

УДК 531.221.8:534.1

© 1997 г. Ю.Г. Исполлов

КОЛЕБАНИЯ РАСТЯЖИМОЙ ГИБКОЙ НИТИ С МАЛОЙ СТРЕЛОЙ ПРОВИСАНИЯ

Рассматриваются свободные колебания растяжимой гибкой нити с малой стрелой провисания. Получена новая форма решения уравнений равновесия растяжимой гибкой нити. Выведены дифференциальные уравнения малых колебаний вблизи положения равновесия. Проведен асимптотический анализ колебаний с выходом из вертикальной плоскости. Установлено, что эти колебания близки к колебаниям струны. Проведен асимптотический анализ низко- и высокочастотных колебаний в вертикальной плоскости. Установлено, что собственные частоты и формы низкочастотных колебаний существенно зависят от двух малых параметров: параметра ϵ , характеризующего величину стрелы провисания, и параметра δ , характеризующего степень растяжения нити. Доказано, что низкочастотные поперечные колебания при $\epsilon^2/\delta \ll 1$ близки к колебаниям струны, а при $\epsilon^2/\delta \gg 1$ близки к колебаниям нерастяжимой нити. Если величины ϵ^2 и δ имеют одинаковые асимптотические порядки, то получается наиболее представительная асимптотика. В высокочастотной области независимо от соотношения двух малых параметров имеют место длинноволновые продольные и коротковолновые поперечные колебания. Иногда возникают также более сложные формы колебаний, характеризующиеся взаимным влиянием продольных и поперечных движений. Получены равномерно пригодные во всем частотном диапазоне асимптотические разложения.

1. Постановка задачи. Рассматривается растяжимая гибкая нить, концы которой закреплены на одинаковой высоте [1–3]. Положение точки на нити задается лагранжевой координатой \tilde{s} – это длина дуги нерастянутой нити, отсчитываемая от нижней точки нити в равновесной конфигурации. В этой же точке помещено начало декартовой системы координат $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3$ (фиг. 1).

Уравнение движения нити имеет вид

$$\mu \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{R}}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial \tilde{s}} + \mathbf{q} \quad (1.1)$$

где $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{s}, \tilde{t})$ – радиус-вектор, определяющий положение точки нити в пространстве, \tilde{t} – время, μ – масса единицы длины нерастянутой нити, $\tilde{\mathbf{Q}}$ – усилие в сечении нити, $\mathbf{q} = -q_0 \mathbf{e}_2$, $q_0 = \mu g$ – внешняя нагрузка, действующая на единицу длины нерастянутой нити.

