УДК 62.50

© 1997 г. Н.Н. Петров

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА В ПРИМЕРЕ ПОНТРЯГИНА С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Выводятся достаточные условия m-кратной поимки для примера Понтрягина [1] со многими участниками и фазовыми ограничениями на состояния убегающего при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков, при этом граница фазовых ограничений не является "линией смерти" для убегающего.

Работа примыкает к исследованиям [2–11].

1. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E с законами движения

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \ldots + a_l x_i = u_i, \quad u_i \in V \tag{1.1}$$

$$y^{(l)} + a_1 y^{(l-1)} + \ldots + a_l y = v, \quad v \in V \tag{1.2}$$

Здесь $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}^1$, V – выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$. При $t = 0$ заданы начальные условия:

$$x_i^{(\alpha)}(0) = x_{i\alpha}^0, \quad y^{(\alpha)}(0) = y_\alpha^0, \quad \alpha = 0, \ldots, l-1 \tag{1.3}$$

причем $x_{i0}^0 - y_0^0 \notin M_i$ для всех i, где M_i – выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$. Здесь и всюду далее $i = 1, \ldots, n$. Дополнительно предполагается, что убегающий E не покидает пределы выпуклого множества

$$D = \{y\colon\ y \in \mathbb{R}^k, (p_j, y) \leqslant \mu_j, \quad j = 1, \ldots, r\}$$

где $p_1, \ldots, p_r$ – единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ – вещественные числа, такие, что $\operatorname{Int} D \neq 0$.

Определение 1. Будем говорить, что в игре Γ происходит m-кратная поимка, если существуют момент $T > 0$ и измеримые функции $u_i(t) = u_i(t, x_{i\alpha}^0, y_\alpha^0, v(t)) \in V$, что для любой измеримой функции $v(t)$, $v(t) \in V$, $y(t) \in D$, $t \in [0, T]$ существуют такие моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [0, T]$ и попарно различные номера $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$, что $x_{i_\alpha}(\tau_\alpha) - y(\tau_\alpha) \in M_{i_\alpha}$ для всех $\alpha = 1, \ldots, m$.

Считаем, что $n \geqslant m$.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть функция

$$g(t) = \sum_{j=1}^{s} \exp(\lambda_j t) P_j(t) + \sum_{\alpha=1}^{q} \exp(\mu_\alpha t)(Q_\alpha(t) \cos \nu_\alpha t + R_\alpha(t) \sin \nu_\alpha t)$$

$$(\lambda_j, \mu_\alpha, \nu_\alpha \in R^1; \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s, \quad \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_q)$$

где λ_j попарно различны, P_j, Q_α, R_α – многочлены, такова, что $g(t) \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$ и $g(t) \not\equiv 0$.

Тогда

1) $\mu_q \leqslant \lambda_s$;

2) Если $\mu_q = \lambda_s$, то $\deg Q_p(t) \leqslant \deg P_s(t)$, $\deg R_p(t) \leqslant \deg P_s(t)$, для всех $p \in I = \{p: \mu_p = \lambda_s\}$.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1 z_i^{(l-1)} + \ldots + a_l z_i = u_i - v, \quad u_i, \ v \in V \tag{2.1}$$

$$z_i(0) = z_{i0}^0 = x_{i0}^0 - y_0^0, \ldots, z_i^{(l-1)}(0) = z_{il-1}^0 = x_{il-1}^0 - y_{l-1}^0$$

Обозначим через $\varphi_p(t)$ $(p = 0, 1, \ldots, l-1)$ решения уравнения

$$w^{(l)} + a_1 w^{(l-1)} + \ldots + a_l w = 0$$

с начальными условиями

$$w(0) = 0, \ldots, w^{(p-1)}(0) = 0, \quad w^{(p)}(0) = 1, \quad w^{(p+1)}(0) = 0, \ldots, w^{(l-1)}(0) = 0$$

Предположение 1. Все корни характеристического уравнения

$$\lambda^l + a_1 \lambda^{l-1} + \ldots + a_l = 0 \tag{2.2}$$

имеют неположительные вещественные части.

