

УДК 62.50

© 1997 г. Ф.Л. Черноусько, А.М. Шматков

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ В ОДНОЙ СИСТЕМЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается линейная управляемая система третьего порядка, моделирующая движение инерционного объекта под действием управляющей силы с ограниченной скоростью изменения. Построено программное управление системой, оптимальное по быстродействию. В замкнутой форме дано решение задачи синтеза оптимального управления.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad m\dot{x}_2 = F \quad (1.1)$$

где x_1 – обобщенная координата, \dot{x}_2 – обобщенная скорость, m – постоянная инерционная характеристика (масса или момент инерции), F – управляющее воздействие (сила или момент силы), точки означают производные по времени t .

При постановке задач оптимального управления обычно предполагают, что сила F по абсолютной величине ограничена постоянной F_0 , т.е. $|F| \leq F_0$. В случае задачи оптимального быстродействия это ограничение приводит, как известно [1], к релейному характеру оптимального управления. При этом сила $F(t)$ принимает крайние значения $\pm F_0$ и мгновенно переключается с одного из этих значений на другое. Такое управление не всегда осуществимо на практике, например, при реализации управления при помощи электропривода.

В данной работе примем более реалистическое ограничение на скорость изменения управляющей силы вида

$$|\dot{F}| \leq \nu_0 \quad (1.2)$$

где $\nu_0 > 0$ – заданная постоянная. Будем также полагать, что ограничение на абсолютную величину силы не достигается и всегда $|F(t)| < F_0$.

При помощи замены переменных

$$x_1 = (\nu_0 / m)x, \quad x_2 = (\nu_0 / m)y, \quad F = \nu_0 z$$

приведем уравнения (1.1) и ограничение (1.2) к виду

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = u, \quad |u| \leq 1 \quad (1.3)$$

Теперь переменные x, y, z являются фазовыми координатами, а u играет роль ограниченного управления.

Зададим начальные условия для системы (1.3) в виде

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \quad (1.4)$$

где начальный момент времени без ограничения общности принят равным нулю.

Поставим задачу о построении управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничению $|u(t)| \leq 1$ при $t \geq 0$ и переводящего систему (1.3) из произвольного начального состояния (1.4) на заданное конечное многообразие

$$x(T) = 0, \quad y(T) = 0 \quad (1.5)$$

при произвольном $z(T)$ за кратчайшее время T .

Помимо определения программного управления будет также решена задача построения синтеза управления, оптимального по быстродействию для системы (1.3). Это управление $u(x, y, z)$, выраженное как функция текущих (или начальных) фазовых координат x, y, z , обеспечивает приведение системы (1.3) на заданное конечное многообразие (1.5) за кратчайшее время.

2. Принцип максимума. Применим принцип максимума [1] к поставленной задаче оптимального быстродействия (1.3) – (1.5). Составим функцию Гамильтона

$$H = p_x u + p_y z + p_z u \quad (2.1)$$

и запишем сопряженные уравнения

$$\dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = -p_x, \quad \dot{p}_z = -p_y \quad (2.2)$$

Здесь p_x, p_y, p_z – сопряженные переменные. Проинтегрируем систему (2.2) при условии трансверсальности $p_z(T) = 0$, отвечающем условию нефиксированности $z(T)$. Получим

$$p_x = c_x, \quad p_y = c_y + c_x \tau, \quad p_z = c_y \tau + c_x \tau^2 / 2 \quad (2.3)$$

Здесь $\tau = T - t$ – время, отсчитанное от конца процесса ("обратное" время), c_x и c_y – произвольные постоянные. Условие максимальности гамильтониана (2.1) по u при ограничении $|u| \leq 1$ из (1.3) дает $u(t) = \text{sign } p_z(t)$. Из формулы (2.3) для p_z следует, что функция $p_z(t)$ меняет знак при $t \leq T, \tau \geq 0$ не более одного раза. Следовательно, оптимальное управление $u(t) = \pm 1$ имеет при $t \leq T$ не более одного переключения.

