

УДК 62-50

© 1997 г. М.В. Помазанов

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ ДЛЯ ОБЛЕГЧЕНИЯ ВЫБОРА ЦЕЛИ И ЕЕ ДОСТИЖЕНИЯ С НАИМЕНЬШИМИ ЗАТРАТАМИ

Предлагается метод отбора среди обширного списка целей, движущихся по известным траекториям, тех из них, которые достижимы с минимальными потерями по функционалу. Метод основан на интерполяции значений параметров, необходимых для построения оптимальных траекторий как решений задачи Коши. Доказывается теорема о непрерывной зависимости значений этих параметров от терминальных координат в малой окрестности точки старта. Даны асимптотические формулы, которые могут использоваться для вычисления начальных приближений. В качестве примера рассматривается задача отбора ближайших к Земле астероидов как целей для наискорейших перелетов космического аппарата с солнечным парусом.

Задача о минимизации функционала потерь при перемещении управляемой динамической системы к некоторой цели, движущейся по заданной траектории, является задачей оптимального управления, которая обычно решается с помощью принципа максимума [1] и сводится к двухточечной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате получается система нелинейных уравнений относительно краевых значений сопряженных переменных, координат системы и времени перемещения. Решение такой системы для достижения конкретной цели состоит из двух этапов: поиска начального приближения и уточнения найденного приближения, например, методом Ньютона. Для разных целей краевая задача имеет различные краевые условия, начальные приближения и должна решаться отдельно для каждой цели. Если число возможных целей очень велико, то среди них сначала требуется отобрать наиболее ценные в смысле числового значения минимизируемого функционала, а затем рассчитать соответствующие им оптимальные траектории.

Если решать такую задачу путем последовательного перебора решений краевых задач для каждой цели по отдельности, то это может оказаться весьма трудоемким. Поэтому решение предлагается разбить на два этапа. На первом этапе для сетки значений терминальных координат целей, расположенных внутри интересующей области, находятся оптимальные краевые значения сопряженных переменных и времени движения. Затем по найденным дискретным значениям этих параметров решение интерполируется во всю внутренность области, т.е. вычисляется некоторый "банк оптимальных параметров", который и используется на втором этапе. Второй этап заключается в расчете: 1) оптимальных значений этих параметров для заданных целей с известными траекториями, которые пересекают интересующую область, 2) траекторий достижения этих целей с наименьшими затратами.

Такой подход применяется ниже к анализу и отбору наиболее быстродостижимых астероидов для космического аппарата с солнечным парусом и к расчету соответствующих оптимальных траекторий перелета.

**1. Постановка задачи, принцип максимума.** Рассматривается управляемая динамическая система, уравнения движения фазовой точки которой задаются в фазовом

пространстве состояний  $x, v; x \in X, v \in V$ , где  $X, V \subset E^n$  – выпуклые области, в виде

$$\dot{x} = f(x, v), \quad \dot{v} = g(x, v, u), \quad u \in U \quad (1.1)$$

$$f: R^n \times R^n \mapsto R^n, \quad g: R^n \times R^n \times R^m \mapsto R^n$$

Управление  $u$  свободно варьируется вплоть до границы некоторого множества  $U \subset R^m$ . Пусть начальное фазовое состояние  $x = 0, v = 0$  при некотором управлении  $u^0 = \text{const} \in U$  является точкой покоя системы (1.1).

В пространстве  $X$  движется  $N$  тел по известным гладким траекториям  $\tilde{x}_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ . Ставится задача – выбором оптимального управления при выполнении необходимого условия выравнивания координаты  $x$  системы (1.1) с координатой  $\tilde{x}_i(t_r)$  в некоторый момент  $t_r$  встречи минимизировать функционал потерь

$$\Phi(t_r - t_s, v(t_r)) \mapsto \min \quad (1.2)$$

для тех  $\tilde{x}_i(t)$ , для которых этот функционал не может превосходить заданной положительной величины  $\Phi^0$ , где  $v(t_r)$  – скорость фазовой точки в момент встречи, а  $t_s$  – дата старта.

Пусть для каждого  $x_r \in X^0$ , где  $X^0$  – некоторое выпуклое множество:  $X^0 \subset X, 0 \in X^0$ , найдено минимальное значение функционала потерь  $\Phi^*(x_r) = \Phi(T(x_r), v(x_r)) < \Phi^0$ , где  $T(x_r), v(x_r)$  – значение времени перемещения до точки  $x_r$  и конечной скорости точки  $M$ , движущейся по оптимальной траектории, удовлетворяющей уравнениям (1.1). Тогда может быть посчитана зависимость  $\Phi_r(t_r) = \Phi^*(\tilde{x}(t_r))$  минимального значения функционала от даты  $t_r$  встречи с заданным телом  $\tilde{x}(t)$ , а также и дата старта

$$t_s = t_r - T(\tilde{x}(t_r)) \quad (1.3)$$

Предположение о том, что начальное значение  $x(0) = 0, v(0) = 0$  является точкой покоя системы (1.1), существенно упрощает задачу, так как время старта не оказывает влияния на последующее оптимальное движение точки  $M$  и выбирается по формуле (1.3).

Рассмотрим краевую задачу принципа максимума, которую требуется решать для различных значений  $x_r \in X^0$ . Пусть  $p(t) \in \bar{E}^n, q(t) \in \bar{E}^n$  – дифференцируемые функции, сопряженные к  $x, v$  соответственно ( $\bar{E}^n$  – евклидово пространство, сопряженное к  $E^n$ ). Из необходимого условия оптимальности в форме принципа максимума [2] следует существование числа  $a_0 \geq 0$ , такого, что оптимальное управление и траектория удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\dot{x}(t) = f(x, v), \quad \dot{v}(t) = g(x, v, \bar{u}(q, x, v))$$

$$\dot{p}(t) = -p \frac{\partial f}{\partial x}(x, v) - q \frac{\partial g}{\partial x}(x, v, \bar{u}), \quad \dot{q}(t) = -p \frac{\partial f}{\partial v}(x, v) - q \frac{\partial g}{\partial v}(x, v, \bar{u})$$

$$x(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad x(T) = x_r, \quad q(T) = -a_0 \frac{\partial}{\partial v} \Phi(T, v(T)) \quad (1.4)$$

$$H(x, v, p, q, \bar{u})|_T = a_0 \frac{\partial}{\partial T} \Phi(T, v(T))$$

$$\bar{u}(q, x, v) = \arg \max_{u \in U} \langle q, g(x, v, u) \rangle$$

В принятых обозначениях  $x, v, f, g$  – вектор-столбцы,  $p, q$  – вектор-строки,  $\partial f / \partial x, \partial f / \partial v, \partial g / \partial x, \partial g / \partial v$  –  $(n \times n)$ -матрицы,  $\langle \dots \rangle$  – матричное произведение вектор-строки на вектор-столбец,  $H(x, v, p, q, u) = \langle p, f(x, v) \rangle + \langle q, g(x, v, u) \rangle$  – гамильтониан системы (1.1).

