \int_0^j f_J(j;t)\,dj = \Phi\left[\frac{\ln(je^{Bt})}{2\sqrt{Bt}}\right], \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2} dy$$

Рассмотрим поведение, с течением времени, статистических моментов процесса $J(t)$. Из (3.4) следует, что n-й момент $\langle J^n(t) \rangle_L$ удовлетворяет замкнутому уравнению

$$\frac{d}{dt}\langle J^n \rangle_L = Bn(n-1)\langle J^n \rangle_L, \quad \langle J^n(t=0) \rangle_L = 1 \tag{3.8}$$

решение которого таково:

$$\langle J^n(t) \rangle_L = \exp[n(n-1)\,Bt] \tag{3.9}$$

Обратимся теперь к общему выражению (1.11), подставляя в его правую часть не (2.1), а совместное лагранжево распределение координат и якобиана в сжимаемой среде (1.5). Пользуясь статистической независимостью флуктуаций якобиана и координат фиксированной частицы, т.е. тем, что (1.5) распадается на произведение вероятностных распределений $\mathbf{X}$ и J, запишем выражение для вероятностного распределения эйлерова поля плотности в форме, близкой к (2.4):

$$\varphi_\rho^c(\rho;\mathbf{x},t) = \frac{1}{\rho} \int \rho_0(\mathbf{y})\, f_X(\mathbf{x};t|\mathbf{y}) \left\langle \delta\left(\rho - \frac{\rho_0(\mathbf{y})}{J(t)}\right) \right\rangle d\mathbf{y} \tag{3.10}$$

Индекс c означает, что φ_ρ^c – вероятностное распределение плотности в сжимаемой среде, угловые скобки означают усреднение по ансамблю значений вспомогательного случайного процесса $J(t)$ с вероятностным распределением (3.7).

Из (3.10) видно, что вероятностное распределение эйлерова поля плотности в турбулентной сжимаемой среде может быть получено усреднением по статистике $J(t)$ вероятностного распределения плотности в несжимаемой среде

$$\varphi_\rho^c(\rho;\mathbf{x},t) = \langle J(t)\, \varphi_\rho(\rho;\mathbf{x},t|\rho_0 / J(t)) \rangle \tag{3.11}$$

Здесь $\varphi_\rho(\rho; \mathbf{x}, t\,|\,\rho_0/J(t))$ – вероятностное распределение плотности в несжимаемой среде при условии, что начальная плотность примеси равна $\rho_0(\mathbf{x})/J(t)$. В частности, для начальной плотности (2.9) получаем

$$\varphi_\rho^c(\rho;\mathbf{x},t) = \frac{1}{\rho_m} \langle J(t)\, \varphi(aJ(t), z, \gamma) \rangle$$

причем $\varphi(aJ(t), z, \gamma)$ задается равенством (2.10). Соответственно моменты вероятностного распределения (3.10)

$$\langle\rho^n(\mathbf{x},t)\rangle_E=\langle J^{1-n}(t)\rangle\int\rho_0^n(\mathbf{y})\,f_X(\mathbf{x};t|\,\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \qquad (3.12)$$

отличаются от тех же моментов плотности в несжимаемой среде (2.12) только множителем, который согласно (3.9) равен

$$\langle J^{1-n}(t)\rangle=\exp[n(n-1)\,Bt] \qquad (3.13)$$

Таким образом, например, дисперсия флуктуаций эйлерова поля плотности в начале координат $\mathbf{x}=0$ и в случае начального поля плотности (2.9) равна

$$\sigma_\rho^2(0,t)=\rho_m^2\left[\frac{e^{\beta\gamma}}{(1+2\gamma)^{3/2}}-\frac{1}{(1+\gamma)^3}\right],\quad \beta=\frac{Bl^2}{D} \qquad (3.14)$$

Здесь введен новый безразмерный параметр β, описывающий конкуренцию процессов турбулентной диффузии, характерных как для сжимаемой, так и несжимаемой среды и присущих только сжимаемой среде флуктуаций якобиана.

Типичные графики дисперсии (3.14) для разных β в зависимости от безразмерного времени γ даны на фиг. 2. Штриховой линией изображен график дисперсии (2.14) в несжимаемой среде. Его форма определяется чистой диффузией. Так, стремление дисперсии к нулю при $\gamma\to\infty$ есть просто следствие стремления к нулю всех моментов плотности, "размазанной" (при $\gamma\gg 1$) по большой (радиусом $Dt\gg l^2$) области пространства, во много раз превышающей исходное "пятно примеси" размером l. При $\beta\ll 1$ чистая диффузия вначале преобладает над слабыми еще флуктуациями якобиана, а график дисперсии плотности долгое время почти совпадает с штриховым графиком. Со временем хаотические сжатия и растяжения начинают преобладать, а дисперсия – расти с увеличением t. Еще в большей степени сказанное относится к поведению дисперсии плотности при промежуточных ($\beta\approx 1$) и больших ($\beta\gg 1$) значениях параметра β.