3. Программное оптимальное управление. Обозначим через θ_1, θ_2 длительности двух возможных участков постоянства управления $u(t)$, а через $\sigma = \pm 1$ значение $u(t)$ на первом из этих участков. Тогда оптимальное управление можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= \sigma \quad \text{при } t \in (0, \theta_1) \\ u(t) &= -\sigma \quad \text{при } t \in (\theta_1, T), \quad \theta_1 + \theta_2 = T \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставим управление (3.1) в систему (1.3) и проинтегрируем ее при начальных условиях (1.4). Получим

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + y_0 t + z_0 t^2 / 2 + \sigma t^3 / 6 \\ y(t) &= y_0 + z_0 t + \sigma t^2 / 2, \quad z(t) = z_0 + \sigma t \quad \text{при } t \in (0, \theta_1) \\ x(t) &= x_0 + y_0 \theta_1 + z_0 \theta_1^2 / 2 + \sigma \theta_1^3 / 6 + (y_0 + z_0 \theta_1 + \sigma \theta_1^2 / 2)(t - \theta_1) + \\ &+ (z_0 + \sigma \theta_1)(t - \theta_1)^2 / 2 - \sigma (t - \theta_1)^3 / 6 \\ y(t) &= y_0 + z_0 \theta_1 + \sigma \theta_1^2 / 2 + (z_0 + \sigma \theta_1)(t - \theta_1) - \sigma (t - \theta_1)^2 / 2 \\ z(t) &= z_0 + \sigma \theta_1 - \sigma (t - \theta_1) \quad \text{при } t \in (\theta_1, T) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя решение (3.2) в условия (1.5), будем иметь два соотношения, разрешая которые относительно x_0, y_0 , получим

$$\begin{aligned} x_0 &= z_0 T^2 / 2 + \sigma (\theta_1^3 + 3\theta_1^2 \theta_2 - \theta_2^3) / 3 \\ y_0 &= -z_0 T - \sigma (\theta_1^2 + 2\theta_1 \theta_2 - \theta_2^2) / 2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Введем обозначения

$$\xi = z_0^{-3} x_0, \quad \eta = z_0^{-1} |z_0|^{-1} y_0, \quad \zeta = \text{sign } z_0$$

$$s = |z_0|^{-1} T, \quad \lambda = \theta_2 T^{-1} \quad (z_0 \neq 0) \quad (3.4)$$

$$X(\lambda) = (1 - 3\lambda^2 + \lambda^3) / 3, \quad Y(\lambda) = \lambda^2 - 1/2$$

Тогда соотношения (3.3) примут вид

$$\zeta(\xi s^{-3} - s^{-1} / 2) = \sigma X(\lambda), \quad \zeta(\eta s^{-2} + s^{-1}) = \sigma Y(\lambda) \quad (3.5)$$

При $z_0 = 0$ соотношения (3.3) дают

$$x_0 T^{-3} = \sigma X(\lambda), \quad y_0 T^{-2} = \sigma Y(\lambda) \quad (3.6)$$

Когда параметр λ изменяется от 0 до 1, точка с координатами $X(\lambda), Y(\lambda)$ пробегает дугу кривой, соединяющей точки A_1 и A_2 с координатами $(1/3, -1/2), (-1/3, 1/2)$.

Точки с координатами $\sigma X(\lambda), \sigma Y(\lambda)$ при $\lambda \in [0, 1]$ и $\sigma =$

$= \pm 1$ образуют замкнутую кривую Γ , симметричную относительно начала координат и имеющую угловые точки A_1 и A_2 , см. фиг. 1. Кривая Γ ограничивает выпуклую область, содержащую начало координат.

Решение поставленной программной задачи оптимального быстродействия (1.3) – (1.5) можно представить следующим образом.