Численная величина параметра  $a_0 (0 \leq a_0 < \infty)$  не влияет на траекторию и управление в системе (1.4), удовлетворяющие принципу максимума. Кроме того, авто-

номность системы (1.4) гарантирует постоянство  $H$ ; тогда, учитывая, что  $f(0, 0) = 0$ , из (1.4) получим

$$H(T) = H(0) = \langle q(0), g(0, 0, \bar{u}) \rangle = a_0 \frac{\partial \Phi}{\partial T}(T, v(T))$$

и устранить произвол в выборе  $a_0$  предлагается введением условия нормировки  $\|q(0)\| = 1$ .

Оптимальную траекторию можно вычислить, если известны недостающие значения времени перемещения и сопряженных переменных в системе (1.4) на левом или на правом конце траектории. Достаточно определить на левом конце начальные значения  $p_0 = p(0)$ ,  $q_0 = q(0)$  и время перемещения  $T$  или на правом конце –  $p_r = p(T)$ ,  $v_r = v(T)$  и  $T$ . Тогда решение может быть полностью восстановлено как решение задачи Коши для уравнений (1.4). Если решение такой задачи единственно, то оно оптимально.

*Определение.* Оптимальным многообразием для задачи перемещения управляемого объекта (1.1) в терминальную точку  $x_r$  с минимумом затрат (1.2) называется совокупность функций  $\{\Phi^*, T, p_0, q_0\}(x_r)$  на левом конце оптимальной траектории либо  $\{\Phi^*, T, p_r, v_r\}(x_r)$  – на правом, которые являются решением краевой задачи (1.4) в области  $x_r \in X^0 \subset X \subset E^n$ .

## 2. Теорема единственности оптимального многообразия в окрестности точки $x = 0$ .

Вводятся следующие обозначения:  $f_v^0 = f_v(0, 0)$  –  $(n \times n)$ -матрица,  $g^0(u) = g(0, 0, u)$  – вектор-столбец,  $G(x, v) = \{f_v^0 g(x, v, u) : u \in U\} \subset E^n$  – множество векторов. Пусть граница  $\partial G$  множества  $G$  в некоторой окрестности точки старта  $x = 0$ ,  $v = 0$  описывается скалярной, положительной, дважды непрерывно дифференцируемой функцией  $R(x, v, e)$ , где  $\|e\| = 1$ ,  $e \in E^n$ , таким образом, что для каждого вектора  $e$  существует и единственно такое управление  $u \in U$ , для которого выполнено соотношение

$$f_v^0 g(x, v, u(x, v, e)) = R(x, v, e)e \quad (2.1)$$

Пусть, по определению, скалярная функция

$$D(x, v, s) = \|s\| R(x, v, s/\|s\|), \quad s \in E^n$$

А также  $R^0(e) = R(0, 0, e)$ ,  $D^0(s) = D(0, 0, s)$ ,  $G^0 = G(0, 0)$  – множество векторов  $G(x, v)$  при  $x = 0$ ,  $v = 0$ .

*Теорема.* Пусть 1) в некоторой окрестности точки  $x = 0$ ,  $v = 0$  при  $u \in U$ ,  $\|e\| = 1$ ,  $e \in E^n$  функции  $f$ ,  $g$  и  $R$  из (2.1) дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности входящих переменных,  $\det(f_v^0) \neq 0$ ,  $R^0(e) > 0$ ; 2) функция  $D^0(s)$  сильно выпукла при  $s \in E^n$ ; 3) функция  $\Phi(T, v) \in C^2[R^1 \times R^n]$ ,  $\Phi(0, 0) = 0$  и она принимает в точке  $T = 0$ ,  $v = 0$  наименьшее значение в области  $T \geq 0$ ,  $v \in E^n$ ; причем  $\Phi_t^0 = \partial \Phi(0, 0)/\partial T \neq 0$ .

Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$ , такое, что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  и для  $x_r = \varepsilon^2 e$  оптимальное многообразие задачи (1.4) единственно, непрерывно зависит от  $x_r$ , и для него справедливы следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \Phi^*(x_r) &= \varepsilon \Phi_t^0 \sqrt{2D^0(e)} + O(\varepsilon^2), \quad T(x_r) = \frac{\Phi^*(x_r)}{\Phi_t^0} + O(\varepsilon^2) \\ p_0(x_r) &= \Omega \left[ \left( e^T - \frac{\nabla R^0}{R^0}(e)(I - \{e_i e_j\}) \right) + O(\varepsilon) \right], \quad e^T \in \bar{E}^n \\ q_0(x_r) &= T p_0(x_r) f_v^0 + O(\varepsilon^2), \quad H(x_r) = \Omega \left[ \varepsilon \sqrt{2R^0(e)} + O(\varepsilon^2) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\Omega$  – нормирующий множитель.

Здесь  $\nabla R(s) = \text{grad } R(s)$  – вектор-строка,  $I$  – единичная  $(n \times n)$ -матрица,  $\{e_i e_j\}$  – симметричная матрица, в которой каждый элемент равен произведению  $e_i e_j$  компонент  $e_i$  вектора  $e$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

*Доказательство.* Вводятся новые переменные в (1.4):  $x = \varepsilon^2 \chi$ ,  $v = \varepsilon v$ ,  $t = \varepsilon \tau$ ,  $T = \varepsilon t$ . Из условия 3 теоремы следует, что  $\Phi'_v(T, v) = 0$  при  $T = 0$ ,  $v = 0$ . Значит, минимизируемый функционал  $\Phi_\varepsilon(\tau, v) = \Phi(T, v)/(\varepsilon \Phi^0) = \tau + \varepsilon \phi_1(\varepsilon, \tau, v)$  и система (1.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \chi &= f_v^0 v + \varepsilon f_1(\varepsilon, \chi, v), \quad \frac{d}{d\tau} v = g^0(\bar{u}) + \varepsilon g_1(\varepsilon, \chi, v, \bar{u}) \\ \frac{d}{d\tau} p &= -\varepsilon p_1(\varepsilon, p, q, \chi, v, \bar{u}), \quad \frac{d}{d\tau} q = -p f_v^0 - \varepsilon q_1(\varepsilon, p, q, \chi, v, \bar{u}) \\ \chi(0) &= v(0) = 0, \quad q(\hat{\tau}) = -\varepsilon \Theta(\varepsilon, \hat{\tau}, v(\hat{\tau}), q(0)) \\ \chi(\hat{\tau}) &= e, \quad \|q(0)\| = 1 \\ (\bar{u}(\varepsilon, q, \chi, v) &= \arg \max_{u \in U} \langle q, g^0(u) + \varepsilon q_1(\varepsilon, \chi, v, u) \rangle) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где функции  $\phi_1, f_1, g_1, p_1, q_1, \Theta$  ограничены и могут быть получены из системы (1.4).