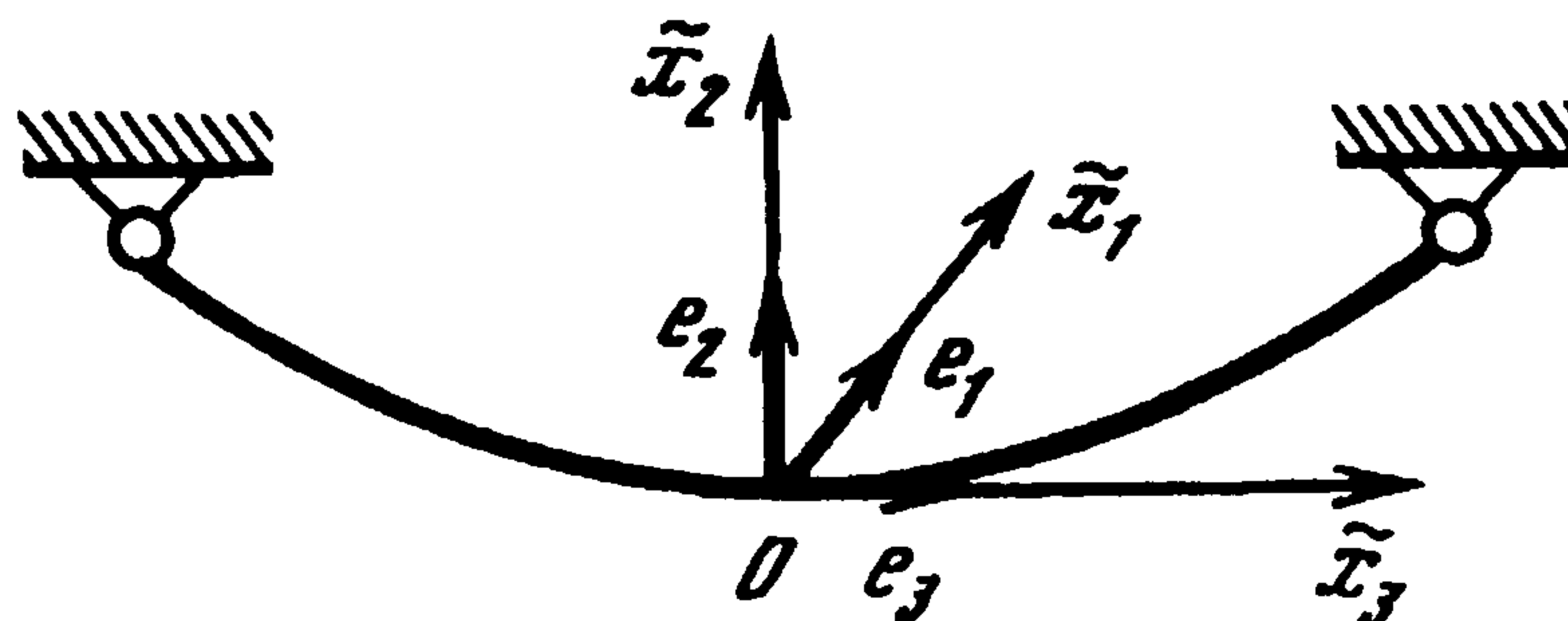
В гибкой нити усилие $\tilde{\mathbf{Q}}$ должно быть направлено по касательной к кривой, задаваемой радиус-вектором $\tilde{\mathbf{R}}(\tilde{s}, \tilde{t})$, что выражается уравнением

$$\tilde{\mathbf{Q}} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial \tilde{s}} = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

Величина усилия в сечении нити связана с относительным удлинением нити по закону Гука

$$|\tilde{\mathbf{Q}}| = \tilde{c} \left(\left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial \tilde{s}} \right| - 1 \right) \quad (1.3)$$

где \tilde{c} – жесткость нити на растяжение, в простейшем случае определяемая формулой $\tilde{c} = EF$, E – модуль Юнга материала, F – площадь поперечного сечения нити.



Фиг. 1

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\mathbf{R} = \frac{\tilde{\mathbf{R}}}{\tilde{s}_0}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}}{H}, \quad t = \Omega_0 \tilde{t} \left(\Omega_0 = \frac{1}{\tilde{s}_0} \sqrt{\frac{H}{\mu}} \right), \quad s = \frac{\tilde{s}}{\tilde{s}_0}, \quad \varepsilon = \frac{q_0 \tilde{s}_0}{H}, \quad \delta = \frac{H}{\tilde{c}} \quad (1.4)$$

(\tilde{s}_0 – полудлина нерастянутой нити, H – натяжение нити в нижней точке равновесной конфигурации).

Исключая усилие $\tilde{\mathbf{Q}}$ из уравнений (1.1)–(1.3) и используя равенства (1.4), получим уравнение движения растяжимой гибкой нити в безразмерных переменных (точка означает производную по t , штрих – по s)

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{1}{\delta} \left((|\mathbf{R}'| - 1) \frac{\mathbf{R}'}{|\mathbf{R}'|} \right)' - \varepsilon \mathbf{e}_2 \quad (1.5)$$

2. Равновесие растяжимой гибкой нити. Интегрируя дифференциальное уравнение равновесия, соответствующее (1.5) при $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, найдем равновесную конфигурацию нити

$$\mathbf{R}_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 + \varepsilon^2 s^2} - 1 \right) + \delta \varepsilon \frac{s^2}{2} \right] \mathbf{e}_2 + \left[\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arsh} \varepsilon s + \delta s \right] \mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

