ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 61. Вып. 5, 1997

УДК 531.38

 В.Н. Кошляков

О СТРУКТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИЛАМИ

Рассматривается общая методика структурных преобразований динамических систем, в составе которых имеются гироскопические силы. Не изменяя качественных свойств исходной системы, указанная методика упрощает ее исследование. Рассмотрены примеры.

1. Постановка задачи. Исходное матричное уравнение. Среди эффективных средств приближенного исследования задач нелинейной механики (в частности, математических моделей разнообразных колебательных процессов) значительное место принадлежит методу усреднения, обоснованному Н.Н. Боголюбовым применительно к специальной (стандартной) форме дифференциальных уравнений [1–4]

$$dx/dt = \mu X(t, x, \mu), \ x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

Здесь $x \equiv \operatorname{colon}(x_1,\ldots, x_n)$, $X \equiv \operatorname{colon}(X_1,\ldots, X_n)$ – некоторые n-мерные векторы-столбцы, μ – малый неотрицательный параметр. Усреднение производится в правой части уравнения (1.1).

Предварительное сведение к стандартной форме (1.1) – необходимый этап при обоснованном применении метода усреднения. Вместе с тем устойчивости (неустойчивости) усредненной системы иногда сопутствует аналогичное состояние и в исходной системе, когда последняя необязательно имеет стандартную форму (1.1). Однако общих теорем, оправдывающих в таких случаях применение метода усреднения, нет и не всегда формальная замена одних уравнений другими способна привести к правильному результату [5]. Это относится, в частности, к динамическим системам с гироскопическими силами. Если коэффициенты при гироскопических членах в уравнениях возмущенного движения периодичны по t с некоторым вещественным периодом τ, то при формальном усреднении на периоде могут обратиться в нули гироскопические члены, учет которых, несмотря на их периодичность, все же приводит к определенному стабилизирующему эффекту [6, 7].

При наличии гироскопических членов в исходных уравнениях желательно располагать обоснованными средствами, позволяющими, не изменяя условий устойчивости и стабилизирующих свойств, присущих гироскопическим структурам, видоизменять исходные уравнения так, чтобы преобразованные уравнения вообще не содержали гироскопических членов. В этом плане можно отметить распространяющийся на системы с гироскопическими членами метод нормальных координат Б.В. Булгакова, с помощью которого получаются уравнения, легко приводящиеся к стандартной форме (1.1) [8]. С некоторыми оговорками метод Булгакова, применимый, строго говоря, к системам дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, может быть распространен и на системы с медленно изменяющимися параметрами [9].

Отметим также методику приведения гироскопических систем к стандартной форме, предложенную [4] при условии невырожденности и постоянства матрицы гироскопических сил.

Ниже рассматривается при более общих предпосылках способ структурного преобразования исходных уравнений, приводящий к исключению из них гироскопических членов, а также неконсервативных позиционных членов. Объектом изучения служит матричное уравнение вида

$$a_0\ddot{x} + D\dot{x} + H\dot{x} + \Pi x + Px = F(t) + X(x, \dot{x}) \tag{1.2}$$

где x – n-мерный вектор, a_0 – некоторый положительный скалярный параметр, D и Π – симметрические матрицы размера $n \times n$, H и P – кососимметрические матрицы того же размера, $F(t)$ – n-мерный вектор возмущающих сил, $X(x, \dot{x})$ – вектор-функция, содержащая x и $\dot{x}$ в степенях выше первой. Постоянство матриц, D, H, Π и P необязательно: их элементы могут быть вещественными, непрерывными и ограниченными функциями t. Уравнением (1.2) описывается движение многих материальных систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных, неконсервативных позиционных сил, а также заданных возмущающих сил.

2. Ортогональное преобразование уравнения (1.2). Перейдем в уравнении (1.2) к новой переменной ξ посредством преобразования

$$\xi = Lx \tag{2.1}$$

где матрица L далее определяется. В результате получаем уравнение

$$a_0\ddot{\xi} + LDL^{-1}\dot{\xi} + (L\Pi - a_0\ddot{L})L^{-1}\xi + (LH - 2a_0\dot{L})L^{-1}(\dot{\xi} - \dot{L}L^{-1}\xi) + \tag{2.2}$$

$$+ L(P - DL^{-1}\dot{L})L^{-1}\xi = LF + \Xi$$

в котором вектор-функция Ξ содержит величины ξ и $\dot{\xi}$ в степенях не ниже второй.

