УДК 62.50

© 1997 г. А.Ф. Клейменов

О РЕШЕНИЯХ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Предлагается новый подход к построению решений в неантагонистической позиционной дифференциальной игре (НПДИ) двух лиц. Подход базируется на использовании принципа неухудшения гарантированных результатов [1, 2] игроков вдоль траекторий, порожденных решениями, на использовании правила экстремального сдвига [1, 2] в направлении оптимальных по Парето состояний, наилучших для одного и для другого игроков, и, наконец, на использовании равновесных решений в специальных вспомогательных биматричных играх. Предложено разбиение множества позиций в НПДИ. Рассмотрены НПДИ с различными типами поведения игроков. Работа продолжает исследования [3, 4].

1. Некоторые результаты из теории НПДИ [3]. Пусть динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t,x,u,v), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор; управления $u \in P \in \operatorname{comp} R^p$ и $v \in Q \in \operatorname{comp} R^q$ подчинены соответственно первому и второму игрокам. В пространстве переменных t, x задан компакт G, проекция которого на ось t равна заданному отрезку $[t_0, \vartheta]$, где ϑ – фиксированный момент окончания процесса; при этом все траектории системы (1.1), начинающиеся в произвольной позиции $(t_*, x_*) \in G$, остаются в G при всех $t \in (t_*, \vartheta]$. Предполагаем, что функция f: $G \times P \times Q \mapsto R^n$ непрерывна по совокупности аргументов, удовлетворяет условию Липшица по x, а также условию продолжимости всех траекторий системы (1.1) на отрезок $[t_0, \vartheta]$.

Предполагаем также для простоты, что вектограмма системы (1.1)

$$F(t,x) = \{s \in R^n : s = f(t,x,u,v), u \in P, v \in Q\} \tag{1.2}$$

выпукла в каждой точке $(t, x) \in G$. Это предположение обеспечивает замкнутость множества достижимости, порожденного измеримыми управлениями, относительно равномерной сходимости.

Предполагаем, что игрок с номером i стремится максимизировать терминальный показатель качества

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)), \quad i = 1,2 \tag{1.3}$$

где σ_i: $R^n \mapsto R^1$ – непрерывные функции.

Оба игрока имеют полную информацию о текущей позиции $(t, x(t))$ игры. Формализация стратегий игроков, а также движений, ими порожденных, производится в НПДИ так же, как и в теории антагонистических позиционных дифференциальных игр (АПДИ) [1, 2], за исключением технических деталей. Стратегия первого игрока отождествляется с парой $U \div \{u(t,x,\varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$, а стратегия второго игрока – с парой

$V \div \{v(t,x,\varepsilon),\beta_2(\varepsilon)\}$. Здесь u: $G\times(0,\infty)\mapsto P$ и v: $G\times(0,\infty)\mapsto Q$ – произвольные функции, а $\beta_i:(0,\infty)\mapsto(0,\infty)$ – непрерывные монотонные функции, удовлетворяющие условию $\beta_i \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. При фиксированном значении ε величина $\beta_i(\varepsilon)$ задает ограничение сверху на шаг разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$, используемого игроком i при построении ломаных Эйлера. Параметр ε называется параметром точности [2]. Пара стратегий (U, V) порождает движения двух типов: аппроксимационные движения (ломаные Эйлера) $x[\cdot,t_0,x_0,U,\varepsilon_1,\Delta_1,V,\varepsilon_2,\Delta_2]$ и идеальные (предельные) движения $x(\cdot,t_0,x_0,U,V)$. Аппроксимационные движения определяются при фиксированных разбиениях игроками отрезка $[t_0,\vartheta]$: $\Delta_1=\{t_i^1\}$ и $\Delta_2=\{t_j^2\}$ и при фиксированных значениях параметров точности игроков ε_1 и ε_2. Пара стратегий (U, V) порождает непустое компактное (в метрике пространства $C[t_0, \vartheta]$) множество предельных движений. Не ограничивая общности, далее рассматриваем только такие пары стратегий (U, V), которые порождают единственные предельные движения.