Орты касательной, нормали и бинормали кривой (2.1) и их производные определяются формулами

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{R}'_0}{|\mathbf{R}'_0|} = \frac{\varepsilon s \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\zeta}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|} = \frac{\mathbf{e}_2 - \varepsilon s \mathbf{e}_3}{\zeta}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = -\mathbf{e}_1 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{t}' = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\frac{1}{\rho} \mathbf{t}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{0}$$

где $\zeta = \sqrt{1 + \varepsilon^2 s^2}$, $\rho = \zeta^2 / \varepsilon$.

Для растяжимой гибкой нити с малой стрелой провисания ε и δ – малые параметры. Параметр ε характеризует величину стрелы провисания; можно показать, что он пропорционален отношению стрелы провисания f к длине нити, $\varepsilon \approx 2f/\tilde{s}_0$. Параметр δ характеризует степень растяжения нити и равен относительному удлинению нити в нижней точке равновесной конфигурации.

3. Уравнения малых колебаний. При малых колебаниях радиус-вектор точки нити определяется формулой

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{u} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}/\tilde{s}_0$ – малое безразмерное перемещение из равновесной конфигурации. Линеаризуя уравнение движения (1.5) вблизи равновесной конфигурации, получим уравнение малых колебаний растяжимой гибкой нити

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{(|\mathbf{R}'_0| - 1)}{|\mathbf{R}'_0|} \mathbf{u}' + \frac{(\mathbf{R}'_0 \cdot \mathbf{u}') \mathbf{R}'_0}{|\mathbf{R}'_0|^3} \right) \quad (3.2)$$

Задавая вектор перемещения его проекциями на касательную, нормаль и бинормаль, $\mathbf{u} = w\mathbf{t} + v\mathbf{n} + u\mathbf{b}$, и подставляя в (3.2), получим при учете (2.2) уравнения

$$\ddot{u} = \left(\frac{\zeta}{1 + \delta\zeta} u' \right)' \quad (3.3)$$

$$\ddot{v} = \frac{1}{\delta\rho} \left(w' - \frac{v}{\rho} \right) + \left(\frac{\zeta}{1 + \delta\zeta} \left(v' + \frac{w}{\rho} \right) \right)', \quad \ddot{w} = \frac{1}{\delta} \left(w' - \frac{v}{\rho} \right)' - \frac{\zeta}{\rho(1 + \delta\zeta)} \left(v' + \frac{w}{\rho} \right)$$

первое из которых описывает колебания с выходом из вертикальной плоскости, второе и третье – колебания в вертикальной плоскости.

Граничные условия имеют вид

$$s = \pm 1: u = v = w = 0 \quad (3.4)$$

Разыскивая решения уравнений (3.3) в виде главных колебаний

$$u = U(s)e^{i\omega t}, \quad v = V(s)e^{i\omega t}, \quad w = W(s)e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} \omega^2 U + \left(\frac{\zeta}{1 + \delta\zeta} U' \right)' &= 0 \\ \omega^2 V + \frac{\varepsilon}{\delta\zeta^2} \left(W' - \frac{\varepsilon}{\zeta^2} V \right) + \left(\frac{\zeta}{1 + \delta\zeta} \left(V' + \frac{\varepsilon}{\zeta^2} W \right) \right)' &= 0 \\ \omega^2 W + \frac{1}{\delta} \left(W' - \frac{\varepsilon}{\zeta^2} V \right)' - \frac{\varepsilon}{\zeta(1 + \delta\zeta)} \left(V' + \frac{\varepsilon}{\zeta^2} W \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. Колебания с выходом из вертикальной плоскости. Колебания с выходом из вертикальной плоскости, описываемые первым уравнением (3.6), близки к колебаниям струны с прямолинейной осью и постоянным натяжением. Разыскивая асимптотическое разложение решения этого уравнения в виде

$$U = U_0 + O(\max(\delta, \varepsilon^2)), \quad \omega^2 = \omega_0^2 (1 + O(\max(\delta, \varepsilon^2))) \quad (4.1)$$