Обращаясь к уравнению (2.2), замечаем, что четвертое слагаемое левой части в любом случае обращается в нуль, если выполняется условие

$$\dot{L} = (2a_0)^{-1}LH \tag{2.3}$$

которое при заданной матрице H можно рассматривать как матричное уравнение относительно L. Учитывая кососимметричность H и удовлетворяя в решениях уравнения (2.3) единичной матрице E начальных условий, получаем L в виде ортогональной матрицы. Действительно, если L ортогональна, то по ее определению должно быть $LL^T = E$, где L^T – транспонированная матрица L. Дифференцируя это выражение и учитывая, что из уравнения (2.3) следует $\dot{L}^T = (2a_0)^{-1}H^TL^T$, получаем тождественно обращающееся в нуль выражение

$$(2a_0)^{-1}(LHL^T + LH^TL^T) = 0$$

так как в силу кососимметричности матрицы гироскопических сил имеем $H = -H^T$. Отсюда $LL^T = C$, где C – некоторая постоянная матрица. Удовлетворяя здесь единичной матрице начальных условий, имеем $LL^T = E$, что и требуется. Поскольку $|\det L| = 1$, то при ограниченности $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ в промежутке (t_0, ∞) матрица L будет матрицей Ляпунова.

С учетом условия (2.3) матричное уравнение (2.2) запишем в виде

$$a_0\ddot{\xi} + LDL^T\dot{\xi} + \{L(\Pi + P - DL^T\dot{L}) - a_0\ddot{L}\}L^T\xi = LF + \Xi \tag{2.4}$$

Если диссипативные, неконсервативные силы, а также внешнее возмущение отсутствуют, то уравнение (2.4) записывается в форме

$$\ddot{\xi} + K\xi = \Xi, \quad K = a_0^{-1}(L\Pi - a_0\ddot{L})L^T \tag{2.5}$$

В случае симметрической матрицы K уравнение (2.5), с точностью до правой части, соответствует линейному гамильтонову уравнению.

Заметим, что при условиях

$$2a_0\dot{L} - LH = 0, \quad DL^{-1}\dot{L} - P = 0 \tag{2.6}$$

обращаются в нули два последние слагаемые в левой части уравнения (2.2) и, таким образом, из него исключаются, помимо гироскопических, также и неконсервативные позиционные члены. Однако одновременное выполнение условий (2.6) имеет место лишь в исключительном случае, когда матрицы H, D и P, не будучи тождественно нулевыми, связаны зависимостью

$$2a_0P - DH = 0 \tag{2.7}$$

3. Гироскоп Лагранжа на вибрирующем основании. Методика, изложенная в разд. 1, 2, может быть применена к задаче стабилизации гироскопа Лагранжа в предположении его установки на основании, совершающем вертикальную вибрацию по гармоническому закону $\zeta = a\cos pt$, где a и p – соответственно амплитуда и круговая частота вибрации. При игнорировании сопротивления среды первое приближение уравнений возмущенного движения, получаемое из системы Эйлера–Пуассона, для рассматриваемого случая имеет вид [10]

$$\begin{aligned}
&\ddot{\gamma} - \frac{2A-C}{A}\omega\dot{\gamma}_2 + \frac{1}{A}\{(C-A)\omega^2 - m(g - ap^2\cos pt)z_c\}\gamma_1 = 0 \\
&\ddot{\gamma}_2 + \frac{2A-C}{A}\omega\dot{\gamma}_1 + \frac{1}{A}\{(C-A)\omega^2 - m(g - ap^2\cos pt)z_c\}\gamma_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь A, A, C – главные моменты инерции гироскопа относительно связанных с ним ортогональных осей Ox, Oy и Oz с началом в неподвижной точке O; m – масса гироскопа; γ_1, γ_2 – направляющие косинусы восходящей вертикали $O\zeta$ с осями Ox и Oy; z_c – координата центра тяжести тела по оси Oz (в дальнейшем полагается $z_c = l > 0$). Поскольку сопротивление движению в расчет не принимается, угловую скорость ω гироскопа можно считать постоянной. Матричным уравнением (2.3) описывается общий алгоритм, приводящий в частном случае уравнений (3.1) к исключению из них гироскопических членов. Полагая $L = \|l_{jk}\|_1^2$, а также

$$a_0 = 1, \quad H = \begin{Vmatrix} 0 & -h \\ h & 0 \end{Vmatrix}, \quad h = \frac{2A-C}{A}\omega \tag{3.2}$$

