УДК 62.50

© 1997 г. Э.Г. Альбрехт, С.Б. Миронова

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ОДНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

Рассматривается задача об оптимальной стабилизации [1, 2] нелинейных управляемых систем в критическом случае одного нулевого корня [3–5], когда правые части уравнений возмущенного движения и подынтегральная функция в критерии качества являются аналитическими относительно фазовых координат и управляющих воздействий. Предполагается, что правая часть критического уравнения умножена на критическую переменную и ее разложение начинается с членов второго порядка. Устанавливаются достаточные условия разрешимости задачи, когда разложение подынтегральной функции в критерии качества по степеням фазовых координат и управляющих воздействий начинается с определенно-положительной квадратичной формы, и показывается, что оптимальное управление – негладкая функция критической переменной и имеет вид допустимого управления, предложенного [5] при построении стабилизирующих воздействий в критическом случае одного нулевого корня. Обосновывается сходящаяся при достаточно малых начальных возмущениях по некритическим переменным итерационная процедура вычисления оптимального управления и оптимальной функции Ляпунова, опирающаяся на полученные ранее результаты [1, 2, 6, 7]. На основе методов теории возмущений [8] строится асимптотическое разложение оптимального результата по степеням критической переменной и указываются оценки точности приближений.

1. Постановка задачи. Пусть динамика переходного процесса в управляемой системе описывается уравнениями возмущенного движения

$$\dot z = \alpha z^2 + \beta zu + z\mathbf{q}'\mathbf{y} = Z^{(2)}(z,\ \mathbf{y},\ u), \quad \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + \mathbf{p}z \tag{1.1}$$

где $z \in R$, $\mathbf{y} \in R^n$ – фазовые координаты, $u \in R$ – управляющая сила, $A \in R^{nn}$ – постоянная матрица, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in R^n$ – постоянные векторы, штрих означает транспонирование.

Качество переходного процесса оценивается функционалом

$$J[u] = \int_0^\infty (\mathbf{y}'R\mathbf{y} + z^2 + u^2)dt \tag{1.2}$$

Для упрощения выкладок и сокращения объема статьи в (1.1) и (1.2) предполагается, что управляющая сила u является скалярной величиной и опущены нелинейные члены более высокого порядка относительно фазовых координат z, $\mathbf{y}$ и управления u, поскольку при условии, что правая часть критического уравнения умножена на критическую переменную и ее разложение начинается с членов второго порядка, существо дальнейших рассуждений не изменяется и сохраняются основные особенности изучаемой задачи.

Задача 1.1 Найти оптимальное управление $u^0(z, \mathbf{y})$, стабилизирующее [1, 2] систему (1.1) до асимптотической устойчивости по Ляпунову [3] и минимизирующее показатель качества (1.2).

Будем полагать, что выполнены следующие условия.

Условие 1.1 Матрица R определенно-положительна.

Условие 1.2 Векторы $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, ..., A^{n-1}\mathbf{b}$ линейно независимы.

Было дано [5] определение критических случаев [3, 4] стабилизации, указаны условия стабилизируемости в критическом случае одного нулевого корня и предложены методы построения стабилизирующих воздействий.

В настоящей статье впервые рассматривается задача 1.1 об оптимальной стабилизации [1, 2] в критическом случае одного нулевого корня. Эта задача обладает рядом особенностей, не характерных для проблемы оптимальной стабилизации нелинейных систем [2, 6], что существенно затрудняет ее решение. Поэтому предлагается процедура ее решения в частном случае, когда правая часть критического уравнения оказывается умноженной на критическую переменную. Цель работы – обосновать итерационную процедуру вычисления оптимального управления и оптимальной функции Ляпунова, сходящуюся при достаточно малых начальных возмущениях. При условиях 1.1 и 1.2 дается представление оптимального управления в виде отрезка расходящегося ряда по степеням критической переменной и указывается асимптотическая оценка точности приближения.