Из краевой задачи (2.3) следует система  $2n + 1$  нелинейных уравнений относительно  $2n + 1$  неизвестных  $p_0 = p(0)$ ,  $q_0 = q(0)$  и  $\hat{\tau}$

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(e, \hat{\tau}, p_0, q_0) &\stackrel{d}{=} e - \chi(\varepsilon, \hat{\tau}, p_0, q_0) = 0 \\ \psi_\varepsilon(\hat{\tau}, p_0, q_0) &\stackrel{d}{=} (f_v^{0T})^{-1} (q^T(\varepsilon, \hat{\tau}, p_0, q_0) + \varepsilon \Theta^T) = 0 \\ \delta(q_0) &\stackrel{d}{=} \|q_0\|^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для единственности и непрерывности решения системы (2.4) согласно теореме о разрешимости неявной функции достаточно доказать:

1) существование единственного решения для  $\varepsilon \rightarrow 0+$  и невырожденность якобиана преобразования для этого случая при  $\|e\| = 1$ , т.е.

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \det \frac{\partial(\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon, \delta)}{\partial(\hat{\tau}, p_0, q_0)} \neq 0, \quad (2.5)$$

2) непрерывность частных производных  $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$  по всем входящим переменным при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ .

Докажем справедливость первого положения. При  $\varepsilon = 0$  согласно (2.3)  $\dot{p} = 0$ . Значит,  $p = p_0$ ,  $\dot{q} = -p_0 f_v^0$  и  $q(\hat{\tau}) = 0$ , следовательно,  $q_0 = \hat{\tau} p_0 f_v^0$ . Далее, система (2.4) при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  принимает вид

$$\begin{aligned} \phi_0 &\stackrel{d}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \phi_\varepsilon = e - f_v^0 g^0(u(q_0)) \frac{\hat{\tau}^2}{2} = 0 \\ \psi_0^T &\stackrel{d}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \psi_\varepsilon^T = q_0 (f_v^0)^{-1} - p_0 \hat{\tau} = 0, \quad \delta = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$(u(q_0) = \arg \max_{u \in U} \langle q_0, g^0(u) \rangle = \arg \max_{u \in U} \langle q_0 (f_v^0)^{-1}, f_v^0 g^0(u) \rangle)$$

Проекция  $f_v^0 g^0(u)$  на постоянный вектор  $q_0 (f_v^0)^{-1}$  будет максимальна, когда значение  $f_v^0 g^0(u(q_0)) \in \partial G$ . Значит, существует  $s \in E^n$ , такое, что

$$f_v^0 g^0(u(q_0)) = R^0 \left( \frac{s}{\|s\|} \right) \frac{s}{\|s\|}$$

Если  $s \in \partial G^0$ , то  $\|s\| = R^0(s/\|s\|)$ . Следовательно,  $D^0(s) = 1$  определяет поверхность  $\partial G^0$ .

Отсюда при наличии выпуклости  $D^0(s)$  получим уравнения для  $s$  как условие коллинеарности  $q_0(f_v^0)^{-1}$  и  $\text{grad}_s D^0(s)$ :

$$q_0(f_v^0)^{-1} = Q \text{grad}_s D^0(s), \quad D^0(s) = 1 \quad (2.7)$$

где  $Q$  – некоторый положительный скалярный множитель. Из первого уравнения (2.6)  $\phi_0 = 0$  для  $s = eR^0(e)$  следует

$$e - R^0(e)e \hat{\tau}^2 / 2 = 0$$

Значит,  $\hat{\tau} = \sqrt{2D^0(e)}$  ( $\|e\|=1$ ). Из второго уравнения (2.6)  $\psi_0^T = 0$  получается, что  $p_0 = (1/\hat{\tau})q_0(f_v^0)^{-1}$ . Вычисляя градиент в (2.7) и объединяя положительные скалярные множители в некоторый множитель  $\Omega$ , который вычисляется из условия нормировки  $\delta = 0$ , можно окончательно получить

$$p_0 = \Omega \left( e^T - \frac{\nabla R^0}{R^0}(e)(I - \{e_i e_j\}) \right)$$

а также  $q_0 = \hat{\tau} p_0 f_v^0$ . Значит, найдено однозначное решение системы (2.6) при  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Для доказательства неравенства (2.5) вводятся промежуточные векторные переменные  $S \in E^n$ ,  $P \in E^n$  и скалярная переменная  $Q$  по формулам

$$S = f_v^0 g^0(u(q_0)) \hat{\tau}^2 / 2, \quad P = \hat{\tau} p_0^T$$

$$Q = \|q_0(f_v^0)^{-1}\| \|\nabla D^0(S)\|$$

(всего  $2n + 1$  скалярных переменных). При учете (2.7) систему (2.6) запишем в виде

$$\phi_0 = e - S, \quad \psi_0 = Q \nabla_s^T D^0(S) - P, \quad \delta = \|f_v^{0T} P\|^2 - 1 \quad (2.8)$$

Якобиан преобразования  $S, P, Q \rightarrow \phi_0, \psi_0, \delta$  является невырожденным при  $\phi_0 = 0$ ,  $\psi_0 = 0$ ,  $\delta = 0$ . Действительно, он представляется в виде определителя следующей блочной матрицы:

$$d_1 = \det \frac{\partial(\phi_0, \psi_0, \delta)}{\partial(S, P, Q)} = \det \begin{vmatrix} -I_n^n & 0_n^n & 0^n \\ \psi_{0s} & -I_n^n & \nabla_s^T D^0(S) \\ 0_n & 2P^T f_v^{0T} f_v^0 & 0 \end{vmatrix}$$

где  $I_n^n$  – единичная  $(n \times n)$ -матрица,  $0_n^n$  – нулевая  $(n \times n)$ -матрица,  $\psi_{0s}$  – квадратная матрица  $\partial\psi_0/\partial S$ ,  $0_n$  – нулевая вектор-строка,  $0^n$  – нулевой вектор-столбец. Поэтому

$$d_1 = \det(-I_n^n) \det \begin{vmatrix} -I_n^n & \nabla_s^T D^0(S) \\ 2P^T f_v^{0T} f_v^0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n 2 \langle \nabla_s D^0(S), f_v^0 f_v^{0T} P \rangle$$

а учитывая, что  $\psi_0 = 0$  в (2.8), т.е.  $\nabla_s D^0(S) = P^T/Q$ , получим, что

$$d_1 = (-1)^n \frac{2}{Q} \|f_v^{0T} P\|^2 = 2 \frac{(-1)^n}{Q}$$

при условии  $\delta = 0$  в (2.8). Значит,  $d_1 \neq 0$ .