получим для главного члена разложения дифференциальное уравнение, определяющее формы колебаний струны. Главный член асимптотического разложения частот колебаний определяется формулой

$$\omega_{0n} = n\pi / 2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

что полностью соответствует частотам колебаний струны с прямолинейной осью

длиной $2\tilde{z}_0$, имеющей постоянное натяжение H и погонную массу μ . Отметим, что первая частота соответствует "маятниковым" колебаниям нити. Формы колебаний нити также полностью соответствуют формам колебаний струны.

5. Колебания в вертикальной плоскости. Для колебаний в вертикальной плоскости, описываемых вторым и третьим уравнениями (3.6), можно выделить низко- и высокочастотные колебания.

Низкочастотные колебания. Предварительный асимптотический анализ показал, что характер низкочастотных колебаний существенно зависит от соотношения малых параметров ϵ и δ . Для нити с очень малой стрелой провисания, а точнее при $\epsilon^2/\delta \ll 1$, колебания растяжимой нити близки к колебаниям струны. Для слабо растянутой нити, а точнее при $\epsilon^2/\delta \gg 1$, колебания близки к колебаниям нерастяжимой нити. Проведем асимптотический анализ для наиболее представительного случая, когда величины ϵ^2 и δ имеют одинаковый асимптотический порядок.

Решение второго и третьего уравнений (3.6) при низкочастотных колебаниях разыскиваем в виде

$$V = V_0 + O(\epsilon), \quad W = \epsilon W_1 + O(\epsilon^2), \quad \omega^2 = \omega_0^2(1 + O(\epsilon)) \quad (5.1)$$

Для главных членов асимптотических разложений получаем систему дифференциальных уравнений и граничные условия

$$V_0'' + \xi(W_1' - V_0) + \omega_0^2 V_0 = 0, \quad (W_1' - V_0)' = 0; \quad \xi = \epsilon^2 / \delta$$

$$s = \pm 1: \quad V_0 = 0, \quad W_1 = 0$$

Для симметричных форм колебаний (V_0 – четная функция s , W_1 – нечетная) частотное уравнение имеет вид

$$(\xi / \omega_0^3) \sin \omega_0 + (1 - \xi / \omega_0^2) \cos \omega_0 = 0 \quad (5.2)$$

Отметим, что при очень малой стреле провисания ($\xi \ll 1$) корни частотного уравнения

$$\omega_{0m} = \frac{2m-1}{2} \pi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

дают частоты симметричных колебаний, совпадающие с соответствующими частотами струны с прямолинейной осью.

Для слабо растянутой нити ($\xi \gg 1$) частотное уравнение (5.2) записывается в виде