2. Оптимальная стабилизация системы первого порядка в частном случае. Рассмотрим вспомогательную задачу 1.1 об оптимальной стабилизации системы первого порядка, когда уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{z} = \alpha z^2 + \beta uz + \gamma u^2 = Z^{(2)}(z,\ u) \tag{2.1}$$

Пусть показатель качества управления описывается функционалом

$$J[u] = \int\limits_0^\infty (z^2 + \rho zu + \lambda u^2)dt \tag{2.2}$$

и выполняются следующие условия.

Условие 2.1 Квадратный трехчлен $\alpha z^2 + \beta zu + \gamma u^2$ как функция переменной u имеет различные действительные корни, т.е. $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

Условие 2.2 Подынтегральная функция в (2.2) определенно-положительна, т.е. $\lambda - \rho^2/4 > 0$.

В случае (2.1), (2.2) уравнение Гамильтона – Якоби для задачи 1.1 ([2], с. 484–488) имеет вид

$$az^2 g + u^0 z(\beta g + \rho) + u^{0^2}(\gamma g + \lambda) + z^2 = 0 \tag{2.3}$$

где $dv\ /\ dt = g$.

Из необходимого условия экстремума по u левой части равенства (2.3) вычисляем оптимальное управление

$$u^0(z) = -\tfrac{1}{2}(\beta g + \rho)(\gamma g + \lambda)^{-1} z \tag{2.4}$$

При условиях 2.1, 2.2 решение g уравнения (2.3) при управлении (2.4) удовлетворяет неравенству

$$\gamma g + \lambda > 0 \tag{2.5}$$

Это утверждение докажем от противного. Предположим сначала, что при некотором $\gamma \neq 0$

$$\gamma g + \lambda = 0 \tag{2.6}$$

Тогда необходимое условие экстремума левой части равенства (2.3) примет вид $\beta g + \rho = 0$. Поэтому $g = -\lambda\gamma^{-1}$, $\beta = \rho\gamma\lambda^{-1}$. В таком случае основное уравнение (2.3) запишется в виде $(\alpha g + 1)z^2 = 0$. Следовательно, $\alpha = \gamma\lambda^{-1} \neq 0$ и условие 2.1 запишется в форме неравенства

$$(\gamma^2/\lambda^2)(\rho^2 - 4\lambda) > 0$$

что противоречит условию 2.2. Следовательно, равенство (2.6) невозможно.

Аналогичным образом можно проверить, что невозможен и случай, когда уравнения (2.3), (2.4) имеют решение, которое при некотором $\gamma \neq 0$ удовлетворяет неравенству $\gamma g + \lambda < 0$. Увеличив положительную величину λ так, чтобы это неравенство перешло в равенство (2.6), получим уже исследованную ситуацию для измененного функционала. Так как при любом увеличении значения λ подынтегральная функция в (2.2) остается определенно-положительной, приходим к заключению, что и этот случай невозможен. Это означает, что всегда при выполнении условий 2.1, 2.2 уравнения (2.3), (2.4) имеют решение, которое при любом γ удовлетворяет неравенству (2.5).

Таким образом, управление $u^0(z)$ (2.4) является оптимальным и для его вычисления надлежит найти величину g из уравнения

$$\alpha g - \tfrac{1}{4}(\beta g + \rho)^2(\gamma g + \lambda)^{-1} + 1 = 0$$

Отсюда следует, что $g \equiv \text{const}$. Относительно неизвестной g получаем квадратное уравнение, которое при условиях 2.1, 2.2 имеет два различных действительных корня:

$$g_{1,2} = -\frac{(2\beta\rho - 4\alpha\lambda - 4\gamma) \mp \sqrt{\Delta}}{2(\beta^2 - 4\alpha\gamma)} \quad (g_1 > 0,\ g_2 < 0) \tag{2.7}$$

$$\Delta = (2\beta\rho - 4\alpha\lambda - 4\gamma)^2 + 16(\beta^2 - 4\alpha\gamma)(\lambda - \rho^2/4)$$

Оптимальное управление (2.4) имеет вид $u^0(z) = qz$, величина q принимает два значения:

$$q_k = -\tfrac{1}{2}(\beta g_k + \rho)(\gamma g_k + \lambda)^{-1}, \quad k = 1,\ 2 \tag{2.8}$$

По построению из уравнения (2.3) следует

$$\operatorname{sign}\frac{dv}{dz} = -\operatorname{sign} Z^{(2)}(z,\ u^0(z))$$

Учитывая условия асимптотической устойчивости тривиального решения оптимальной системы

$$\dot z = Z^{(2)}(z,\ u^0(z)) \tag{2.9}$$

приходим к следующему выводу.