Поэтому прежде всего изучим рано или поздно доминирующие в сжимаемой среде следствия ее хаотических сжатий и растяжений. Лучше всего это сделать в "идеальном" случае однородной начальной плотности

$$\rho_0(\mathbf{x})=\rho_0=\text{const} \qquad (3.15)$$

когда "чистая" диффузия не влияет на плотность. При этом моменты эйлерова поля плотности (3.12) принимают вид

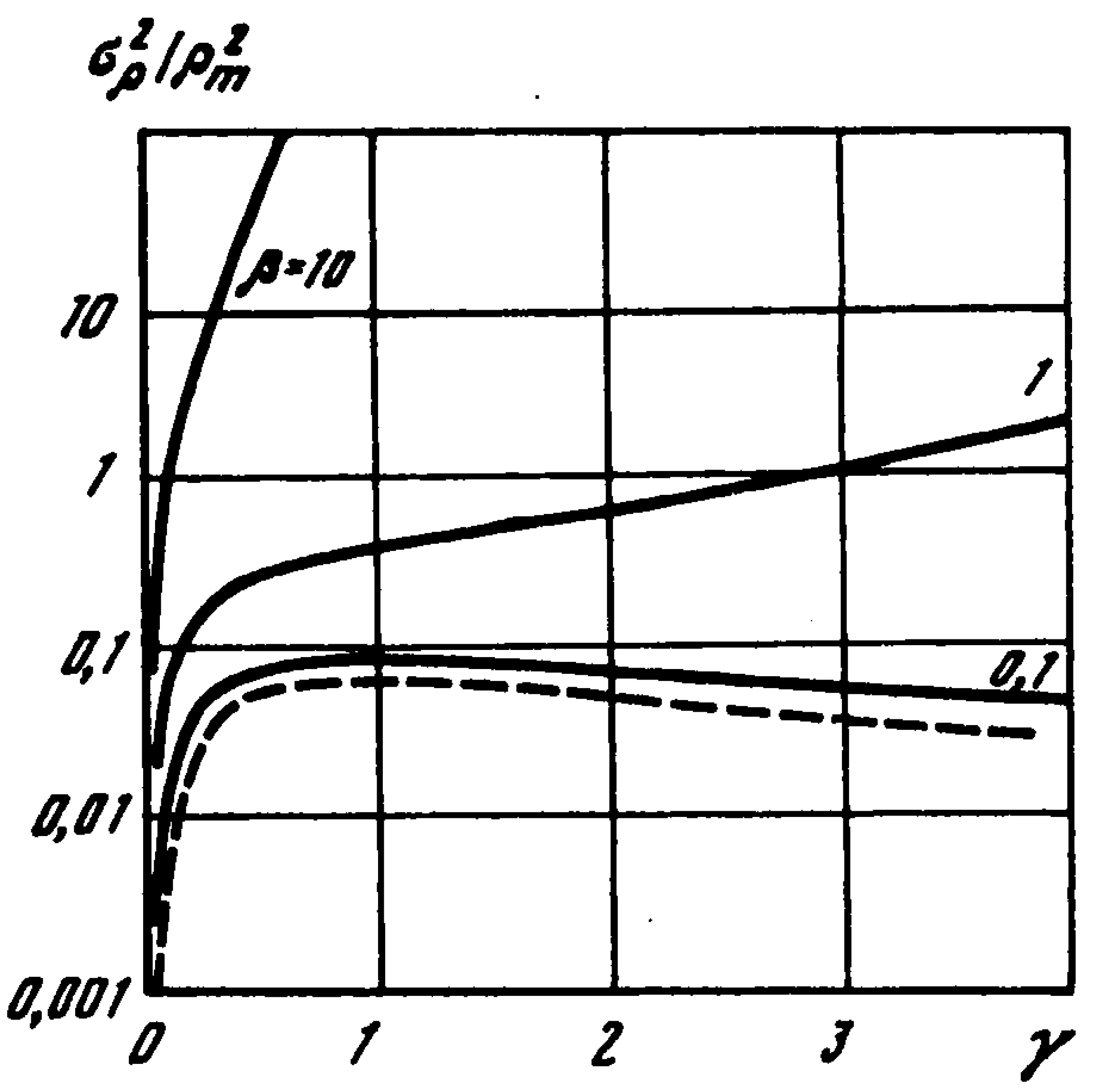
$$\langle\rho^n(\mathbf{x},t)\rangle=\rho_0^n\langle J^{1-n}(t)\rangle=\rho_0^n\langle J^n(t)\rangle \qquad (3.16)$$

(последнее равенство в цепочке следует из (3.9)).