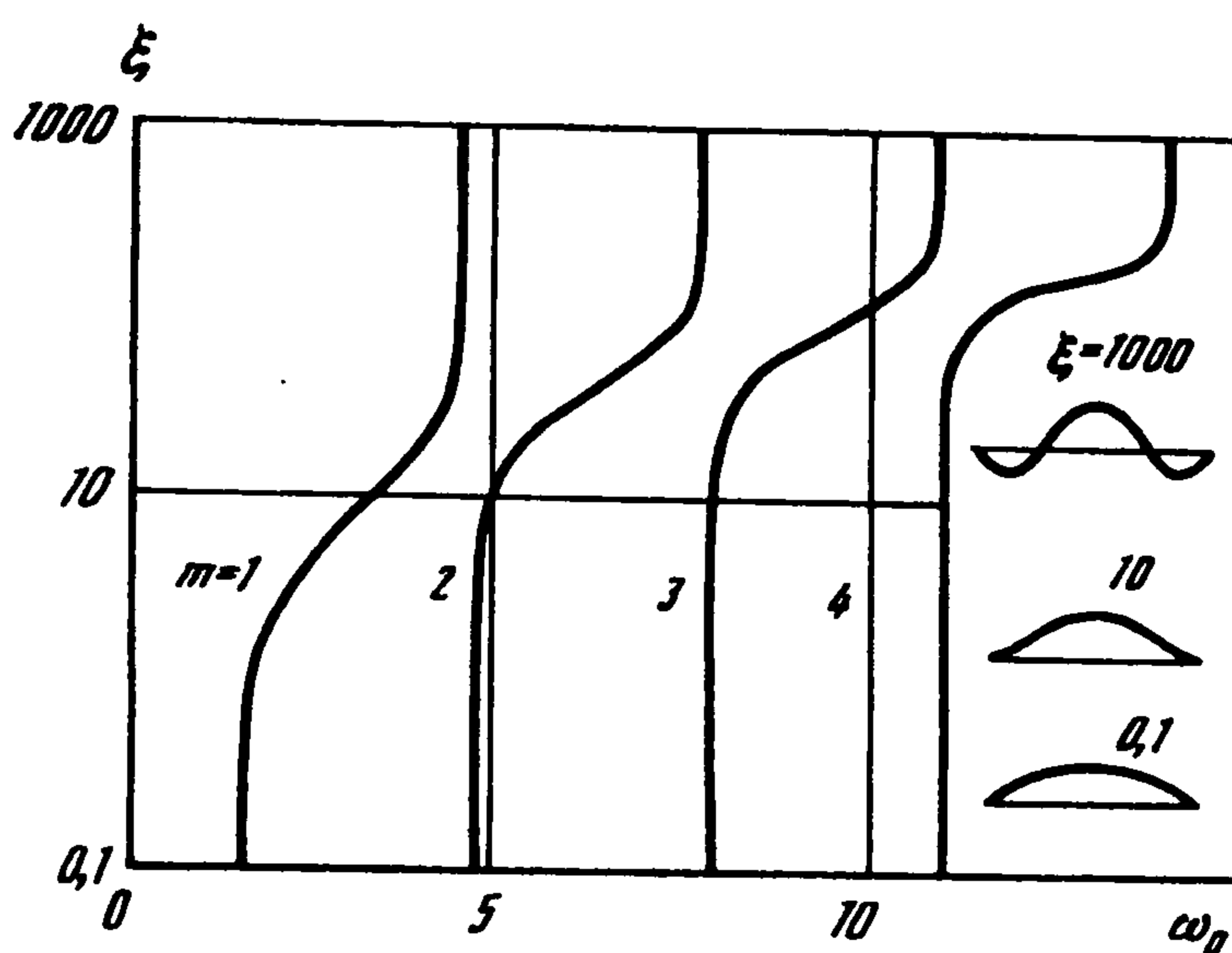
$$\sin \omega_0 - \omega_0 \cos \omega_0 = 0$$

Собственные частоты с достаточной точностью можно определить по приближенной формуле

$$\omega_{0m} = \frac{(2m+1)\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{2}{(2m+1)\pi} \right)^2 \right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Основное отличие частотного спектра (5.4) от (5.3) состоит в том, что для слабо растянутой нити отсутствует низшая частота с номером $m = 1$ из спектра (5.3). Для нерастяжимой нити этот результат получен ранее [1].

В общем случае собственные частоты симметричных колебаний определяются уравнением (5.2). Зависимость собственных частот от отношения $\xi = \epsilon^2/\delta$ приведена на фиг. 2. При возрастании величины ξ частота с номером m постепенно изменяется и при больших ξ имеет значение, близкое к тому, которое имеет частота с номером $m + 1$ при малых ξ .