приходим к следующим уравнениям относительно l_{jk}:

$$2\dot{l}_{11} = hl_{12}, \quad 2\dot{l}_{12} = -hl_{11}, \quad 2\dot{l}_{21} = hl_{22}, \quad 2\dot{l}_{22} = -hl_{21} \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) немедленно интегрируются. Удовлетворяя единичной матрице начальных условий в отношении L, получаем

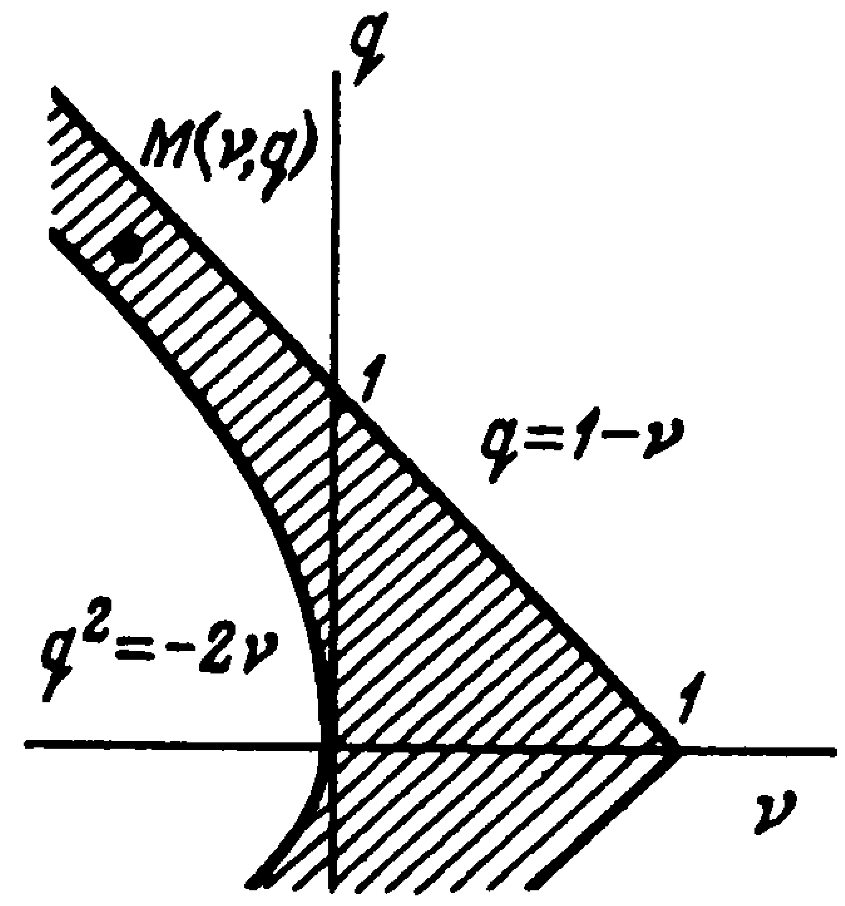
$$L = \begin{Vmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t \end{Vmatrix}, \quad \Omega = \frac{h}{2} = \frac{2A-C}{2A}\omega \tag{3.4}$$

С точностью до членов высшего порядка уравнение (2.5) для рассматриваемого случая можно представить в форме

$$\ddot{\xi} + (cE - \ddot{L}L^T)\xi = 0, \quad c = \frac{1}{A}\{(C-A)\omega^2 - m(g - ap^2\cos pt)l\}$$

где $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T$ – двумерный вектор, E – по-прежнему единичная матрица, а L определяется согласно (3.4). В результате, полагая $pt = 2z - \pi$, приходим к двум скалярным уравнениям Матье одинаковой структуры

$$\frac{d^2\xi_k}{dz^2}+(\nu-2q\cos 2z)\xi_k=0,\quad k=1,2 \tag{3.5}$$



Здесь

$$\nu=\frac{1}{A^2p^2}(C^2\omega^2-4Amgl),\quad q=\frac{2mal}{A} \tag{3.6}$$

Далее будем считать выполняющимся условие

$$C^2\omega^2-4Amgl<0 \tag{3.7}$$

чем при отсутствии вибрации соответствует неустойчивость в движении гироскопа Лагранжа [11, 12].

Покажем, что с помощью вертикальной вибрации можно добиться стабилизации движения для этого случая. Воспользуемся для этой цели диаграммой Айнса – Стретта применительно к уравнениям (3.5) [11, 13, 14].