Промежуточное преобразование  $S, P, Q \rightarrow q_0(f_v^0)^{-1}, p_0, \hat{\tau}^2 / 2$ , представляемое формулами

$$\frac{\hat{\tau}^2}{2} = D^0(S), \quad q_0(f_v^0)^{-1} = Q \nabla_s D^0(S), \quad p_0^T = \frac{1}{\hat{\tau}(S)} P$$

также является невырожденным при выполнении условий теоремы и равенств (2.6).

Действительно, его якобиан  $d_2$ , как и  $d_1$ , представляется в виде определителя блочной матрицы

$$d_2 = \det \frac{\partial(p_0, (f_v^0)^{-1} q_0, \hat{\tau}^2 / 2)}{\partial(P, S, Q)} = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{\hat{\tau}} I_n^n & \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{P}{\tau(S)} \right) & 0^n \\ 0_n^n & QD_{ss}^0(S) & \nabla_s^T D^0(S) \\ 0_n & \nabla_s D^0(S) & 0 \end{vmatrix}$$

где  $(\partial/\partial s)(P/\tau(S))$  –  $(n \times n)$ -матрица,  $D_{ss}^0$  –  $(n \times n)$ -матрица вторых производных функции  $D^0(S)$  по компонентам вектора  $S$ . Тогда

$$d_2 = \det \left( \frac{I_n^n}{\hat{\tau}} \right) \det \begin{vmatrix} QD_{ss}^0(S) & \nabla_s^T D^0(S) \\ \nabla_s D^0(S) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\hat{\tau}^n} Q^{n-1} \det \begin{vmatrix} D_{ss}^0(S) & \nabla_s^T D^0(S) \\ \nabla_s D^0(S) & 0 \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

Из сильной выпуклости  $D^0(S)$  следует [2], что  $\det D_{ss}^0 > 0$ , тогда найдутся  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{j=1}^n D_{s_i s_j}^0 \lambda_j = \frac{\partial}{\partial S_i} D^0(S) \quad (2.10)$$

Следовательно, добавляя к последнему столбцу  $(\nabla_s^T D^0(S), 0)$  размерности  $n + 1$  остальные столбцы (2.9) с коэффициентами  $-\lambda_i$  (при этом, естественно, исходный определитель не изменится), можно получить

$$d_2 = \frac{Q^{n-1}}{\hat{\tau}^n} \det \begin{vmatrix} D_{ss}^0(S) & 0^n \\ \nabla_s D^0(S) & -\sum_{i=1}^n D_{s_i}^0 \lambda_i \end{vmatrix}$$

Раскладывая определитель по последнему столбцу и учитывая (2.10), окончательно получим

$$d_2 = \frac{Q^{n-1}}{\hat{\tau}^n} \det D_{ss}^0(-\sum_{i,j} D_{s_i s_j}^0 \lambda_i \lambda_j) \quad (2.11)$$

Квадратичная форма в правой части равенства (2.11) больше нуля при любых  $\lambda_i$ , не всех равных нулю, так как она положительно определена в силу опять же сильной выпуклости  $D^0(S)$ . Значит,  $d_2 \neq 0$  ( $d_2 < 0$ ).

Последнее необходимое для завершения доказательства первого положения соотношение

$$d_3 = \det \frac{\partial(p_0, (f_v^0)^{-1} q_0, \hat{\tau}^2 / 2)}{\partial(\hat{\tau}, p_0, q_0)} \neq 0$$

очевидно, так как  $\hat{\tau} \neq 0$ , и по условию 1 теоремы  $\det(f_v^0) \neq 0$ . Следовательно, якобиан (2.5)  $d = -(d_1/d_2)d_3 \neq 0$ .

Справедливость второго положения легко показать, исходя из теоремы о непрерывной зависимости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений и их частных производных (по начальным данным) от начальных данных задачи (1.4).

Для непрерывности решений  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $p(t)$ ,  $q(t)$  и их частных производных по начальным данным в (1.4) достаточно непрерывной дважды дифференцируемости функций  $f$ ,  $g$  по совокупности входящих переменных  $x$ ,  $v$ ,  $u$  и непрерывной

дифференцируемости по  $x, v, q$  функций  $\bar{u}(q, x, v)$ , вычисляемых однозначно из условия максимума в (1.4), в некоторой окрестности точки  $x = 0, v = 0$ . Первое выполнено в силу исходных предположений теоремы, а выполнение второго проверим подробнее.

В некоторой окрестности точки  $x = 0, v = 0$  однозначно разрешимо уравнение (2.1) относительно  $u \in U$ , причем функция  $u(x, v, e)$  ( $\|e\| = 1, e \in E^n$ ) согласно предположениям относительно  $g$  и  $R$  непрерывно дифференцируема по совокупности входящих переменных. Значит, если функция

$$e(q, x, v) = s(q, x, v) / R(x, v, s/\|s\|) \quad (2.12)$$

$$\left( s(q, x, v) = \arg \max_{D(x, v, s)=1} \langle q(f_v^0)^{-1}, s \rangle \right)$$

непрерывно дифференцируема по  $q, x, v$ , то  $\bar{u}(q, x, v)$  из (1.4) непрерывно дифференцируема по совокупности  $q, x, v$ .

Из (2.12) следует уравнение для  $s(q, x, v)$ , аналогичное (2.7)

$$q(f_v^0)^{-1} = Q \nabla_s D(x, v, s), \quad D(x, v, s) = 1 \quad (2.13)$$

где  $Q$  – положительный скалярный нормировочный множитель.

Следовательно, для непрерывности производных по  $q, x, v$  от  $e(q, x, v)$  требуется однозначная разрешимость компонент вариации  $\delta s$  относительно компонент вариаций  $\delta q, \delta x, \delta v$  для  $q, x, v$  в (2.13). Система линейных уравнений относительно вариаций  $\delta s, \delta Q$ , как легко видеть из (2.13), имеет главную матрицу вида

$$\left\| \begin{array}{cc} D_{ss}(x, v, s) & \nabla_s^T D(x, v, s) \\ \nabla_s D(x, v, s) & 0 \end{array} \right\|$$

невыврожденность которой в окрестности нулевой точки доказывается с помощью рассуждений, аналогичных доказательству невырожденности преобразования с якобианом  $d_2$ , рассмотренному выше. Для существования такой окрестности требуется сильная выпуклость функции  $D^0(s)$ , а она имеет место по условию 2 теоремы (условие строгой выпуклости может оказаться недостаточным).