Предположение 2. Справедливо неравенство $\varphi_{l-1}(t) \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Отметим, что предположение 2 выполнено, если уравнение (2.2) имеет только вещественные корни. Из предположения 2 и леммы 1 следует, что уравнение (2.2) имеет хотя бы один вещественный корень. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ $(\lambda_1 <, \ldots, < \lambda_s)$ вещественные корни, $\mu_1 \pm i\nu_1, \ldots, \mu_q \pm i\nu_q$ $(\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_q)$ – комплексные корни уравнения (2.2), k_s – кратность λ_s, m_α – кратность корня $\mu_\alpha \pm i\nu_\alpha$. В силу предположения 2 $\mu_q \leqslant \lambda_s$. Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t) z_{i0}^0 + \varphi_1(t) z_{i1}^0 + \ldots \varphi_{l-1}(t) z_{il-1}^0$$

$$\eta(t) = \varphi_0(t) y_0^0 + \varphi_1(t) y_1^0 \ldots \varphi_{l-1}(t) y_{l-1}^0$$

Тогда $\varphi_{l-1}(t)$, $\xi_i(t)$, $\eta(t)$ представимы в виде

$$\varphi_{l-1}(t) = \sum_{j=1}^{s} \exp(\lambda_j t) P_{l-1j}(t) + \sum_{\alpha=1}^{q} \exp(\mu_\alpha t)(Q_{l-1\alpha}(t) \cos \nu_\alpha t + R_{l-1\alpha}(t) \sin \nu_\alpha t)$$

$$\xi_i(t) = \sum_{j=1}^{s} \exp(\lambda_j t) P_{ij}^1(t) + \sum_{\alpha=1}^{q} \exp(\mu_\alpha t)(Q_{i\alpha}^1(t) \cos \nu_\alpha t + R_{i\alpha}^1(t) \sin \nu_\alpha t)$$

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{s} \exp(\lambda_j t) P_j^2(t) + \sum_{\alpha=1}^{q} \exp(\mu_\alpha t)(Q_\alpha^2(t) \cos \nu_\alpha t + R_\alpha^2(t) \sin \nu_\alpha t)$$

Считаем, что $\xi_i(t) \notin M_i$ для всех i и $t > 0$, ибо, если $\xi_\alpha(t) \in M_\alpha$ при некоторых α и t, то преследователь P_α ловит убегающего E, полагая $u_\alpha(t) = v(t)$, и тогда можно рассматривать задачу о $(m-1)$-кратной поимке. Считаем также, что $P_{si}^1(t) \not\equiv 0$ для всех i, ибо в противном случае преследователи первоначально добиваются выполнения указанного условия.

Обозначим через γ_i степень многочлена $P_{si}^1(t)$, γ_0 – степень многочлена $P_s^2(t)$, γ – степень многочлена $P_{sl-1}(t)$. Можно считать, что $\gamma_i = \gamma$ для всех i, ибо в противном случае преследователи P_i первоначально добиваются выполнения данного условия.

Лемма 2. Справедливо равенство $\gamma = k_s - 1$.

Предположение 3. Справедливо неравенство $m_\alpha < k_s$ для всех $\alpha \in I = \{\alpha \mid \mu_\alpha = \lambda_s\}$.

Лемма 3. Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда для любого $T > 0$ существуют постоянная $c > 0$ и функция $R(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} R(t) = 0$, такие, что

$$\int_0^T \varphi_{l-1}(t-\tau)d\tau = c\exp(\lambda_s t)t^\gamma(1+R(t)) \quad (t > T)$$

Лемма 4. Пусть выполнены предположения 1–3.