Предположим сначала, что $z_0 \neq 0$. По заданным начальным данным x_0, y_0, z_0 из (1.5) определим ξ, η, ζ согласно (3.4). Левые части соотношений (3.5) задают координаты некоторой точки P , зависящей от параметра $s \in [0, \infty)$. При изменении s от ∞ до 0 точка P перемещается по гладкой полубесконечной кривой из начала координат (при $s \rightarrow \infty$) на бесконечность (при $s \rightarrow 0$). Эта точка хотя бы один раз попадет на замкнутую кривую Γ , окружающую начало координат. Найдем численно наименьшее значение $s = s_*$, при котором $P \in \Gamma$. Время оптимального быстродействия, согласно (3.4), равно $T = |z_0| s_*$. Положение точки P при $s = s_*$ на кривой Γ определяет значения параметров $\sigma = \pm 1$ и $\lambda \in [0, 1]$. Длительности участков постоянства управления в силу (3.4) равны $\theta_1 = (1 - \lambda)T$ и $\theta_2 = \lambda T$.

При $z_0 = 0$ вместо соотношений (3.5) рассмотрим равенства (3.6). Левые части этих равенств задают координаты точки P , зависящей от параметра T . Когда T изменяется от ∞ до 0, точка P перемещается по полукубической параболе из начала координат (при $T \rightarrow \infty$) на бесконечность (при $T \rightarrow 0$). Наименьшее значение параметра T , при котором $P \in \Gamma$, есть время оптимального быстродействия. Значения параметров $\sigma, \lambda, \theta_1, \theta_2$ определяются по положению точки P на Γ так же, как и при $z_0 \neq 0$.

Когда величины $\sigma, \theta_1, \theta_2$ определены, оптимальное управление $u(t)$ и соответствующая оптимальная траектория задаются равенствами (3.1) и (3.2). Таким образом, изложенный алгоритм полностью определяет решение программной задачи оптимального быстродействия. По построению это решение единственно.

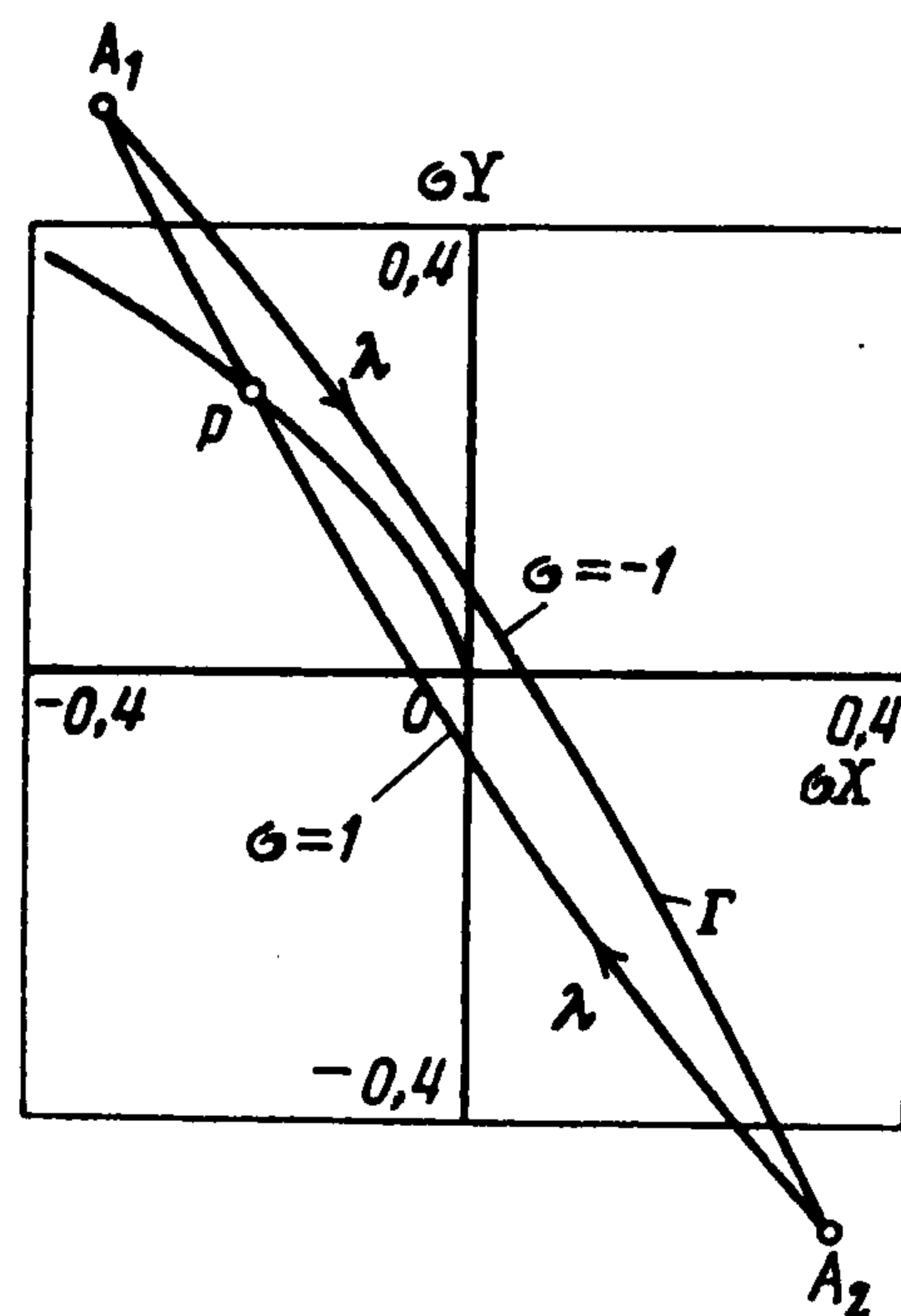
В качестве примера приведем результаты определения оптимального управления для начальных данных