Значит, имеет место однозначная разрешимость краевых условий уравнений (2.4) относительно начальных значений сопряженных переменных и времени перемещения в рассмотренном асимптотическом случае, что и доказывает теорему.

**3. О схеме вычисления оптимального многообразия.** В разд. 2 было показано, что оптимальное многообразие определяется совокупностью функций  $\Phi^*(x_r), T(x_r), p_0(x_r), q_0(x_r)$  непрерывно и однозначно в некоторой окрестности терминальной точки  $x_r = 0$ . Значит, существует такое  $\Phi^0 > 0$ , что для всех  $x_r \in M = \{x \in E^n, \Phi^*(x) < \Phi^0\}$  единственность и непрерывность имеют место. Значения функций оптимального многообразия предлагается вычислять во всей области  $M$  методом продолжения по параметру (ПП) (см., например, [3]) по следующей схеме:

1) выбирается точка  $x_0 \neq 0$ , достаточно близкая к  $x = 0$  ( $\Phi^*(x_0) < \Phi^0$ ), в ней вычисляется начальное приближение по асимптотическим формулам теоремы;

2) полученное приближение уточняется путем численного решения краевых уравнений (2.4), например, методом Ньютона;

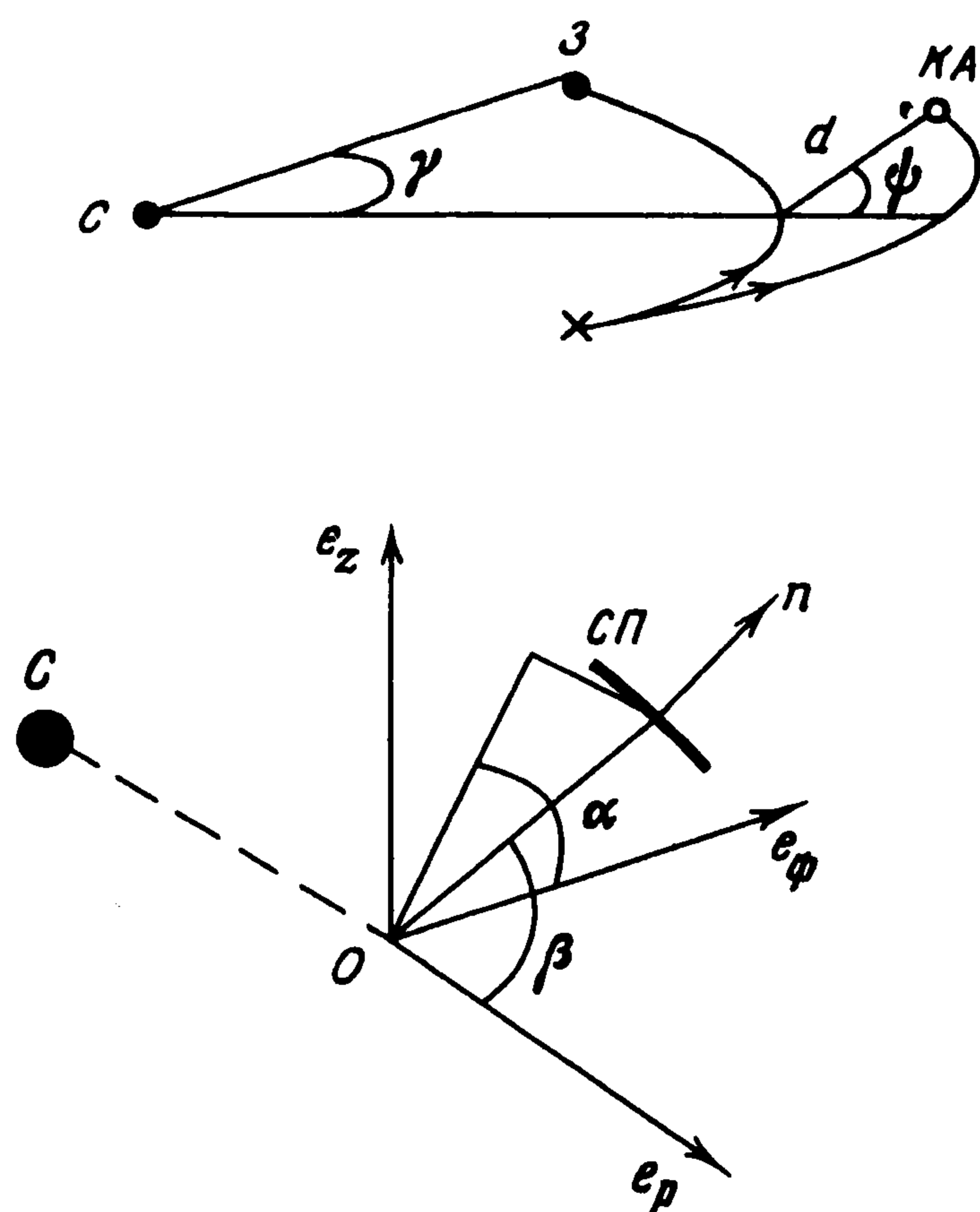
3) из вычисленной оптимальной точки  $T(x_0), q_0(x_0), p_0(x_0)$  решение продолжается на всю область  $M$  методом ПП.

Методом ПП возможно продолжать решение только по одномерной кривой, расположенной внутри области  $M$ . На этой кривой с некоторым не постоянным шагом располагаются точки (вершины, узлы), в которых вычисляются значения оптималь-

ного многообразия. Если размерность пространства  $X$ , куда вложена выпуклая область  $M$ , больше единицы, то строится сначала последовательность узлов, расположенная вдоль одной из координат до границы области  $M$ . Далее каждый из узлов найденной последовательности является порождающим для новой последовательности узлов, расположенной, например, вдоль второй координаты до границы области  $M$ , при первой фиксированной. Продолжая этот процесс, можно за конечное число шагов (узлов) пройти всю область  $M$ . Однако важно подчеркнуть очевидный факт, что количество вершин интерполяции при увеличении размерности на единицу увеличивается в количество раз, равное среднему числу вершин, приходящихся на каждую, уже имеющуюся вершину. Поэтому, для экономии ресурсов ЭВМ рекомендуется понижать число вершин интерполяции, полученных в результате работы метода ПП, путем уменьшения их густоты в местах, где интерполируемая функция меняется достаточно плавно.