1°. Пусть $\lambda_s < 0$. Тогда существует постоянная $a > 0$, такая, что

$$\lim_{t\to\infty}\int_T^t \varphi_{l-1}(t-\tau)d\tau = a \quad \forall T > 0$$

2°. Пусть $\lambda_s = 0$. Тогда для любого $T > 0$ существуют постоянная $c_1 > 0$ и функция $R_1(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} R_1(t) = 0$, такие, что

$$\int_0^T \varphi_{l-1}(t-\tau)d\tau = c_1 t^\gamma(1+R_1(t))$$

Определим функцию λ: $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k) \times V \to \mathbb{R}$

$$\lambda(A,v) = \sup\{\lambda \mid \lambda \geqslant 0, -\lambda A \cap (V - v) \neq 0\}$$

Здесь $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ – пространство выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^k$ с метрикой Хаусдорфа. Пусть далее

$$z_i^0 = \lim_{t\to\infty} P_{si}^1 / t^\gamma, \quad I = \{n+1,\dots,n+r\}$$

$$d = \max\{\|v\|,\ v \in V\}$$

$$b = \begin{cases} -1/a, & \text{если } \lambda_s < 0 \\ 0, & \text{если } \lambda_s = 0 \end{cases}, \quad M_i^1 = \begin{cases} z_i^0 - M_i, & \text{если } \lambda_s = 0,\ k_s = 1 \\ z_i^0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\Omega = \{\{i_1,\dots,i_m\} : \{i_1,\dots,i_m\} \subset \{1,\dots,n\},\ i_1,\dots,i_m \text{ попарно различны}\}$$

$$\lambda_j(v) = (p_{j-n}, v) + b\mu_{j-n}, \quad j \in I, \quad \xi_i^1(t) = \exp(-\lambda_s t)\xi_i(t)$$

$$\delta = \inf_{v\in V}\max\{\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(A_\alpha, v),\ \max_{j\in I}\lambda_j(v)\}$$

$$\delta_0 = \inf_{v\in V}\max\{\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(M_\alpha^1, v),\ \max_{j\in I}\lambda_j(v)\}$$

$$V_1 = \{v : v \in V, \max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(M_\alpha^1, v) = 0\}$$

Лемма 5. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – выпуклые компакты, такие, что $0 \notin A_i$, $\delta > 0$, функции $\lambda_i(A_i, v)$ непрерывны во всех точках (A_i, v), где $\lambda_i(A_i, v) > 0$. Тогда для любых непрерывных многозначных отображений $B_i(t) : [0, \infty) \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$, такие, что $\lim\limits_{t\to\infty} B_i(t) = A_i$ (в метрике Хаусдорфа), существует такой момент T_0, что

$$\delta(t) = \inf_{v\in V}\max\{\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(B_\alpha(t), v),\ \max_{j\in I}\lambda_j(v)\} \geqslant \frac{\delta}{2} \quad \forall t > T_0$$

Предположение 4. Справедливо условие $0 \notin M_i^1$, функции λ_i непрерывны во всех точках (M_i^1, v), таких, что $\lambda_i(M_i^1, v) > 0$.

3. Достаточные условия поимки.

Лемма 6. Пусть для игры Г выполнены предположения 1–4, $\lambda_s < 0$, $0 \in D$, $\delta_0 > 0$, $r = 1$. Тогда существует момент $T_0 > 0$, такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется множество $\Lambda \in \Omega$, такое, что

$$1 - \exp(-\lambda_s T_0) \int_0^{T_0} \varphi_{l-1}(T_0 - \tau)\lambda_\alpha(\xi_\alpha^1(T_0), v(\tau))d\tau \leqslant 0 \quad \forall \alpha \in \Lambda$$

Доказательство. Пусть T – произвольное число, $v(t)$, $t \in [0, T]$ – допустимая функция (т.е. $y(t) \in D$ для всех $t \in [0, T]$). Определим непрерывные функции

$$h_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_s t)\int_0^t \varphi_{l-1}(t-\tau)\lambda_i(\xi_i^1(T), v(\tau))d\tau, \quad h_i(0) = 1 \tag{3.1}$$

$$\sum_{\Lambda\in\Omega} \max_{\alpha\in\Lambda} h_\alpha(T) \leqslant C_n^m - \exp(-\lambda_s T)\int_0^T \varphi_{l-1}(T-\tau)\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(\xi_\alpha^1(T),\ v(\tau))d\tau$$