Проблема определения понятия решения – одна из центральных проблем теории НПДИ. Для того чтобы понятие решения было адекватным содержанию задачи, необходимо, чтобы при определении решения были учтены все ограничения, имеющиеся в игре. Это производилось [3] с помощью введения следующих дополнительных элементов игры:

1) описание множества игроков, которые могут отклоняться от решения, и множества разрешенных моментов отклонения для каждого игрока;

2) описание поведения игрока-неуклониста после уклонения игрока-уклониста;

3) дополнительные ограничения на допустимые наборы стратегий;

4) описание последовательности, в которой игроки осуществляют выбор наборов стратегий в качестве решения игры.

Ниже рассматриваем следующие дополнительные элементы игры:

1) каждый игрок может в одиночку отклониться от решения в любой момент времени $t \in [t_0, \vartheta)$;

2) игрок-неуклонист после уклонения игрока-уклониста может выбрать какую угодно стратегию, в том числе и наихудшую для уклониста;

3) рассматриваем два варианта: первый вариант, когда дополнительных ограничений нет, игру в этом варианте обозначим через НПДИ-1; второй вариант, когда накладывается условие "осторожности" игроков, заключающееся в том, что гарантированные выигрыши игроков не уменьшаются вдоль траектории; игру в этом варианте обозначим через НПДИ-2;

4) игроки осуществляют выбор наборов стратегий в качестве решений одновременно.

Рассмотрим вспомогательные АПДИ, обозначаемые далее через Γ_1 и Γ_2. В игре Γ_i i-й игрок максимизирует показатель $\sigma_i(x(\vartheta))$ (1.3), а $(3-i)$-й игрок ему противодействует. Предположим, что функция $f(t, x, u, v)$в правой части (1.1) удовлетворяет условию

$$\max_{u\in P}\min_{v\in Q} s^T f(t,x,u,v) = \min_{v\in Q}\max_{u\in P} s^T f(t,x,u,v) \tag{1.4}$$

при любом выборе $s \in R^n$ и $(t, x) \in G$. Равенство (1.4) было названо [1] условием седловой точки в маленькой игре. При выполнении этого условия игры Γ_1 и Γ_2 имеют универсальные седловые точки в классе чистых позиционных стратегий

$$\{u^{(i)}(t,x,\varepsilon),v^{(i)}(t,x,\varepsilon)\}, \quad i=1,2 \tag{1.5}$$

и функции цены

$$\gamma_1(t,x), \quad \gamma_2(t,x) \tag{1.6}$$

Универсальность стратегий (1.5) означает, что они пригодны не только для исходной начальной позиции (t_0, x_0), но и для любой позиции $(t, x) \in G$, принимаемой в качестве начальной. Величина $\gamma_i(t, x)$ для позиции (t, x) представляет собой гарантированный выигрыш i-го игрока при любых действиях его партнера.

*Определение*1. Набор стратегий (U, V) назовем допустимым в НПДИ, если ни одному игроку невыгодно отклоняться от этого набора ни в один из разрешенных моментов отклонения.

В определении *1* отклонение игрока считается выгодным, если в результате отклонения он получает больший гарантированный выигрыш, чем в игре без отклонений.

Очевидно, что если набор стратегий не является допустимым, то он не может быть выбран в качестве решения игры. Обозначим через D непустое множество допустимых наборов стратегий. Далее обозначим через D^* подмножество множества D, состоящее из допустимых наборов стратегий, удовлетворяющих дополнительным ограничениям *3*. Ясно, что для игры НПДИ-1 имеет место равенство $D^* = D$, а для игры НПДИ-2 подмножество D^* содержит только те допустимые наборы стратегий, которые порождают траектории с монотонным неубыванием функций $\gamma_1(t, x(t))$ и $\gamma_2(t, x(t))$ вдоль них.