Для области с размерностью, равной единице, интерполяцию можно проводить множеством методов, среди которых особенно удобен и эффективен метод сплайн-интерполяции [4]. Для размерности, равной двум, интерполяцию по рассеянным точкам наиболее целесообразно проводить методами, основанными на триангуляциях; численную реализацию одного из них можно взять из стандартной библиотеки NAG (Numerical Algorithms Group, E01SBF – NAG FORTRAN Routine Library Document). Для областей с размерностью, равной трем и выше, эффективным методом интерполяции по рассеянным точкам является модифицированный метод Шепарда [5].

**4. Пример расчета.** Рассматривается оптимальный по быстрдействию ( $\Phi(T, \nu) = T$ ) перелет космического аппарата (КА) с солнечным парусом (СП) к астероидам из заданного списка с круговой гелиоцентрической орбиты<sup>1</sup>. Предполагается, что парус плоский, идеально отражающий, управляется двумя углами ориентации  $\alpha, \beta$  (фиг. 1, где  $C$  – Солнце,  $Z$  – Земля, крестик означает точку старта). Здесь  $\beta \in [0, \pi/2]$  – угол между нормалью к парусу и направлением от Солнца,  $\alpha \in [0, 2\pi]$  – угол между единичным вектором  $e_\phi$

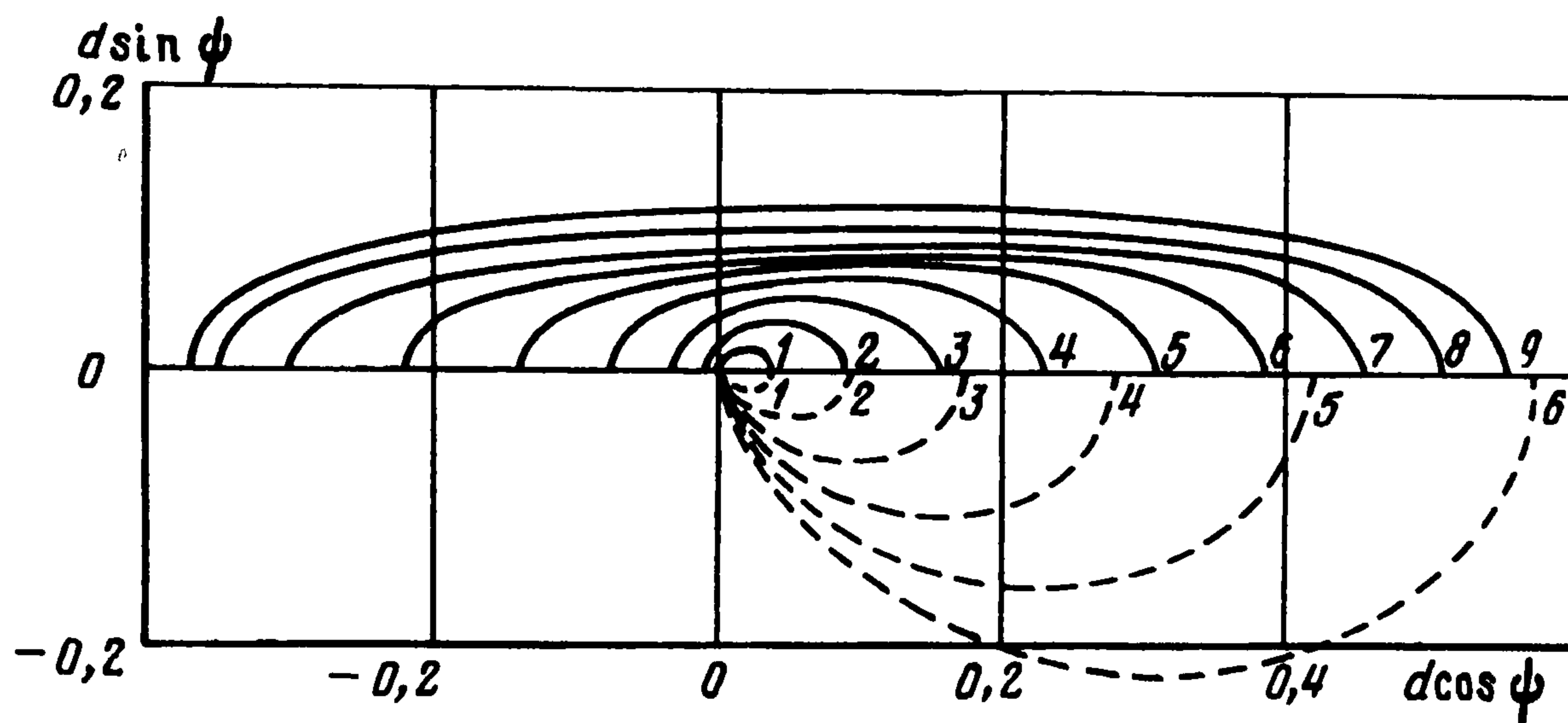


Фиг. 1

локального базиса ( $e_r, e_\phi, e_z$ ) цилиндрических координат и плоскостью, образованной нормалью к парусу и направлением на Солнце. Предположим, что КА в начальный момент двигался вместе с непритягивающей Землей, т.е. имел ее скорость на границе ее (точечной) сферы действия. Вводятся следующие координаты терминальной точки (фиг. 1):  $d$  – расстояние от этой точки до орбиты Земли,  $\psi$  – угол между перпендикуляром, опущенным на орбиту Земли из терминальной точки и плоскостью эклиптики,  $\gamma$  – угол, отсчитываемый в плоскости эклиптики, между гелиоцентрическими радиус-векторами КА и Земли в конечный момент движения.

Примем за единицы расстояние от Земли до Солнца и время обращения Земли вокруг Солнца, деленное на  $2\pi$  (т.е. один год равен  $2\pi$  радианам), отнесем тягу паруса к параметру  $a$ , который равен отношению максимальной тяги паруса к притяжению Солнца. Движение КА с СП рассматривается во вращающейся системе координат, связанной с Землей, при этом радиус-

<sup>1</sup> Помазанов М.В. Интерполяция оптимального многообразия для расчета минимальных времен перелета космического аппарата с солнечным парусом к астероидам: Препринт № 45. М.: Ин-т им. М.В. Келдыша РАН, 1996, 31 с.