Так как $\xi_\alpha^1(T)/T^\gamma \to z_\alpha^0$, при $t \to \infty$, то в силу леммы 5 и предположения 4 существует момент T_1, такой, что

$$\inf_v \max\left\{\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha\left(\frac{\xi_\alpha^1(t)}{t^\gamma},\ v\right),\quad \lambda_{n+1}(v)\right\} \geqslant \delta = \frac{\delta_0}{2} \quad \forall t > T_1$$

Так как $y(t) \in D$, то $(p_1, y(t)) \leqslant \mu_1$. Последнее неравенство равносильно следующему:

$$\int_{T_1}^t \varphi_{l-1}(t-\tau)(p_1, v(\tau))d\tau \leqslant \mu(t) = -(p_1, \eta(t)) + \mu_1 - \int_0^{T_1} \varphi_{l-1}(t-\tau)(p_1, v(\tau))d\tau$$

Определим два множества $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t) \subset [T_1, t]$, $(t > T_1)$ следующим образом:

$$\Delta_1(t) = \{\tau \mid \tau\in[T_1,t],\ (p_1, v(\tau)) < \delta - b\mu_1 = \delta_1\}$$

$$\Delta_2(t) = \{\tau \mid \tau\in[T_1,t],\ (p_1, v(\tau)) \geqslant \delta_1\}$$

Тогда

$$G_1 + G_2 = f(t), \quad -dG_1 + \delta_1 G_2 \leqslant \mu(t)$$

где

$$G_{1,2} = \int_{\Delta_{1,2}(t)} \varphi_{l-1}(t-\tau)d\tau, \quad f(t) = \int_{T_1}^t \varphi_{l-1}(t-\tau)d\tau$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$G_1 \geqslant (\delta_1 f(t) - \mu(t))/(d + \delta_1) \tag{3.2}$$

Считая, что $T > T_1$, из неравенства (3.1) получаем

$$\sum_{\Lambda\in\Omega}\max_{\alpha\in\Lambda} h_\alpha(T) \leqslant C_n^m - \exp(-\lambda_s T)\int_{\Delta_1(T)} \varphi_{l-1}(T-\tau)\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(\xi_\alpha^1(T), v(\tau))d\tau \tag{3.3}$$

Так как $\lambda_i(\xi_i^1(T), v)T^\gamma = \lambda_i(\xi_i^1(T)/T^\gamma, v)$, то

$$\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(\xi_\alpha^1(T), v(\tau)) = \frac{1}{T^\gamma}\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha\left(\frac{\xi_\alpha^1(T)}{T^\gamma},\ v(\tau)\right) \geqslant \frac{\delta}{T^\gamma} \quad \forall\tau\in\Delta_1(T) \tag{3.4}$$

Поэтому из (3.3), учитывая (3.4), (3.2), получаем

$$\sum_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda} h_\alpha(T) \leqslant C_n^m - \frac{\exp(-\lambda_s T)\delta[\delta_1 f(T) - \mu(T)]}{T^\gamma(d+\delta_1)} = g(T)$$

Из соотношения

$$\frac{\exp(-\lambda_s T)\eta(T)}{T^\gamma}=\frac{P_s^2(T)}{T^\gamma}+\sum_{j=1}^{s-1}\exp(\lambda_j-\lambda_s)\frac{P_j^2(T)}{T^\gamma}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{q}\exp((\mu_\alpha-\lambda_s)T)\left(\frac{Q_\alpha^2(T)}{T^\gamma}\cos\nu_\alpha T+\frac{R_\alpha^2(T)}{T^\gamma}\sin\nu_\alpha T\right)$$