Определение 2. Решением НПДИ назовем любой элемент множества D^*, неулучшаемый по Парето относительно показателей I_1 и I_2 (1.3).

Введенное решение назовем P-решением. В общем случае P-решений бесконечно много. Среди них можно выделить решение, наилучшее для первого игрока (его назовем H_1-решением) и решение, наилучшее для второго игрока (его назовем H_2-решением). H_1- и H_2-решений может быть также не одно.

В общем случае P-решения и, в частности, H_1- и H_2-решения имеют следующую структуру:

$$u(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} u^*(t) & \text{при} \quad \|x - x^*(t)\| \leqslant \varepsilon\varphi(t) \\ u^2(t, x, \varepsilon) & \text{при} \quad \|x - x^*(t)\| > \varepsilon\varphi(t) \end{cases}$$

$$v(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} v^*(t) & \text{при} \quad \|x - x^*(t)\| \leqslant \varepsilon\varphi(t) \\ v^2(t, x, \varepsilon) & \text{при} \quad \|x - x^*(t)\| > \varepsilon\varphi(t) \end{cases} \tag{1.7}$$

причем $v^1(\cdot)$, $u^2(\cdot)$ определены в (1.5), функции $u^*(t)$ и $v^*(t)$ – решения некоторых нестандартных задач программного оптимального управления, функции $\varphi(t)$, $\beta_1(\varepsilon)$ и $\beta_2(\varepsilon)$ согласованы между собой.

2. Разбиение множества позиций в НПДИ. Введем следующие определения.

Определение 3. Позицию $(t_*, x_*) \in G$ назовем неантагонистической (НА-позицией), если существует траектория системы (1.1) $x(t), t_* \leqslant t \leqslant \vartheta, x(t_*) = x_*$, такая, что функции $\gamma_i(t, x(t))$ $(i = 1, 2)$ (1.6) не убывают на $[t_*, \vartheta]$ и по крайней мере для одного j выполняется строгое неравенство

$$\gamma_j(\vartheta, x(\vartheta)) > \gamma_j(t_*, x_*) \tag{2.1}$$

Содержательно определение 3 означает, что из НА-позиций возможно движение по траекториям, вдоль которых гарантированные выигрыши игроков не убывают, причем хотя бы для одного игрока этот выигрыш в конце траектории строго больше, чем в начальной НА-позиции. Такие траектории назовем НА-траекториями. Для НА-позиции существует, вообще говоря, бесконечно много НА-траекторий.

Определение 4. Позицию $(t_*, x_*) \in G$ назовем локально-антагонистической (ЛА-позицией), если она не является неантагонистической и, кроме того, существует траектория системы (1.1) $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, $x(t_*) = x_*$, вдоль которой выполнены неравенства

$$\gamma_i(\vartheta, x(\vartheta)) \geqslant \gamma_i(t, x(t))), \quad t_* \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad i=1,2 \tag{2.2}$$

причем при $t = t_*$ по крайней мере одно из неравенств (2.2) – строгое.

Траектории из определения 4 назовем ЛА-траекториями. Для ЛА-позиции существует, вообще говоря, бесконечно много ЛА-траекторий. Неравенства (2.2) означают, что точка $t = \vartheta$ является точкой максимума обеих функций $\gamma_1(t, x)$ и $\gamma_2(t, x)$, вычисленных вдоль ЛА-траектории. Поэтому в конце ЛА-траектории выигрыши обоих игроков будут не меньше, чем в начальной ЛА-позиции, причем хотя бы для одного игрока этот выигрыш будет строго большим.

Определение 5. Позицию $(t_*, x_*) \in G$ назовем глобально-антагонистической (ГА-позицией), если для любой траектории системы (1.1) $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, $x(t_*) = x_*$ либо имеют место равенства

$$\gamma_i(\vartheta, x(\vartheta)) = \gamma_i(t_*, x_*), \quad i=1,2 \tag{2.3}$$

либо по крайней мере для одного j выполнено неравенство

$$\gamma_j(\vartheta, x(\vartheta)) < \gamma_j(\tau, x(\tau)) \tag{2.4}$$

для некоторого $\tau \in [t_*, \vartheta)$.