Фиг. 2

Формы симметричных колебаний определяются формулами

$$V_m = \cos \omega_{0m} s - \cos \omega_{0m} s$$

(5.5)

$$W_m = -(\varepsilon / \omega_{0m}) [(\omega_{0m}^3 / \xi) \cos \omega_{0m} (1 - \xi / \omega_{0m}^2) s + \sin \omega_{0m} s]$$

С ростом отношения $\xi = \varepsilon^2 / \delta$ формы колебаний изменяются так, что низшая форма колебаний с одной полуволной в пролете постепенно переходит в форму с тремя полуволнами в пролете, которая и является низшей формой симметричных колебаний слаборастянутой нити, что показано в правой части фиг. 2. Отметим также, что струнная форма колебаний с тремя полуволнами переходит в соответствующую форму колебаний с пятью полуволнами и т. д.

Частотное уравнение для антисимметричных форм колебаний (V_0 – нечетная функция s , W_1 – четная) имеет вид

$$\sin \omega_0 = 0$$

(5.6)

Собственные частоты для антисимметричных форм колебаний совпадают с соответствующими частотами струны с прямолинейной осью

$$\omega_{0n} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

(5.7)

а формы колебаний определяются формулами

$$V_n = \sin \omega_{0n} s, \quad W_n = (\varepsilon / \omega_{0n}) (\cos \omega_{0n} - \cos \omega_{0n} s)$$

(5.8)

Отметим, что формы колебаний удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{-1}^1 V_{0r} V_{0p} ds = 0, \quad \int_{-1}^1 [V_{0r}' V_{0p}' + \xi (W_{1r}' - V_{0r}') (W_{1p}' - V_{0p}')] ds = 0, \quad r \neq p$$

Высокочастотные колебания. Предварительный анализ показал, что собственные формы высокочастотных колебаний представляют собой суперпозицию медленно изменяющихся функций $f_s(s_s)$, где $s_s = (1 + \varepsilon \delta_s + \dots)s$ и быстро изменяющихся осциллирующих функций $f_f(s_f)$, где $s_f = \delta^{-1/2} (1 + \varepsilon \delta_f + \dots)s$. Здесь в явном виде учтена зависимость аргументов медленно и быстро изменяющихся функций от малых параметров в соответствии с методикой Линштедта – Пуанкаре [4]. Имеем

$$df_s / ds = (1 + \varepsilon \delta_s + \dots) f_s', \quad df_f / ds = \delta^{-1/2} (1 + \varepsilon \delta_f + \dots) f_f'$$

$$(f_s' = df_s / ds_s, \quad f_f' = df_f / ds_f)$$

Производные df_s / ds_s и df_f / ds_f являются величинами порядка единицы. Для медленно

изменяющихся функций их производные по s и сами функции имеют одинаковый, а для быстро изменяющихся функций – различный асимптотический порядок.

В результате предварительного анализа установлено, что асимптотические разложения форм и частот колебаний имеют вид

$$V = \varepsilon V_s + \dots + V_f + \dots, \quad W = W_s + \dots + \varepsilon \sqrt{\delta} W_f + \dots \quad (5.9)$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{\delta} (1 + \dots), \quad \omega_0^2 = O(1)$$

Отметим, что предварительный анализ позволяет установить соотношение асимптотических порядков медленно изменяющихся компонент решения, а также соотношение асимптотических порядков быстро изменяющихся компонент решения. Соотношение же между асимптотическими порядками медленно и быстро изменяющихся функций будет установлено в ходе дальнейших построений.

Подставляя разложения (5.9) в последние два уравнения (3.6), замечая, что если сумма медленно и быстро изменяющихся функций равна нулю, то каждая из этих функций равна нулю, и приравнивая нулю коэффициенты при имеющих наименьший асимптотический порядок комбинациях малых параметров, получим для главных членов асимптотических разложений медленно изменяющихся функций

$$\omega_0^2 V_s + W_s' = 0, \quad W_s'' + \omega_0^2 W_s = 0 \quad (5.10)$$

и для главных членов быстро изменяющихся функций

$$V_f'' + \omega_0^2 V_f = 0; \quad -V_f' + W_f'' = 0 \quad (5.11)$$

Подставляя разложения (5.9) в граничные условия, получим

$$s = \pm 1: \quad \varepsilon V_s + V_f = 0, \quad W_s + \varepsilon \sqrt{\delta} W_f = 0 \quad (5.12)$$