$$x_0 = -72 + 27\sqrt{3} \approx -25,2, \quad y_0 = 3, \quad z_0 = 1$$

Для этого случая получено

$$T = s = 6, \quad \sigma = 1, \quad \theta_1 = 6 - 3\sqrt{3} \approx 0,80, \quad \theta_2 = 3\sqrt{3} \approx 5,20$$

Соответствующая траектория точки P при изменении T от ∞ до 0 изображена на фиг. 1.



Фиг. 1

4. Синтез оптимального управления. Для построения синтеза оптимального управления достаточно найти в фазовом пространстве хуз поверхности переключения, на которых меняется знак управления $u = \pm 1$. На этих поверхностях обращается в нуль длительность одного из участков постоянства управления, т.е. $\theta_1 = 0$ либо $\theta_2 = 0$. В соответствии с (3.4) имеем здесь $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Этим значениям λ отвечают согласно (3.5) значения X и Y , равные $\pm 1/3$ и $\mp 1/2$ соответственно. Из (3.5) получим условия

$$\zeta(\xi s^{-3} - s^{-1}/2) = \pm \sigma/3, \quad \zeta(\eta s^{-2} + s^{-1}) = \mp \sigma/2 \quad (4.1)$$

выполняемые в плоскости $\xi\eta$ на кривых переключения при $z_0 \neq 0$. Однако соотношений (4.1) недостаточно для определения кривых переключения; для этого потребуется непосредственный анализ соотношений (3.5), что будет проведено ниже.

Отметим, что при построении синтеза начальные данные x_0, y_0, z_0 можно рассматривать так же, как текущие значения фазовых координат x, y, z . Соотношения (3.4) будем рассматривать как формулы замены переменных

$$\xi = z^{-3}x, \quad \eta = z^{-1}|z|^{-1}y, \quad \zeta = \text{sign } z \quad (4.2)$$

в фазовом пространстве. Эта замена, вводящая автомодельные переменные ξ, η , позволяет при $z \neq 0$ понизить на одну единицу размерность фазового пространства и вести построение синтеза оптимального управления в плоскости $\xi\eta$.