Очевидно, для ГА-позиции всегда существует по крайней мере одна траектория, вдоль которой

$$\gamma_i(t, x(t)) \equiv \gamma_i(t_*, x_*), \quad t_* \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad i=1,2 \tag{2.5}$$

Такую траекторию назовем ГА-траекторией. В общем случае ГА-траекторий может быть бесконечно много. Все они находятся на поверхностях уровня функций $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_2(t,x)$ одновременно. Попутно заметим, что в ГА-позициях игроки достигают оптимальных по Парето выигрышей.

Траектории, удовлетворяющие неравенству (2.4), невыгодны для j-го игрока, а поэтому не могут быть реализованы в игре.

Нетрудно видеть, что для ЛА-позиций помимо ЛА-траекторий существуют также ГА-траектории, а для НА-позиций помимо НА-траекторий существуют ЛА- и ГА-траектории.

Таким образом, получено разбиение множества G всех позиций в НПДИ на три подмножества: подмножество G_1 всех НА-позиций, подмножество G_2 всех ЛА-позиций и подмножество G_3 всех ГА-позиций.

Теорема 1. Если в игре НПДИ-1 начальная позиция является НП-позицией, то P-решение игры порождает либо НА-траекторию либо ЛА-траекторию. Если начальная позиция является ЛА-позицией (ГА-позицией), то P-решение игры порождает ЛА-траекторию (ГА-траекторию).

Теорема 2. Если в игре НПДИ-2 начальная позиция является НА-позицией (ЛА-позицией или ГА-позицией), то P-решение игры порождает НА-траекторию (ГА-траекторию).

Доказательство теорем 1, 2 опирается на теоремы 1.4, 1.9 из [3] и на вышеприведенные определения.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Динамика системы описывается уравнением

$$\dot{x} = (\vartheta - t)(u + v), \quad x, u, v \in R^2, \quad \|u\| \leqslant 1, \|v\| \leqslant 1 \tag{2.6}$$