Частотное уравнение для симметричных колебаний имеет вид

$$\sin \omega_0 \cos \frac{\omega_0}{\sqrt{\delta}} + O(\varepsilon^2 \sqrt{\delta}) = 0 \quad (5.13)$$

Для форм колебаний имеем

$$V_m = -\varepsilon \omega_{0m} \cos \frac{\omega_{0m}}{\sqrt{\delta}} \cos \omega_{0m} s + \varepsilon \omega_{0m} \cos \omega_{0m} \cos \frac{\omega_{0m} s}{\sqrt{\delta}} \quad (5.14)$$

$$W_m = \omega_{0m}^2 \cos \frac{\omega_{0m}}{\sqrt{\delta}} \sin \omega_{0m} s + \varepsilon^2 \sqrt{\delta} \cos \omega_{0m} \sin \frac{\omega_{0m} s}{\sqrt{\delta}}$$

где ω_{0m} – m -й корень частотного уравнения (5.13).

Частотное уравнение для антисимметричных колебаний записывается в виде

$$\cos \omega_0 \sin \frac{\omega_0}{\sqrt{\delta}} + O(\varepsilon^2 \sqrt{\delta}) = 0 \quad (5.15)$$

Формы колебаний определяются выражениями

$$V_n = \cos \omega_{0n} \sin \frac{\omega_{0n} s}{\sqrt{\delta}}, \quad W_n = \frac{\varepsilon \sqrt{\delta}}{\omega_{0n}} \left(\cos \frac{\omega_{0n}}{\sqrt{\delta}} \cos \omega_{0n} s - \cos \omega_{0n} \cos \frac{\omega_{0n} s}{\sqrt{\delta}} \right) \quad (5.16)$$

где ω_{0n} – n -й корень частотного уравнения (5.15).

Проведем анализ полученных результатов. Частотное уравнение для симметричных

колебаний (5.13) удовлетворяется, когда один или оба сомножителя в левой части малы.

В случае, когда малой величиной является сомножитель $\sin \omega_{0m}$, доминирующим слагаемым, определяющим форму колебаний, оказывается медленно изменяющееся слагаемое W_{sm} . Таким образом, в этом случае получаем длинноволновые высокочастотные продольные колебания.

В случае, когда малой величиной является сомножитель $\cos(\omega_{0m} / \sqrt{\delta})$, доминирующим слагаемым оказывается быстро изменяющееся слагаемое V_{fm} . Таким образом, получаем коротковолновые высокочастотные поперечные колебания. Отметим еще, что плотность частот поперечных колебаний в высокочастотном диапазоне значительно выше, чем плотность частот продольных колебаний.

В случае, когда оба сомножителя в левой части частотного уравнения (5.13) малы, имеем более сложную картину, определяемую взаимным влиянием продольных и поперечных колебаний.

Анализ частотного уравнения для антисимметричных колебаний (5.15) дает аналогичные результаты.

Равномерно пригодные во всем частотном диапазоне асимптотические разложения. Получим асимптотические разложения для симметричных и антисимметричных колебаний, равномерно пригодные во всем частотном диапазоне.

Рассмотрим вначале симметричные колебания. Частотное уравнение для низкочастотного диапазона (5.2) можно переписать, заменив ω_0 на ω , в виде

$$(\xi / \omega^3) \sin \omega + (1 - \xi / \omega^2) \cos \omega = 0 \quad (5.17)$$

Частотное уравнение для высокочастотного диапазона (5.13) перепишем в виде

$$\left(\sin \omega \sqrt{\delta} / (\omega \sqrt{\delta}) \right) \cos \omega = 0 \quad (5.18)$$

Отметим, что уравнения (5.17), (5.18) сохраняют ту же асимптотическую точность, что и исходные уравнения (5.2), (5.13). Уравнение (5.17) справедливо при $\omega = O(1)$, уравнение (5.18) – при $\omega = O(1/\sqrt{\delta})$.