Теорема 2.1 Пусть уравнение возмущенного движения имеет вид (2.1), качество переходного процесса оценивается функционалом (2.2), выполняются условия 2.1, 2.2. Тогда задача 1.1 имеет единственное решение, причем оптимальное управление $u^0(z)$ и оптимальная функция Ляпунова $V^0(z)$ определяются равенствами

$$u^0(z) = \begin{cases} q_1 z, & z \geqslant 0 \\ q_2 z, & z \leqslant 0 \end{cases}, \quad V^0(z) = \begin{cases} g_1 z, & z \geqslant 0 \\ g_2 z, & z \leqslant 0 \end{cases}$$

Оптимальная система управления (2.9) имеет вид

$$\dot z = \alpha z^2, \quad \alpha = \begin{cases} \alpha_1, & z \geqslant 0 \\ \alpha_2, & z \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\alpha_k = \alpha + q_k\beta + q_k^2\gamma, \quad k = 1,\ 2$$

Коэффициенты g_1, g_2, q_1, q_2 вычислются по формулам (2.7), (2.8).

3. Оптимальная стабилизация системы произвольного порядка. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу об оптимальной стабилизации линейной системы

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + bu$$

когда качество переходного процесса оценивается функционалом

$$J[u]=\int_0^{\infty}(\mathbf{y}'R\mathbf{y}+u^2(\mathbf{y}))dt$$

Известно [7], что при выполнении условий 1.1 и 1.2 эта задача имеет единственное решение, причем оптимальная функция Ляпунова является квадратичной формой $V^0(\mathbf{y}) = V^{(2)}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'Q\mathbf{y}$, оптимальное управление является линейной формой $u^0(\mathbf{y}) = u^{(1)}(\mathbf{y}) = \mathbf{c}'\mathbf{y}$, $\mathbf{c} = -Q\mathbf{b}$. Следовательно, асимптотически устойчива оптимальная система первого приближения $\dot{\mathbf{y}} = (A+\mathbf{bc}')\mathbf{y} = P\mathbf{y}$, где $P = A+\mathbf{bc}'$.

Для обоснования процедуры вычисления решения задачи 1.1 найдем условия стабилизируемости системы (1.1). Для этого вычислим решение $\mathbf{y}^0(z)$ относительно переменной $\mathbf{y}$ следующей системы алгебраических уравнений

$$P\mathbf{y}+\mathbf{b}v^{(1)}(z)+\mathbf{p}z=0$$

Имеем

$$\mathbf{y}^0(z)=-P^{-1}(\mathbf{b}v^{(1)}(z)+\mathbf{p}z)$$

В соответствии с теорией Ляпунова [3] введем в рассмотрение функцию

$$Z^{(20)}(z,\ v^{(1)}(z))=Z^{(2)}(z,\ \mathbf{y}^0(z),\ \ u^{(1)}(\mathbf{y}^0(z))+v^{(1)}(z))=\zeta z^2+\eta z v^{(1)}(z) \tag{3.1}$$

$$\zeta=\alpha+\beta\mathbf{b}'QP^{-1}\mathbf{p}-\mathbf{q}'P^{-1}\mathbf{p},\quad \eta=\beta\mathbf{b}'QP^{-1}\mathbf{b}+\beta-\mathbf{q}'P^{-1}\mathbf{b}$$

Очевидно, что система (1.1) стабилизируема управлением $u^{()}(\mathbf{y})+\nu^{()}(z)$ тогда и только тогда, когда величина η в (3.1) отлична от нуля.