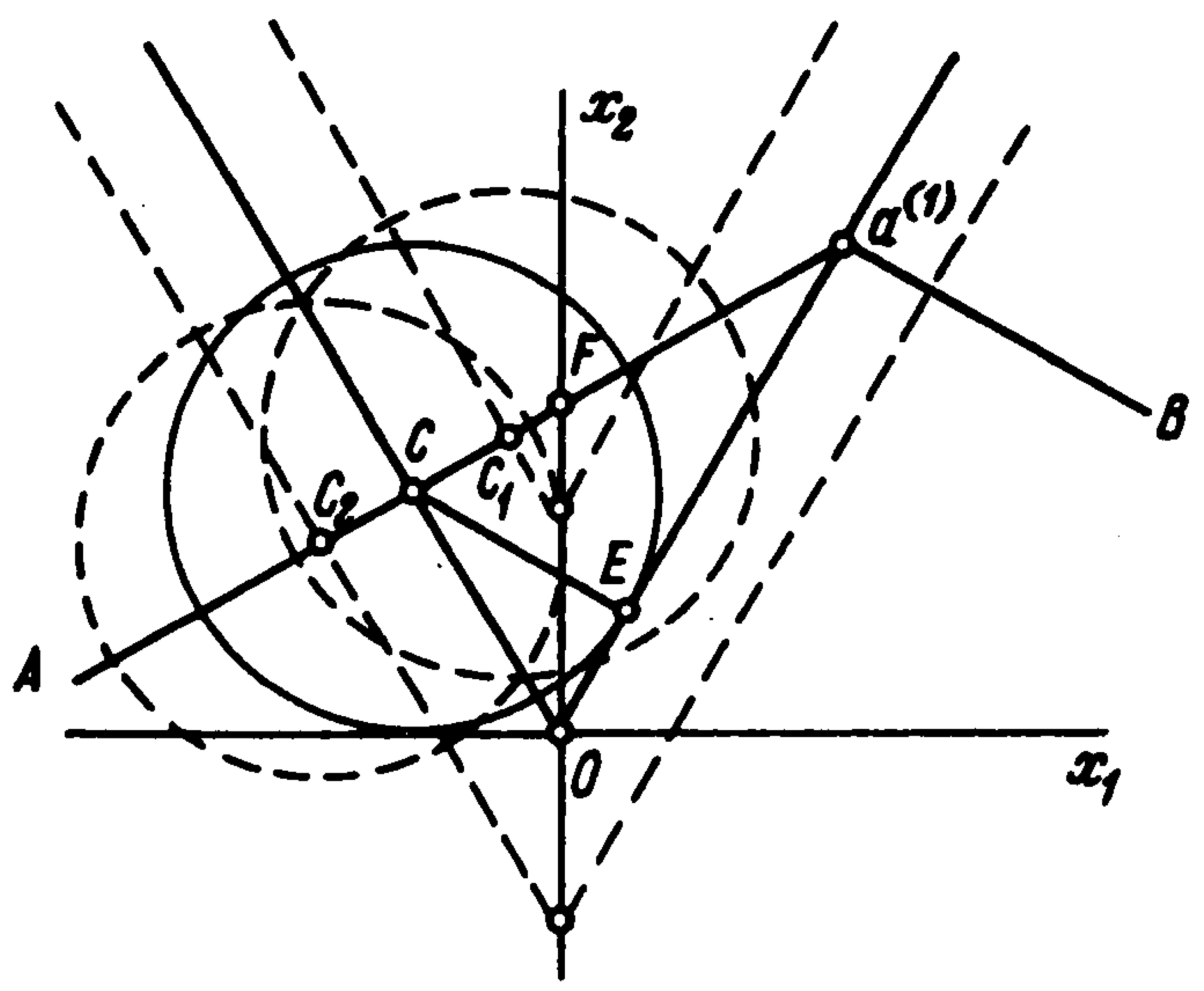
а показатели игроков (1.3) имеют вид

$$\sigma_i(x(\vartheta)) = -\|x(\vartheta) - a^{(i)}\|, \quad i=1,2 \tag{2.7}$$

где $a^{(i)}$ – заданные точки в R^2.

К этой задаче сводится игровая задача о плоском движении материальной точки с двумя целевыми точками ([3], п. 1.13, пример 3).

Можно показать, что в данной игре множество G_3 ГА-позиций состоит из всех тех точек $(t, x) \in G$, для которых x принадлежит отрезку, соединяющему целевые точки $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$. Множество G_1 НА-позиций составляют все остальные позиции $(t, x) \in G$. Множество G_2 ЛА-позиций в данном примере пусто.



Пример 2. Динамика системы описывается уравнением

$$\dot{x} = u + v, \quad x, u, v \in R^2, \quad \|u\| \leq 1, \; \|v\| \leq 1 \tag{2.8}$$

а показатели игроков (1.3) имеют вид

$$\sigma_1(x(\vartheta)) = -\|x(\vartheta) - a^{(1)}\|, \quad \sigma_1(x(\vartheta)) = \sqrt{3}\,|x_1(\vartheta)| - x_2(\vartheta) \tag{2.9}$$

Эта игровая задача также рассматривалась ранее ([3], п. 1.13, пример 1) и было установлено, что функции цены (1.6) имеют вид

$$\gamma_1(t, x) = -\|x - a^{(1)}\|, \quad \gamma_2(t, x) = \sqrt{3}\,|x_1| - x_2 \tag{2.10}$$

Зададим $a^{(1)} = (1, \sqrt{3})$ (фигура). Линия уровня функции $\gamma_2(t, x)$ (2.10), проходящая через точку $a^{(1)}$, есть объединение лучей OC и $Oa^{(1)}$. Проведем $Ca^{(1)} \perp OC$ и $CE \perp Oa^{(1)}$. Имеем $|CE| = \sqrt{3}/2$. Обозначая через G^t сечение множества G гиперплоскостью t = const, далее ограничимся описанием разбиения множества G^t на подмножества G_1^t, G_2^t, G_3^t при $t = \vartheta - \sqrt{3}/4$.