Равенство (3.16) означает, что не только моменты, а и вероятностное распределение $J(t)$ совпадает с распределением нормированной случайной плотности ρ/ρ_0. Поэтому в статистическом смысле справедливо равенство

$$\rho(\mathbf{x},t)=\rho(t)=\rho_0 J(t) \qquad (3.17)$$

Его парадоксальность в том, что оно приравнивает между собой плотность ρ и в арифметическом смысле обратный ему ($\rho\sim 1/J$) якобиан. Парадокс объясняется тем, что переход от лагранжевой к эйлеровой статистике одного и того же поля (скажем, плотности $\rho(\mathbf{x},t)$ и $R(\mathbf{y},t)$), сопровождается деформацией вероятностных мер: сжатые области пространства имеют в эйлеровом ансамбле меньший статистический вес, чем в лагранжевом. В итоге одни и те же поля имеют в разных представлениях разную статистику, а разные поля – одинаковую. В частности, одинаковы вероятностные свойства лагранжева поля плотности J, обратного эйлерова якобиана $1/j$ и равного ему статистически однородного нормированного поля плотности ρ/ρ_0.



Фиг. 2

Опираясь на равенство (3.17), подчеркнем, что хотя моменты плотности согласно (3.17), (3.9), экспоненциально растут с течением времени

$$\langle \rho^n(\mathbf{x},t)\rangle_E = \rho_0^n \exp(n(n-1)\,Bt) \tag{3.18}$$

вероятность, что случайное поле $\rho(\mathbf{x}, t)$ превысит постоянный средний уровень $\langle\rho\rangle = \rho_0$, описываемая выражением

$$P(J(\mathbf{y},t)>1) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{Bt}}{2}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi Bt}}\exp\left(-\frac{Bt}{4}\right) \quad (t \to \infty)$$

экспоненциально стремится к нулю при $t \gg 1/B$. Продолжая аналогию между поведением во времени $\rho(\mathbf{x}, t)$ и $J(t)$, можно заключить, что их реализации ведут себя одинаково. А именно практически все реализации $\rho(\mathbf{x}, t)$ лежат под мажорантными кривыми $\rho_0 M(t)$: $M(t) = A\exp(-rBt)$ ($A > 1$ и $0 < r < 1$) и в конечном итоге спадают к нулю [8–10]. Экспоненциальный же рост моментов эйлеровой плотности (3.18) вызван наличием в некоторых реализациях громадных пиков плотности $\rho \gg \rho_0$. Физически это означает, что большинство неподвижных датчиков окажутся в конечном итоге в бедных примесью (где $\rho \ll \rho_0$) областях и лишь немногие из них попадут внутрь "макрочастицы" – компактной области повышенной плотности, и зарегистрируют большие ($\rho \gg \rho_0$) значения плотности примеси.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 97-02-16521 и 95-IN-RU-723).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Csanady G.T.* Turbulent Diffusion in the Environment. Boston: Reidel, 1973. 248 p.
2. *Careta A., Sagues F., Ramirez-Piscina L., Sancho J.M.* Effective diffusion in a stochastic velocity field // J. Stat. Phys. 1993. V. 71. N 1/2. P. 235–242.
3. *Crisanti A., Vulpiani A.* On the effects of noise and drift on diffusion in fluids // J. Stat. Phys. 1993. V. 70. N 1/2. P. 197–211.
4. *Докучаев В.П.* Метод дисперсионных соотношений для средней концентрации в теории турбулентной диффузии пассивной примеси // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31. № 2. С. 275–281.
5. *Кляцкин В.И.* Статистическое описание диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей // Успехи физ. наук. 1994. Т. 164. № 5. С. 531–544.

6. *Saichev A.I., Woyczynski W.A.* Distribution of passive tracers in randomly moving media // Stochastic Models in Geosystems. The IMA volumes in mathematics and its applications. V. 85. N.Y.: Springer–Verlag, 1996. P. 359–399.
7. *Avellaneda M., Majda A.* Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport // Comm. Math. Phys. 1990. V. 131. N 2. P. 381–429.
8. *Кляцкин В.И., Саичев А.И.* Статистическая и динамическая локализация плоских волн в хаотически слоистых средах // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162. № 3. С. 161–194.
9. *Жукова И.С., Саичев А.И.* О вероятностных свойствах градиента плотности хаотически движущейся несжимаемой среды // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39. № 5. С. 597–606.
10. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость в случайной среде // Успехи физ. наук. 1987. Т. 152. С. 3–32.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
23.VII.1996