Фиг. 2

вектор КА

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (d \cos \psi, d \sin \psi, \gamma)^T$$

связан с текущими невращающимися цилиндрическими координатами  $(\rho, \phi, z)$  КА соотношениями  $x_1 = \rho - 1$ ,  $x_2 = z$ ,  $x_3 = \phi - t$  (предполагается, что координата Земли  $\phi = 0$  в момент  $t = 0$ ). В проекциях на оси  $\rho, \phi, z$  вектор скорости аппарата относительно Земли  $\mathbf{v} = (u, v - 1, v_z)$ , где  $u$  – радиальная скорость в плоскости  $(\rho, \phi)$ ,  $v = \rho \dot{\phi}$  – трансверсальная скорость в той же плоскости,  $v_z$  – скорость по оси  $z$ . Функции  $f, g$  для описанной управляемой системы имеют вид (вытекающий из уравнений движения КА с СП, записанных в невращающейся системе координат в центральном поле притяжения Солнца [6]):

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u \\ v_z \\ v / \rho - 1 \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, u) = \begin{pmatrix} v^2 / \rho + \xi_1 / r^2 \\ -uv / \rho + \xi_2 / r^2 \\ \xi_3 / r^2 \end{pmatrix}$$

$$\xi_1 = a \cos^2 \beta (\cos \theta \cos \beta - \sin \theta \sin \alpha \sin \beta) - \cos \theta$$

$$\xi_2 = a \cos^2 \beta \cos \alpha \sin \beta$$

$$\xi_3 = a \cos^2 \beta (\cos \theta \sin \alpha \sin \beta + \sin \theta \sin \beta) - \sin \theta$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \quad \cos \theta = \rho / r, \quad \sin \theta = z / r$$

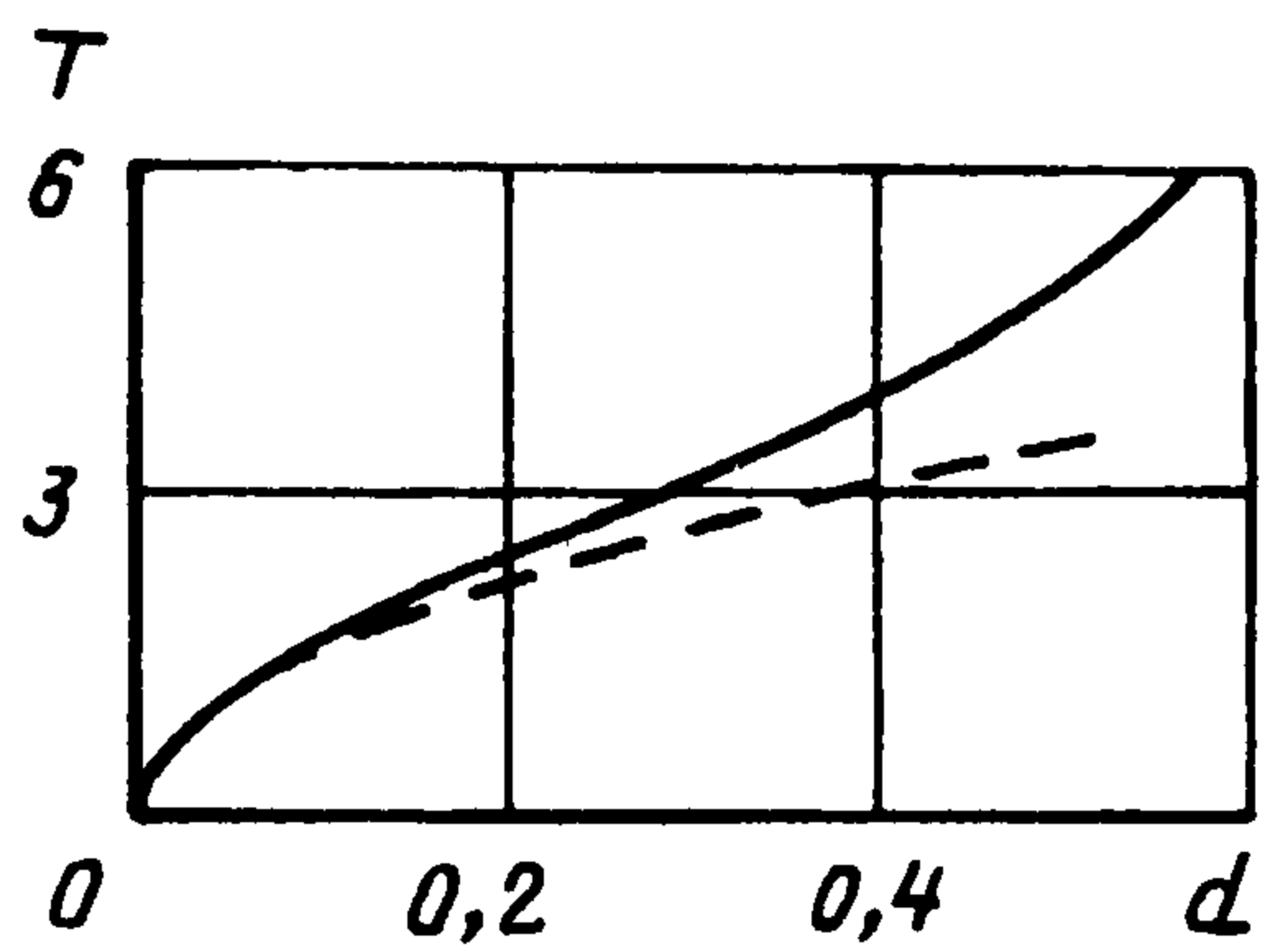
При  $d = 0$  и  $\gamma = 0$  КА движется вместе с Землей.

Линии уровня минимального времени  $T^*(x_1, x_2)$  перелета к точке  $(x_1, x_2) = (d \cos \psi, d \sin \psi)$  изображены в верхней части фиг. 2 для  $\psi \in [0, \pi]$ ,  $a = 0,083$ . Штриховые кривые ограничивают место расположения линий уровня на плоскости  $(x_1, x_2)$  для времен перелета  $T_{as}(x_1, x_2)$ , вычисленных аналитически по первой из асимптотических формул (2.2) теоремы