Для точки C как для начальной и для начального момента времени $t = \vartheta - \sqrt{3}/4$ множеством достижимости системы (2.8) в момент ϑ будет круг радиуса $\sqrt{3}/2$, граница которого касается прямой $Oa^{(1)}$ в точке E (фигура). При этом отрезок CE задает единственную ЛА-траекторию, а НА-траекторий для этой позиции не существует. Это означает, что точка C принадлежит множеству G_2^t при $t = \vartheta - \sqrt{3}/4$. Аналогичные рассуждения показывают, что точка C_1 (равно как и другие точки отрезка CF, исключая точку F) принадлежит множеству G_2^t ЛА-позиций при $t = \vartheta - \sqrt{3}/4$. В то же время точка C_2 (равно как и другие точки луча CA, исключая точку C) будут принадлежать множеству G_3^t ГА-позиций; то же самое можно сказать и о точках луча $a^{(1)}B$, включая точку $a^{(1)}$. Все остальные позиции из G^t принадлежат множеству G_1^t НА-позиций при $t = \vartheta - \sqrt{3}/4$.

3. Одна процедура последовательного сужения множества *P*-решений. Рассматриваем игру НПДИ-2. Пусть динамика игры описывается уравнением с "разделенной" правой частью, т.е.

$$\dot{x} = f(t, x, u) + g(t, x, v), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.1}$$

где на функции f и g наложены ограничения, аналогичные ограничениям на функцию f из разд. 1.

Определим функции $\rho_1^0 : G \mapsto R^1$ и $\rho_2^0 : G \mapsto R^1$, полагая, что $\rho_i^0(t, x)$ – значение функционала (1.3) игрока i на H_i-решении, если позиция (t, x) принимается за начальную.

Обозначим через S^0 множество векторов выигрыша игроков (I_1, I_2) (1.3), которые достигаются на P-решениях игры.

Опишем теперь процедуру $L(S^0, \rho_1^0(\cdot), \rho_2^0(\cdot))$, позволяющую далее по имеющемуся множеству S^0 и функциям $\rho_1^0(t,x)$ и $\rho_2^0(t,x)$, $(t,x) \in G$ построить множество $S^1 \subseteq S^0$ и определить функции $\rho_1^1(t,x)$ и $\rho_2^1(t,x)$, $(t,x) \in G$.

Пусть задана позиция $(t,x) \in G$. Этой позиции как начальной соответствуют H_1-решение и H_2-решение (причем их может быть не одно). Обозначим через $w^1(\sigma)$, $t \leqslant \sigma \leqslant \vartheta$ и $w^2(\sigma)$, $t \leqslant \sigma \leqslant \vartheta$ траектории, порожденные H_1-решением и H_2-решением соответственно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и обозначим $\tau(t,\varepsilon) = \min\{t+\varepsilon, \vartheta\}$. Рассмотрим векторы

$$s_1^0(t,x,\varepsilon) = w^1(\tau(t,\varepsilon)) - x, \quad s_2^0(t,x,\varepsilon) = w^2(\tau(t,\varepsilon)) - x \tag{3.2}$$