условия $\gamma_0 \leqslant \gamma$ и предположения 3, получаем, что величина $\| \exp(-\lambda_s T)\eta(T)/T^\gamma \|$ ограничена на $[T_1, \infty)$. Поэтому и величина $\| \exp(-\lambda_s T)(p_1, \eta(T))/T^\gamma \|$ будет ограниченной на $[T_1, \infty)$. Из леммы 3 следует, что

$$\frac{\exp(-\lambda_s T)}{T^\gamma}\int_0^{T_1}\varphi_{l-1}(T-\tau)d\tau$$

есть величина, ограниченная на $[T_1, \infty)$. Из леммы 4 следует, что

$$(\delta_1 f(t)-\mu_1)=(\delta-b\mu_1)f(t)-\mu_1\to a\delta \quad \text{при} \quad t\to\infty$$

Поэтому $\lim g(T) = -\infty$ при $T\to\infty$. Значит, существует момент T_0, удовлетворяющий условию леммы.

Пусть

$$V(t)=\{v_t(\cdot)\colon v(\tau)\in V,\quad y(\tau)\in D,\quad \tau\in[0,t]\},$$

$$T(z_0)=\min\left\{t: t\geqslant 0,\quad \inf_{v_t(\cdot)\in V(t)}\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}\int_0^t \exp(-\lambda_s t)\varphi_{l-1}(t-\tau)\lambda_\alpha(\xi_\alpha^1(t),\ v(\tau))d\tau\geqslant 1\right\}$$

Теорема 1. Пусть для игры Γ выполнены предположения 1–4, $\lambda_s < 0$, $\delta_0 > 0$, $0 \in D$, $M_i = \{0\}$ и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

а) $r = 1$; б) $\min\limits_{v\,\in \operatorname{co} V_1}\max\limits_j((p_j, v)+b\mu_j)>0$.

Тогда в игре Γ происходит m-кратная поимка.

Доказательство. Пусть выполнено условие *а*. По лемме 6 имеем $T = T(z_0) < \infty$. Пусть $v(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant T = T(z_0))$ – произвольное допустимое управление убегающего E. Существует момент $T_1 \in (0, T]$, являющийся корнем функции

$$h(t)=1-\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha(t)$$

$$\left(H_\alpha(t)=\exp(-\lambda_s T)\int_0^t\varphi_{l-1}(T-\tau)\lambda_\alpha(\xi_\alpha^1(T), v(\tau))d\tau\right)$$

а также набор $\Lambda_0 \in \Omega$, такой, что $1 - H_\alpha(T_1) \leqslant 0$ для всех $\alpha \in \Lambda_0$. Значит, существуют такие моменты $t_\alpha \leqslant T_1$, $\alpha \in \Lambda_0$, что

$$1-H_\alpha(t_\alpha)=0 \tag{3.5}$$

Для $i \notin \Lambda_0$ обозначим через t_i моменты времени, для которых выполняется равенство (3.5) и при этом $t_i \leqslant T_1$.

Зададим управления преследователей P_i, полагая

$$u_i(t)=v(t)-\lambda_i(\xi_i^1(T), v(t))\xi_i^1(T),\quad t\in[0,\min\{t_i,T_1\}]$$

$$u_i(t)=v(t),\quad t\in(\min\{t_i,T_1\},T]$$

Тогда для всех $\alpha \in \Lambda_0$

$$\exp(-\lambda_s T)z_\alpha(T)=\xi_\alpha^1(T)+\exp(-\lambda_s T)\int_0^T\varphi_{l-1}(T-\tau)(u_\alpha(\tau)-v(\tau))d\tau=$$

$= \xi_\alpha^1(T)(1 - H_\alpha(t_\alpha))$

Из (3.5) получаем, что $\exp(-\lambda_s T) z_\alpha(T) = 0$ для всех $\alpha \in \Lambda_0$. Отсюда следует, что $z_\alpha(T) = 0$ для всех $\alpha \in \Lambda_0$, и теорема в случае $r = 1$ доказана.