Рассмотрим эти уравнения в промежуточной области, где

$$1 < \text{ord } \omega < 1/\sqrt{\delta} \quad (5.19)$$

Соответствующий формализм (см. [5]) состоит в том, что полагаем

$$\omega = \omega_\eta \sqrt{\eta / \delta} \quad (5.20)$$

где величина ω_η фиксирована, а асимптотические порядки величин ϵ , δ , η таковы, что при $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ выполняются неравенства

$$\text{ord } \epsilon^2 < \text{ord } \eta < 1, \text{ или } \epsilon^2 / \eta \rightarrow 0 \quad (5.21)$$

$$\text{ord } \delta < \text{ord } \eta < 1, \text{ или } \eta / \delta \rightarrow \infty$$

Подставляя (5.20) в (5.17) и (5.18) и переходя к пределу (5.21), получим в промежуточной области одно уравнение

$$\cos \omega = 0 \quad (5.22)$$

т. е. низко- и высокочастотные уравнения сращиваются. Более того, можно построить равномерно пригодное во всем частотном диапазоне асимптотическое частотное уравнение, складывая левые части уравнений (5.17), (5.18) и вычитая левую часть уравнения (5.22), справедливого в промежуточной области.

Для симметричных колебаний равномерно пригодное асимптотическое частотное уравнение имеет вид

$$(\xi / \omega^3) \sin \omega + (\sin \omega \sqrt{\delta} / (\omega \sqrt{\delta}) - \xi / \omega^2) \cos \omega = 0 \quad (5.23)$$

Аналогичными построениями можно получить равномерно пригодные выражения для форм симметричных колебаний

$$V_m = \cos \omega_m \cos \omega_m \sqrt{\delta} s - \cos \omega_m \sqrt{\delta} \cos \omega_m s \quad (5.24)$$

$$W_m = -\frac{\varepsilon}{\omega_m} \left[\frac{\omega_m^3}{\xi} \cos \omega_m \left(\frac{\sin \omega_m \sqrt{\delta} s}{\omega_m \sqrt{\delta}} - \frac{\xi s}{\omega_m^2} \right) + \cos \omega_m \sqrt{\delta} \sin \omega_m s \right]$$

Отметим, что при $\omega_m = O(1)$, выражения (5.24) переходят в (5.5), а при $\omega_m = O(1/\sqrt{\delta})$ – в (5.14) (с точностью до несущественного нормирующего множителя).

Проделав соответствующие построения для антисимметричных колебаний, получим вместо (5.6), (5.15) следующие уравнения:

$$\sin \omega = 0, \quad \cos \omega \sqrt{\delta} \sin \omega = 0 \quad (5.25)$$

которые в промежуточной области переходят в уравнение, совпадающее с первым уравнением (5.25).

Для антисимметричных колебаний равномерно пригодное асимптотическое частотное уравнение совпадает со вторым уравнением (5.25), а равномерно пригодные выражения для форм колебаний записываются в виде

$$V_n = \cos \omega_n \sqrt{\delta} \sin \omega_n s, \quad W_n = \frac{\varepsilon}{\omega} \left(\cos \omega_n \cos \omega_n \sqrt{\delta} s - \cos \omega_n \sqrt{\delta} \cos \omega_n s \right) \quad (5.26)$$

При $\omega_n = O(1)$ выражения (5.26) переходят в (5.8), а при $\omega_n = O(1/\sqrt{\delta})$ – в (5.16).

В заключение отметим, что аналогичная методика асимптотического анализа низко- и высокочастотных колебаний и построения равномерно пригодных во всем частотном диапазоне асимптотических частотных разложений может быть применена и при исследовании более сложных объектов, таких, например, как стержни, пластины и оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saxon D.S., Cahn A.S.* Modes of vibration of a suspended chain // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1953. V. 6. Pt 3. P. 273–285.
2. *Меркин Д.Р.* Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
3. *Ивович В.А., Покровский Л.Н.* Динамический расчет висячих покрытий. М.: Стройиздат, 1989. 309 с.
4. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
5. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.