На фигуре изображена часть этой диаграммы, захватывающая область отрицательных значений ν. При этих значениях ν и малых по величине значениях параметра q заштрихованный на фигуре участок диаграммы соответствует области устойчивости и ограничен параболой $q^2=-2\nu$ и прямой $q=1-\nu$. Устойчивость (неасимптотическая) будет обеспечена, если точка $M(\nu, q)$ находится в пределах заштрихованного участка диаграммы. При $\nu<0$ это всегда будет иметь место, если названная точка находится выше параболы $q^2=-2\nu$ и ниже прямой $q=1-\nu$, что приводит к условию

$$1-\nu>\frac{2mal}{A}>\sqrt{-2\nu} \tag{3.8}$$

Учитывая обозначения (3.6), заключаем, что при $mal<A$ левая часть неравенства (3.8) всегда выполняется, если выполнено условие (3.7); правая же часть приводит к оценке снизу величины частоты вибрации [10]

$$p>\frac{1}{2mal}\sqrt{2(4Amgl-C^2\omega^2)} \tag{3.9}$$

где, по предположению, подкоренное выражение следует считать положительным. В этом случае вращение тела играет полезную роль, поскольку с ростом ω уменьшается необходимое для стабилизации движения значение круговой частоты вибрации.

Из неравенства (3.9) извлекаются некоторые частные случаи. Так, например, если гироскоп вообще не вращается, чему соответствует $\omega=0$, то полагая $A=m\rho^2$, где ρ – экваториальный радиус инерции тела, приходим к условию, совпадающему с известным условием устойчивости вертикального положения физического маятника, установленного на основании, совершающем вертикальную вибрацию [15]

$$ap>\sqrt{2g\rho^2/l}$$

Если положить здесь $\rho=l$, то получаем условие Боголюбова–Капицы для случая математического маятника [16].

4. Преобразованные уравнения материальной точки в равномерно вращающейся системе координат. Допустим, что материальная точка массы m совершает под действием заданной силы $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$ движение относительно вращающейся с постоянной угловой скоростью ω системы координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в произвольной точке пространства. Уравнения относительного движения материальной точки в проекциях на оси подвижного трехгранника $Ox_1x_2x_3$ имеют вид [17]

$$m\ddot{x}_1 - \partial T_0/\partial x_1 - 2m\omega_3\dot{x}_2 + 2m\omega_2\dot{x}_3 = F_1 \quad (1\ 2\ 3)$$

$$T_0 = \tfrac{1}{2} m\{(\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2)^2 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3)^2 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)^2\} \tag{4.1}$$

где F_1, F_2, F_3 – проекции заданной силы на введенные оси; производные $\partial T_0/\partial x_j$ представляют собой проекции на соответственные оси центробежной силы, развивающейся вследствие вращения трехгранника $Ox_1x_2x_3$.

Уравнения в форме (4.1) оказываются малоудобными для построения точных решений. Поэтому при рассмотрении различного рода задач, описываемых системой (4.1) (например, движения тяжелой точки вблизи поверхности Земли с учетом ее вращения), метод итераций предпочтительнее прямого интегрирования системы. Методика, изложенная в разд. 2, позволяет путем видоизменения уравнений (4.1) значительно упростить их исследование.

Сопоставляя систему (4.1) с уравнением (1.2), полагаем

$$H = 2m\begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.2}$$

Из уравнения (2.3), с помощью которого исключаются гироскопические члены в матричном уравнении (1.2), получаем с учетом (4.2) три группы одинаковых уравнений, определяющих элементы ортогональной матрицы $L = \|l_{jk}\|_1^3$ для данной задачи

$$\dot{l}_{11} = \omega_3 l_{12} - \omega_2 l_{13}, \quad \dot{l}_{12} = -\omega_3 l_{11} + \omega_1 l_{13}, \quad \dot{l}_{13} = \omega_2 l_{11} - \omega_1 l_{12} \quad (1\ 2\ 3)$$

Отсюда имеем единое для указанных групп характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda^2 + \omega^2) = 0, \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) имеет простой нулевой корень $\lambda_1 = 0$ и два чисто мнимых корня $\lambda_{2,3} = \pm i\omega$. Удовлетворяя единичной матрице начальных условий, получаем

$$L = \frac{1}{\omega^2}\begin{Vmatrix} s_1 & n_{12} - m_3 & n_{13} + m_2 \\ n_{12} + m_3 & s_2 & n_{23} - m_1 \\ n_{13} - m_2 & n_{23} + m_1 & s_3 \end{Vmatrix} \tag{4.4}$$

Здесь для краткости положено

$$s_j = \omega_j^2 + (\omega^2 - \omega_j^2)\cos\omega t, \quad m_j = \omega\omega_j \sin\omega t, \quad n_{jk} = \omega_j\omega_k(1 - \cos\omega t), \quad j = \overline{1,3} \tag{4.5}$$