Определим векторы $u_1^0(t,x,\varepsilon)$, $v_1^0(t,x,\varepsilon)$, $u_2^0(t,x,\varepsilon)$ и $v_2^0(t,x,\varepsilon)$ из условий

$$\begin{aligned} \max_{u\in P,\, v\in Q} s_1^{0T}[f(t,x,u)+g(t,x,v)] &= s_1^{0T}[f(t,x,u_1^0)+g(t,x,v_1^0)] \\ \max_{u\in P,\, v\in Q} s_2^{0T}[f(t,x,u)+g(t,x,v)] &= s_2^{0T}[f(t,x,u_2^0)+g(t,x,v_2^0)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Теперь сконструируем вспомогательную биматричную 2×2 игру (A,B), в которой первый игрок имеет две стратегии: «выбрать u_1^0» и «выбрать u_2^0». Аналогично, второй игрок имеет две стратегии: «выбрать v_1^0» и «выбрать v_2^0». Матрицы выигрышей игроков определим следующим образом

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

$$a_{ij} = \rho_1^0(\tau(t,\varepsilon), x + f(t,x,u_i^0, v_j^0)\tau(t,\varepsilon))$$

$$b_{ij} = \rho_2^0(\tau(t,\varepsilon), x + f(t,x,u_i^0, v_j^0)\tau(t,\varepsilon)), \quad i,j = 1,2$$

Очевидно, что $a_{11} \geqslant a_{21}$ и $b_{22} \geqslant b_{21}$, что дает возможность исключить ситуацию (2.1) из рассмотрения при нахождении нэшевских равновесий в игре (A,B). Легко показывается, что биматричная игра (A,B) имеет по крайней мере доно нэшевское равновесие в чистых стратегиях.

В качестве управлений $\tilde{u}(t,x,\varepsilon)$ и $\tilde{v}(t,x,\varepsilon)$, используемых игроками в позиции (t,x) при заданном ε, выбираем управления (u_i, v_j), доставляющие нэшевское равновесие. Возможны четыре случая.

1°. Ситуация (1.2) доставляет единственное нэшевское равновесие. Тогда пара $u_1^0(t,x,\varepsilon), v_2^0(t,x,\varepsilon)$ задает управления игроков.

2°. Ситуация (1,1) доставляет единственное нэшевское равновесие. Тогда пара $u_1^0(t,x,\varepsilon)$, $v_1^0(t,x,\varepsilon)$ задает управления игроков.

3°. Ситуация (2.2) доставляет единственное нэшевское равновесие. Тогда пара $u_2^0(t,x,\varepsilon)$, $v_2^0(t,x,\varepsilon)$ задает управления игроков.

4°. Ситуации (1,1) и (2,2) доставляют два нэшевских равновесия. Тогда выбираем пары управлений $(u_1^0(t,x,\varepsilon), v_1^0(t,x,\varepsilon))$ и $(u_2^0(t,x,\varepsilon), v_2^0(t,x,\varepsilon))$ с равной частотой.

Таким образом, стратегии $\tilde{u}(t,x,\varepsilon)$ и $\tilde{v}(t,x,\varepsilon)$ определены при $(t,x) \in G$, $\varepsilon > 0$. В силу неединственности H_1- и H_2-решений описанный алгоритм задает многозначные функции – стратегии $\tilde{u}(t,x,\varepsilon)$ и $\tilde{v}(t,x,\varepsilon)$. Поэтому при нахождении движений приходим к дифференциальному уравнению с многозначной правой частью. Как и в [1, 2], можно построить аппроксимационные движения и предельные движения этого уравнения.

Обозначим через I^* множество векторов выигрышей игроков (I_1, I_2) (1.3), достигаемых на множестве предельных движений этого уравнения. Через S^1 обозначим подмножество элементов из S^0, таких, что для каждого $s \in S^1$ найдется $\xi \in I^*$, для которого имеет место неравенство $s \geqslant \xi$. Очевидно, S^1 – компакт. Определим функции $\rho_1^1(t,x)$ и $\rho_2^1(t,x)$, принимая за $\rho_i^1(t,x)$ значение максимального выигрыша i-го игрока на множестве S^1.