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(z, \mathbf{y})$ и оптимальное управление $u^0(z, \mathbf{y})$, разрешающие задачу 1.1, будем искать в виде

$$V^0(z,\mathbf{y})=\mu z+\mathbf{y}'Q\mathbf{y}+z\mathbf{d}'\mathbf{y}+W(z,\mathbf{y}) \tag{3.2}$$

$$u^0(z,\mathbf{y})=u^1(\mathbf{y})+v^{(1)}(z)+u_1(z,\mathbf{y}) \tag{3.3}$$

Здесь $W(z, \mathbf{y})$ и $u_1(z, \mathbf{y})$ – члены более высокого порядка малости. Учитывая, что оптимальное управление определяется равенством

$$u^0(z,\mathbf{y})=-\tfrac{1}{2}[(\mu\beta+\mathbf{d}'\mathbf{b})z+2\mathbf{b}'Q\mathbf{y}+\beta z\mathbf{d}'\mathbf{y}+\beta zW_z+\mathbf{b}'\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{-}] \tag{3.4}$$

$$W_z=\partial W(z,\mathbf{y})/\partial z,\quad \mathbf{W}_{\mathbf{y}}=\partial W(z,\mathbf{y})/\partial\mathbf{y}$$

получим для вычисления функции $V^0(z, \mathbf{y})$ уравнение

$$(\alpha z^2+z\mathbf{q}'\mathbf{y})(\mu+\mathbf{d}'\mathbf{y}+W_z)+(\mathbf{W}_{\mathbf{y}})'(A\mathbf{y}+\mathbf{p}z)+(A\mathbf{y}+\mathbf{p}z)'Q\mathbf{y}+\mathbf{y}'Q(A\mathbf{y}+\mathbf{p}z)+$$

$$+z\mathbf{d}'(A\mathbf{y}+\mathbf{p}z)+\mathbf{y}'R\mathbf{y}+z^2-\tfrac{1}{4}[(\mu\beta+\mathbf{d}'\mathbf{b})z+2\mathbf{b}'Q\mathbf{y}+\beta z\mathbf{d}'\mathbf{y}+\beta zW_z+\mathbf{b}'\mathbf{W}_{\mathbf{y}})]^2=0 \tag{3.5}$$

Неизвестные μ и d выберем так, чтобы в уравнении (3.5) обратились в нуль члены второго порядка относительно $\{z, \mathbf{y}\}$. Учитывая, что по построению матрица Q удовлетворяет равенству

$$A'Q+QA-Q\mathbf{bb}'Q+R=0 \tag{3.6}$$

получим после необходимых преобразований следующие уравнения:

$$\mathbf{d}=(P^{-1})'(\mu\beta Q\mathbf{b}-\mu\mathbf{q}-2Q\mathbf{p}) \tag{3.7}$$

$$\mu^2\eta^2+4\mu(\mathbf{q}'P^{-1}\mathbf{p}-\eta\mathbf{p}'QP^{-1}\mathbf{b}+\beta\mathbf{p}'QP^{-1}\mathbf{b}-\beta\mathbf{b}'QP^{-1}\mathbf{p}-\alpha)-4+8\mathbf{p}'QP^{-1}\mathbf{p}+$$

$$+ 4(\mathbf{p}'QP^{-1}\mathbf{b})^2 = 0 \tag{3.8}$$

Подставим в (3.6) $A = P + \mathbf{bb}'Q$ и получим матричное уравнение

$$P'Q + QP + Q\mathbf{bb}'Q + R = 0$$

Умножим его слева на матрицу $QP^{-1}Q^{-1}$ и справа на $Q^{-1}(P^{-1})'Q$. Сделав необходимые преобразования, получим

$$-1 + 2\mathbf{p}'QP^{-1}\mathbf{p} + (\mathbf{p}'QP^{-1}\mathbf{b})^2 = -1 - \mathbf{p}'QP^{-1}Q^{-1}RQ^{-1}(P^{-1})'Q\mathbf{p} < 0$$

Следовательно, уравнение (3.8) имеет корни, противоположные по знаку.