Пусть выполнено условие *б* теоремы. Тогда по теореме Боннебласта, Карлина, Шепли [12] существуют числа $\gamma_j \geqslant 0$, $\gamma_1 + \ldots + \gamma_r = 1$, такие, что

$$\inf_{v \in \operatorname{co} V_1} \sum_{j=1}^{r} \gamma_j((p_j, v) + b\mu_j) > 0$$

Полагая $p = \gamma_1 p_1 + \ldots + \gamma_r p_r$, $\mu = \gamma_1\mu_1 + \ldots + \gamma_r\mu_r$ $D_1 = \{y : y \in \mathbb{R}^k, (p, y) \leqslant \mu\}$, получаем, что

$$\inf_{v \in V} \max\left\{\max_{\Lambda \in \Omega} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(z_\alpha^0, v),\ (p, v) + b\mu\right\} > 0$$

Значит, разрешима задача о m-кратной поимке с фазовыми ограничениями D_1. Так как $D \subset D_1$, то будет разрешима и исходная задача о m-кратной поимке. Теорема доказана.

Следствие. Пусть для игры Г выполнены предположения 1–3, $\lambda_s < 0$, $V = D_1(0)$, $\mu_j = 0$, $j = 1, \ldots, r$, $n \geqslant m + k - 1$ и

$$0 \in \operatorname{Int} \bigcap_{\Lambda(n-m+1)} \operatorname{co}\left\{\bigcup_{i \in \Lambda(n-m+1)} z_i^0, p_1, \ldots, p_r\right\} \tag{3.6}$$

Тогда в игре Г происходит m-кратная поимка.

Лемма 7. Пусть для игры Г выполнены предположения 1–4, $\lambda_s = 0$, $\delta_0 > 0$, $r = 1$. Тогда существует момент T_0, такой, что для каждой допустимой функции $v(t)$ найдется множество $\Lambda \in \Omega$, такое, что

$$1 - \int_0^{T_0} \varphi_{l-1}(T_0 - \tau)\lambda_\alpha(\xi_\alpha(T_0) - M_\alpha, v(\tau))d\tau \leqslant 0 \quad \forall \alpha \in \Lambda$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.

Теорема 2. Пусть для игры Г выполнены предположения 1–4, $\lambda_s = 0$, $\delta_0 > 0$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) $r = 1$; б) $\min\limits_{v \in \operatorname{co} V_1} \max\limits_j (p_j, v) > 0$.

Тогда в игре Г происходит m-кратная поимка.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие. Пусть для игры Г выполнены предположения 1–3, $\lambda_s = 0$, $M_i = \{0\}$, $V = D_1(0)$, $n \geqslant k + m - 1$ и либо выполнено условие (3.6), либо D – многогранник.

Тогда в игре Г происходит m-кратная поимка.

4. Примеры. 1°. Законы движения преследователей P_i и убегающего E имеют вид

$$\dot{x}_i + ax_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V, \quad a > 0$$

$$\dot{y} + ay = v, \quad y(0) = y_0^0, \quad v \in V$$

Пусть $M_i = \{0\}$, $0 \in D$. В этом случае

$$z_i^0 = x_i^0 - y_0^0, \quad b = -a, \quad \varphi_0(t) = \exp(-at)$$

$$\lambda_i(z_i^0, v) = ((z_i^0, v) + [(z_i^0, v)^2 + \| z_i^0 \|^2 (1 - \| v \|^2)]^{1/2}) / \| z_i^0 \|^2$$

Пусть

$$\delta=\min_{v}\max\left\{\max_{\Lambda\in\Omega}\min_{i\in\Lambda}\lambda_i(z_i^0,v),\ \max_{j\in I}((p_j,v)-a\mu_j)\right\}$$

Утверждение 1. Пусть $\delta>0$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) $r=1$; б) $\min\limits_{v\in \operatorname{co}V_1}\max\limits_{j}((p_j,v)-a\mu_j)>0$.

Тогда в игре Г происходит m-кратная поимка

Утверждение 2. Пусть $V=D_1(0)$, $\mu_j=0, j=1,\ldots,r$, $n\geqslant k+m-1$ и выполнено условие (3.6). Тогда в игре Г происходит m-кратная поимка.