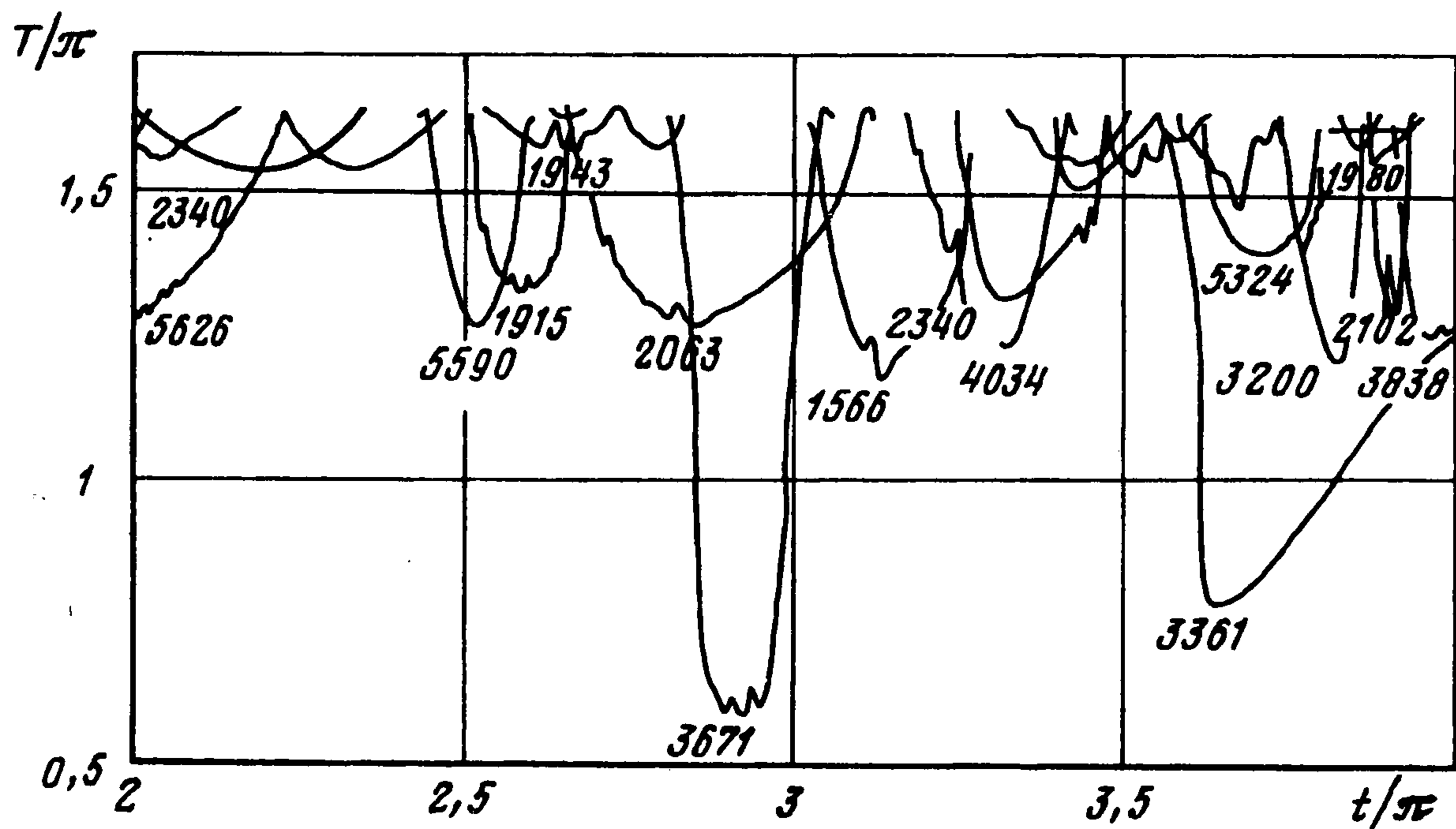
$$T_{as}^2 / 2 = (d / a) / \cos^2 \psi, \quad \psi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Кривые с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 соответствуют временам перелета 0,97; 1,49; 2,03; 2,59; 3,15; 3,71; 4,28; 4,84; 5,41.

Симметрия  $T^*, T_{as}$  относительно замены  $\psi$  на  $-\psi$  позволяет разместить оба графика на одной фигуре. Хорошо видна особенность двигателя "солнечный парус", заключающаяся в том, что проекция тяги паруса на направление от Солнца всегда неотрицательна; значит, асимптотически при  $T \rightarrow 0$  КА с СП не может залететь внутрь орбиты Земли. В случае не очень малых времен перелета  $T$  реальная картина значительно отличается от асимптотической: КА с СП может достигнуть и точки внутри орбиты Земли примерно за то же время, что и наружной точки, помещенной на том же расстоянии от орбиты Земли.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 представлены зависимости  $T^*(d)$  (сплошная линия) и  $T_{as}(d) = \sqrt{2d/a}$  (штриховая линия) при  $\psi = 0$ ,  $a = 0,083$ . Видно, что до  $d = 0,1-0,15$  рассматриваемые кривые почти совпадают, а далее наблюдается значительное расхождение асимптотических значений времени перелета с точными, полученными численно из решения краевой задачи. Поэтому на фиг. 2 асимптотические линии уровня с номерами 4, 5, 6 уже значительно отличаются от точных линий уровня для тех же значений минимального времени  $T^*$ .

Положение астероида  $x_a(t)$  в пространстве однозначно задается функциями  $d_a(t)$ ,  $\psi_a(t)$ ,  $\gamma_a(t)$ , которые зависят от элементов орбит. Когда вычислено оптимальное многообразие для КА с СП, зависящее от  $d$ ,  $\psi$ ,  $\gamma \in M$ , где область  $M$  такова, что  $T^*(M) < T^0$  (в данном примере принималось  $T^0 = 5$  рад), рассчитывается зависимость минимальных времен перелетов от даты встречи по формуле

$$T_r(t_r) = T^*(d_a(t_r), \psi_a(t_r), \gamma_a(t_r))$$

для тех астероидов, к которым можно долететь за минимальное время, не превышающее  $T^0$ .

На фиг. 4 приведены такие зависимости для периода встреч 4.01.97–4.01.98, для некоторых кривых указаны номера астероидов по каталогу [7] (все времена измеряются в радианах:  $2\pi$  рад = 1 г).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-01159).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961, 391 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988, 549 с.
3. Егоров В.А., Сазонов В.В., Егоров М.А., Смирнов В.В. Сравнение оптимального и локально-оптимального геоцентрических разгонов космического аппарата с солнечным парусом // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 6. С. 77–88.
4. Стечкин С.Б., Субботин Ю.М. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976, 248 с.
5. Renka R.J. Multivariate interpolation of lagre sets of scattered data // ACM Trans. Math. Software. 1988. V. 14. N 2. P. 139–148; Renka R.J. Algorithm 661. QSHEP3D: Quadratic Shepard Method for Trivariate Interpolation of Scattered Data. // ACM Trans. Math. Software. 1988. V. 14. N 2. P. 151–152.
6. Лукьянов А.В., Помазанов М.В. Полеты с солнечным парусом к астероидам: задачи и расчет траекторий // Тр. 29-х Чтений, посвящ. разработке науч. наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. Секц. "К.Э. Циолковский и проблемы космического производства". М., 1994, с. 63–69.
7. Эфемериды малых планет на 1995. М.-СПб., 1994.

Москва

Поступила в редакцию  
10.IX.1996