Теорема 3.1. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид (1.1), качество переходного процесса оценивается функционалом (1.2), выполняются условия 1.1, 1.2 и величина η в (3.1) отлична от нуля. Тогда задача 1.1 имеет в первом приближении единственное решение, причем управление

$$u^{(1)}(z, \mathbf{y}) = v^{(1)}(z) + u^{(1)}(\mathbf{y}) = -\tfrac{1}{2}[(\mu\beta + \mathbf{d}'\mathbf{b})z + 2\mathbf{b}'Q\mathbf{y})] \tag{3.9}$$

стабилизирует систему (1.1), т.е. асимптотически устойчива система

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta(\mu\beta + \mathbf{d}'\mathbf{b})) + z(\mathbf{q}' - \beta\mathbf{b}'Q)\mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} &= P\mathbf{y} + z(\mathbf{p} - \tfrac{1}{2}(\mu\beta + \mathbf{d}'\mathbf{b})\mathbf{b}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Уравнение (3.8) имеет два действительных корня: $\mu_1 > 0$ и $\mu_1 < 0$, которым отвечают соответственно два значения: $\mathbf{d}^{(1)}$ и $\mathbf{d}^{(2)}$ вектора $\mathbf{d}$, определяемого равенством (3.7). В системе (3.10) следует полагать

$$\mu = \begin{cases} \mu_1, & z > 0 \\ \mu_2, & z < 0 \end{cases}, \quad \mathbf{d} = \begin{cases} \mathbf{d}^{(1)}, & z > 0 \\ \mathbf{d}^{(2)}, & z < 0 \end{cases}$$

Отлична от нуля величина $\nu(\mu) = Z^{(20)}(z, v^{(1)}(z))/z^2$, вычисленная при управлении

$$v^{(1)}(z) = -\tfrac{1}{2}(\mu\beta + \mathbf{d}'\mathbf{b})z$$

причем $\nu(\mu_1) < 0,\ \nu(\mu_2) > 0$ и

$$\nu(\mu) = \alpha - \tfrac{1}{2}\beta(\mu\beta + \mathbf{d}'\mathbf{b}) + (\mathbf{q}' - \beta b'Q)P^{(-1)}(\mathbf{p} - \tfrac{1}{2}(\mu\beta + \mathbf{d}'\mathbf{b})\mathbf{b})$$

Обозначим символом $(dW/dt)_{(3.10)}$ полную производную по времени функции $W(z, \mathbf{y})$ в силу системы (3.10). Из (3.4)–(3.10) получим для вычисления функции $W(z, \mathbf{y})$ уравнение

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(3.10)} &= W_z[z^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta(\mu\beta + \mathbf{d}'\mathbf{b})) + z(\mathbf{q}' - \beta\mathbf{b}'Q)\mathbf{y}] + \mathbf{W}_y'[P\mathbf{y} + z(\mathbf{p} - \tfrac{1}{2}(\mu\beta + \mathbf{d}'\mathbf{b})\mathbf{b})] = \\ &= \tfrac{1}{4}(\beta z\mathbf{d}'\mathbf{y} + \beta zW_z + \mathbf{b}'\mathbf{W}_y)^2 + z^2(\tfrac{1}{2}\beta^2\mu + \tfrac{1}{2}\beta\mathbf{d}'\mathbf{b} - \alpha)\mathbf{d}'\mathbf{y} + z(\beta\mathbf{b}'Q\mathbf{y} - \mathbf{q}'\mathbf{y})\mathbf{d}'\mathbf{y} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Уравнение такого типа возникает при решении задачи об оптимальной стабилизации нелинейных систем [6] и в некритических ситуациях, когда удается обосновать аналитичность оптимальной функции Ляпунова в некоторой достаточно малой окрестности начала координат. Однако в рассматриваемом здесь критическом случае одного нулевого корня специфика оптимальной системы первого приближения (3.10) такова, что решение уравнения (3.11), вообще говоря, не является аналитической функцией критической переменной z. В этом нетрудно убедиться на простейших примерах, причем типична ситуация ([8], с. 65–67), когда функцию $W(z, \mathbf{y})$ можно аппроксимировать с любой заданной точностью отрезком расходящегося ряда.