2°. Системы (1.1), (1.2) имеют вид

$$\begin{gathered}x_i^{(4)}+2x_i^{(3)}+\ddot{x}_i=u_i,\quad \|u_i\|\leqslant 1\\ x_i(0)=x_{i0}^0,\ \dot{x}_i(0)=x_{i1}^0,\ \ddot{x}_i(0)=x_{i2}^0,\ x_i^{(3)}(0)=x_{i3}^0\\ y^{(4)}+2y^{(3)}+\ddot{y}=v,\quad \|v\|\leqslant 1\\ y(0)=y_0^0,\ \dot{y}(0)=y_1^0,\ \ddot{y}(0)=y_2^0,\ y^3(0)=y_3^0\end{gathered}\tag{4.1}$$

В этом случае

$$\lambda_1=-1,\ k_1=2,\ \lambda_2=0,\ k_2=2,\ \varphi_0(t)=1,\ \varphi_1(t)=t$$

$$\varphi_2(t)=(3+t)\exp(-t)+(2t-3),\ \ \varphi_3(t)=(2+t)\exp(-t)+t-2$$

Полагаем

$$z_{iq}^0=x_{iq}^0-y_q^0,\quad z_i^0=\begin{cases}z_{i1}^0+2z_{i2}^0+z_{i3}^0, & z_{i1}^0+2z_{i2}^0+z_{i3}^0\neq 0\\ z_{i0}^0-3z_{i2}^0-2z_{i3}^0, & z_{i1}^0+2z_{i2}^0+z_{i3}^0=0\end{cases}$$

Считаем, что $z_i^0\neq 0$.

Утверждение. Пусть $n\geqslant k+m-1$, $M_i=\{0\}$ и выполнено условие (3.6).

Тогда в игре Г происходит m-кратная поимка.

3°. Системы (1.1), (1.2) имеют вид, отличающийся от (4.1) отсутствием второго слагаемого в левых частях уравнений движения преследователей и убегающего. В этом случае

$$\lambda_1=0,\ k_1=2,\ \nu_1=\pm i,\ m_1=1,\ \varphi_0(t)=1,\ \varphi_1(t)=t$$

$$\varphi_2(t)=1-\cos t,\ \varphi_3(t)=t-\sin t$$

Полагая $z_{iq}^0=x_{iq}^0-y_q^0$, получаем

$$\xi_i(t)=\varphi_0(t)z_{i0}^0+\varphi_1(t)z_{i1}^0+\varphi_2(t)z_{i2}^0+\varphi_3(t)z_{i3}^0=$$

$$=(z_{i0}^0+z_{i2}^0)+t(z_{i1}^0+z_{i3}^0)-(z_{i2}^0\cos t+z_{i3}^0\sin t)$$

Пусть $z_i^0=z_{i1}^0+z_{i3}^0\neq 0$, $M_i=\{0\}$.

Утверждение. Пусть $n\geqslant k+m-1$ и выполнено условие (3.6).

Тогда в игре Г происходит m-кратная поимка.

Работа выполнена по программе "Университеты России" (1.5.22) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00843а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С.* Избр. науч. труды. Т. 2. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 575 с.
2. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
3. *Чикрий А.А.* Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.

4. *Чикрий А.А.* Дифференциальная игра с несколькими преследователями // Матем. теория управления. Варшава, 1983. С. 81–107.
5. *Мезенцев А.В.* О некотором классе дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1971. № 6. С. 3–7.
6. *Петров Н.Н.* Простое преследование при наличии фазовых ограничений. Л., 1984. 16 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.84, № 1684–84.
7. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. *Петров Н.Н.* Одна задача группового преследования с фазовыми ограничениями // Нелинейные колебания и теория управления. Ижевск: Удмурт. ун-т, 1987. С. 24–33.
9. *Иванов Р.П.* Простое преследование – убегание на компакте // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1318–1321.
10. *Петров Н.Н.* Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 22–26.
11. *Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Изв. вузов. Математика. 1994. № 4. С. 24–29.
12. *Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.* Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974. 295 с.

Ижевск

Поступила в редакцию
20.II.1996