Имеем далее

$$\Pi = m\begin{Vmatrix} -(\omega_3^2 + \omega_2^2) & \omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_3 \\ \omega_2\omega_1 & -(\omega_1^2 + \omega_3^2) & \omega_2\omega_3 \\ \omega_3\omega_1 & \omega_3\omega_2 & -(\omega_2^2 + \omega_1^2) \end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

Уравнение (2.4), с точностью до нелинейного вектора в правой части, представляется в виде

$$m\ddot{\xi} + (L\Pi - m\ddot{L})L^T\xi = LF, \quad \xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T, \quad F = [F_1, F_2, F_3]^T \tag{4.7}$$

Оперируя с матрицами (4.4) и (4.6), убеждаемся, что выражение в круглых скобках уравнения (4.7) обращается в нуль, вследствие чего указанное уравнение принимает простой вид

$$m\ddot{\xi} = LF \tag{4.8}$$

соответствующий трем, видоизмененным в сравнении с системой (4.1), скалярным уравнениям. Поскольку действующая сила, а также угловая скорость трехгранника $Ox_1x_2x_3$ полагаются заданными, то точное решение матричного уравнения (4.8) определяется двойной квадратурой

$$\xi = \xi(0) + \dot{\xi}(0)t + \frac{1}{m}\int_0^t\int_0^t LFdt^2 \tag{4.9}$$

где $\xi(0)$ и $\dot{\xi}(0)$ – значения векторов ξ и $\dot{\xi}$ в начальный момент. Возвращаясь к исходной матричной переменной, имеем в силу (2.1)

$$x = L^{-1}\xi = L^T\xi$$

Для иллюстрации рассмотрим частный случай уравнений (4.1), относящийся к движению тяжелой точки в окрестности Земли при учете ее вращения [18]. Применительно к этому случаю начало трехгранника $Ox_1x_2x_3$ выберем в некоторой произвольной точке вблизи земной поверхности, аппроксимируя фигуру Земли сферой. Ось Ox_1 направим в плоскости меридиана на север, ось Ox_2 – на восток, ось Ox_3 – по геоцентрической вертикали к центру земной сферы. Полагаем

$$\omega_1 = \omega\cos\varphi, \ \omega_2 = 0, \ \omega_3 = -\omega\sin\varphi$$

где ω – угловая скорость вращения Земли, φ – геоцентрическая широта места. Далее следует выполнить указанные в (4.9) квадратуры, считая $F = (0, 0, mg)$, где g – гравитационное ускорение, а затем перейти к исходным переменным.

Для простоты положим, что при $t = 0$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \ \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0 \tag{4.10}$$

Это соответствует нахождению тяжелой точки в начале трехгранника $Ox_1x_2x_2$. Согласно представлению (2.1) те же начальные условия соответствуют и составляющим вектора ξ. Далее следует выполнить несложные вычисления, руководствуясь выражением (4.9) и учитывая начальные условия (4.10). В результате получаем точные формулы

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{g}{2\omega^2}\left\{(1-\cos\omega t)\cos\omega t + (\omega t - \sin\omega t)\sin\omega t - \frac{\omega^2 t^2}{2}\right\}\sin 2\varphi \\ x_2 &= \frac{g}{\omega^2}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)\cos\varphi \\ x_3 &= \frac{g}{\omega^2}\left\{(\cos\omega t - 1 + \omega t\sin\omega t)\cos^2\varphi + \frac{\omega^2 t^2}{2}\sin^2\varphi\right\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

в которых следует, конечно, считать $\omega \neq 0$.

В предположении малых значений ωt($\omega \approx 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$) из формул (4.11) можно получить известные приближенные выражения для x_1, x_2 и x_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945. 139 с.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
3. *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 255 с.
4. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.

5. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
6. *Кошляков В.Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
7. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 286 с.
8. *Булгаков Б.В.* О нормальных координатах // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 2. С. 273–290.
9. *Митропольский Ю.А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.
10. *Кошляков В.Н.* Об устойчивости движения симметричного тела, установленного на вибрирующем основании // Укр. мат. журн. 1995. Т. 47. № 12. С. 1661–1666.
11. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
12. *Румянцев В.В.* Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 916–921.
13. *Стретт М.Д.* Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев: Гостехиздат, 1935. 238 с.
14. *Бардин Б.С., Маркеев А.П.* Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 922–929.
15. *Боголюбов Н.Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. 1950. № 14. С. 9–34.
16. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
17. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.

Киев

Поступила в редакцию
22.XI.1996