Опираясь на свойства решений нелинейной системы (3.10), можно показать, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда уравнение (3.11) имеет единственное непрерывное в точке $z = 0$ решение, определенное в областях $z > 0$ и $z < 0$. С точностью до z^m в этих областях функция $W(z, \mathbf{y})$ аппроксимируется отрезком расходящегося ряда

$$W(z,\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{m} [z^k(\alpha_k + W_k(\mathbf{y}))], \quad \alpha_1 = 0 \tag{3.12}$$

где $W_k(\mathbf{y})$ – аналитические функции в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{y} = 0$. В областях $z > 0$ и $z < 0$ величины α_k и функции $W_k(\mathbf{y})$ при любом значении k определяются единственным образом.

Для доказательства теоремы 3.2 выполним преобразование Ляпунова и перейдем от переменных $\mathbf{y}_i$ к новым переменным $\mathbf{x}_i$ в соответствии с равенством $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^0(z)$. Обозначим $W^*(z, \mathbf{x}) = W(z, \mathbf{y}(z)) = W(z, \mathbf{x} + \mathbf{y}^0(z))$. Функцию $W^*(z, \mathbf{x})$ будем строить в виде (3.12), снабжая искомые величины верхним индексом "$*$". В таком случае для вычисления величин α_k^* и функций $W_k^*(\mathbf{x})$ при $k = 1, 2, \ldots$ получим уравнения

$$\nu(\mu)\alpha_k^* = \beta_k, \quad (W_x^* V)'\mathbf{x} = W_k^* \mathbf{q}'\mathbf{x} + F_k(\mathbf{x})$$

Можно показать, что величины β_k и функции $F_k(\mathbf{x})$ находятся по результатам вычислений при меньших значениях k. Следовательно, справедливость утверждений теоремы 3.2 вытекает из теорем Ляпунова ([3], с. 83–100) и результатов теоремы 3.1.

4. Пример. Рассмотрим модельный пример задачи об оптимальной стабилизации системы, описываемой уравнениями

$$\dot z = zy, \quad \dot y = u + az \tag{4.1}$$

когда качество переходного процесса описывается функционалом

$$J[u] = \int_0^\infty (u^2 + z^2 + y^2)dt \tag{4.2}$$

Выполнив необходимые вычисления, получим

$$V^0(z,y) = \mu z + y^2 + \gamma zy + W(z,y) \tag{4.3}$$

$$\gamma = 2(a \pm \sqrt{a^2+1}), \quad \mu = \pm 2\sqrt{a^2+1}$$

Верхний знак соответствует области $z > 0$, а нижний – области $z < 0$.

Функция $W(z, y)$ является решением уравнения

$$zyW_z - \left(z\frac{\mu}{2} + y\right)W_y = \frac{1}{4}W_y^2 - \gamma zy^2$$

Аппроксимацию решения этого уравнения в соответствии с (3.12) ищем в виде

$$W(z,y) = zW_1(y) + z^2(\alpha_2 + W_2(y)) + O(z^3)$$

Выполнив необходимые вычисления и преобразования, найдем

$$W_1(y) = \gamma\left(\frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + O(y^4)\right), \quad \alpha_2 = \frac{\mu}{4}\gamma$$

$$W_2(y) = -\frac{\mu\gamma + \gamma^2}{8}y^2 - \frac{2\mu\gamma + 3\gamma^2}{18}y^3 + O(y^4)$$

Из (3.4), (4.3) следует, что аппроксимация оптимального управления $u^0(z, y)$ в системе (4.1) при показателе качества (4.2) определяется равенством

$$u^0(z,y) = -\frac{1}{2}\left(2y + \left(\gamma + y + \frac{1}{2!}y^2 + O(y^3)\right)z + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu\gamma}{4} - \frac{\mu\gamma+\gamma^2}{4}y - \frac{2\mu\gamma+3\gamma^2}{6}y^2 + O(y^3)\right)z^2 + O(z^3)\right)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства общего и профессионального образования Российской Федерации (95-0-1.9-107).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I–III. Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 4. С. 437–441; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665.
2. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение IV // *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
4. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
5. *Гальперин Е.А., Красовский Н.Н.* О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 988–1004.
6. *Альбрехт Э.Г.* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 836–844.
7. *Кириллова Ф.М.* К задаче об аналитическом конструировании регуляторов // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 3. С. 433–439.
8. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
6.V.1997