Таким образом, процедура $L(S^0, \rho_1^0(\cdot), \rho_2^0(\cdot))$ позволила построить множество $S^1 \subseteq S^0$ и определить функции $\rho_1^1(t,x)$ и $\rho_2^1(t,x)$, $(t,x) \in G$.

Применяя процедуру $L(S^1, \rho_1^1(\cdot), \rho_2^1(\cdot))$, находим множество $S^2 \subseteq S^1$ и функции $\rho_1^2(t,x)$ и $\rho_2^2(t,x)$, $(t,x) \in G$ и т.д. Переходя к пределу, получаем непустое множество S^∞, которое, в частности, может состоять из одной точки.

Определение 6. Решением игры НПДИ-2 называем любой набор стратегий игроков, на котором выигрыши игроков принадлежат множеству S^∞.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример 1 из разд. 2. Уравнение движения и ограничения на управления заданы в (2.6), а показатели игроков – в (2.7).

Пусть $x(t_0) = 0$, $t_0 = 0$, $\vartheta = 2$, а целевые точки $a^{(1)} = (5, 2)$, $a^{(2)} = (5, -2)$. Результаты расчетов показывают, что множество S^∞ состоит из единственной точки (4, 0). Единственная предельная траектория, приводящая на это множество, будет $x_1^*(t) = -t^2 + 4t$, $x_2^*(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2$. Разрешающая стратегия имеет структуру (1.7), где $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$, $v^*(t) = (v_1^*(t), v_2^*(t))$, $u_1^*(t) \equiv v_1^*(t) \equiv 1$, $u_2^*(t) \equiv v_2^*(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

4. Формализация различных типов поведения игроков в НПДИ. Выше при определении понятия решения ориентировались на естественный, нормальный тип поведения игроков, при котором каждый игрок стремился максимизировать свой функционал выигрыша. В то же время в реальности нередко встречаются другие типы поведения, такие же: альтруизм (чем лучше партнеру, тем лучше мне), враждебность (чем хуже партнеру, тем лучше мне), мазохизм (парадоксальность) (чем хуже мне, тем лучше мне). Крайние проявления этих типов поведения могут быть формализованы в рамках рассматриваемой модели.

Определение 7. Скажем, что первый игрок придерживается в текущей позиции *альтруистического* (*враждебного*) типа поведения, если его действия в этой позиции направлены исключительно на максимизацию (минимизацию) выигрыша второго игрока I_2 (1.3).

Определение 8. Скажем, что первый игрок придерживается в текущей позиции *парадоксального* типа поведения, если его действия в этой позиции направлены исключительно на минимизацию собственного выигрыша I_1 (1.3).

Если же действия первого игрока направлены на максимизацию собственного функционала выигрыша I_1 (как ему и предписывается в исходной постановке), то будем говорить, что он придерживается *нормального* типа поведения.

Аналогичные типы поведения имеются и у второго игрока.

Заметим, что враждебный тип поведения игроков фактически использовался выше в форме "стратегий наказания", входящих в структуру решений игры (1.7).

В рассматриваемой НПДИ имеется 16 различных пар типов поведения игроков, причем 4 из них соответствуют антагонистическим интересам игроков, 4 – совпадающим интересам и остальные 8 – неантагонистическим по существу интересам.

Заметим, что различные типы поведения игроков могут "смешиваться". Далее, по ходу игры эти "смеси" могут меняться в зависимости от имеющейся у игроков информации. Следует, однако, подчеркнуть, что каких бы типов поведения игроки ни придерживались по ходу игры, окончательные выигрыши игроков "измеряются" величинами $\sigma_1(x(\vartheta))$ и $\sigma_2(x(\vartheta))$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00310).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
3. *Клейменов А.Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 185 с.
4. *Kleimenov A.F.* An approach to defining solution concept in N-person nonantagonistic positional differential games // Game Theory and Applications, II, N.Y.: Nova Sci. Publ. 1996. N.Y. P. 17–26.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
26.XII. 1996