Рассмотрим сначала отдельно случай $z = 0$. Аналогично (4.1) получим из (3.6) условия

$$xT^{-3} = \pm \sigma/3, \quad yT^{-2} = \mp \sigma/2 \quad (4.3)$$

которые выполняются на пересечении поверхностей переключения с плоскостью $z = 0$. Условия (4.3) определяют при $z = 0$ две половины полукубических парабол, которые образуют кривую переключений (КП) в плоскости $z = 0$, описываемую уравнением

$$\gamma(x, y) \equiv 3x + 2y|y|^{3/2} = 0 \quad (4.4)$$

Анализ знаков σ на ветвях КП (4.4) позволяет определить знаки управления с разных ее сторон. В результате получаем синтез оптимального управления при $z = 0$ в виде

$$u(x, y, 0) = -\text{sign } \gamma(x, y) \quad \text{при } \gamma \neq 0 \quad (4.5)$$

$$u(x, y, 0) = \text{sign } x = -\text{sign } y \quad \text{при } \gamma = 0$$

При $z \neq 0$ замена переменных (4.2) преобразует первые два уравнения (1.3) к виду

$$\dot{\xi} = |z|^{-1}(\eta - 3u\zeta\xi), \quad \dot{\eta} = |z|^{-1}(1 - 2u\zeta\eta) \quad (4.6)$$

Разделив первое уравнение (4.6) на второе, получим линейное относительно ξ уравнение

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\eta - 3\alpha\xi}{1 - 2\alpha\eta}, \quad \alpha = u\zeta = \pm 1 \quad (4.7)$$

Вдоль оптимальных траекторий, не пересекающих плоскость $z = 0$, параметр α сохраняет постоянное значение. Интегрируя уравнение (4.7) при постоянном α , найдем его общее решение

$$\xi = \Phi(\eta, \alpha, A) \equiv \alpha\eta - 1/3 + A|1 - 2\alpha\eta|^{3/2} \quad (4.8)$$

где A – произвольная постоянная. Отметим, что второе уравнение (4.6) позволяет

определить направление движения вдоль оптимальных траекторий. Если $\alpha = 1$, то движение происходит в сторону роста η при $\eta < 1/2$ и в сторону убывания η при $\eta > 1/2$. Если же $\alpha = -1$, то движение происходит в сторону убывания η при $\eta < -1/2$ и в сторону роста η при $\eta > -1/2$.

Перейдем к непосредственному построению синтеза оптимального управления. Для этого, как указано выше, достаточно установить знак управления $u = \sigma$ в начальный момент времени $t = 0$ в зависимости от начальных данных x_0, y_0, z_0 . Переходя к автомобильным переменным и обращаясь к соотношениям (3.5), задачу синтеза можно сформулировать так: найти значение $\sigma = \pm 1$, которое соответствует решению соотношений (3.5) (при фиксированных ξ, η, ζ , где $\zeta = \pm 1$) с наименьшим s , причем $s > 0$, $\lambda \in [0, 1]$.

Изложим алгоритм решения в краткой форме, а затем поясним его наиболее существенные элементы.

Прежде всего отметим, что при одновременной замене знаков у ζ и σ соотношения (3.5) сохраняют свой вид. Следовательно, при замене ζ на $-\zeta$ искомая величина σ также меняет знак. Поэтому достаточно построить решение в случае $\zeta = 1$ при произвольных ξ, η , а затем для $\zeta = -1$ просто поменять знак в полученной зависимости $\sigma(\xi, \eta)$.

Поэтому положим без ограничения общности $\zeta = 1$ и исключим λ при помощи второго из уравнений (3.5). Получим

$$\lambda = [1/2 + \sigma(\eta s^{-2} + s^{-1})]^{1/2}, \quad \sigma = \pm 1 \quad (4.9)$$

Так как $\lambda \in [0, 1]$, то из (4.9) при фиксированных $\sigma = \pm 1$ и η определяются интервалы изменения s , в которых λ вещественно и $\lambda \leq 1$. Подставим λ из (4.9) в первое уравнение (3.5) и найдем зависимости ξ от s, η и $\sigma = \pm 1$. Эти зависимости при фиксированном η будем обозначать через $\xi^+(s)$ и $\xi^-(s)$ для $\sigma = \pm 1$. При условии $\lambda \in [0, 1]$ они определяют в плоскости s, ξ две кривые, каждая из которых состоит, вообще говоря, из конечного числа дуг. Исследуем эти кривые, а именно найдем их области определения и экстремумы во всем диапазоне изменения аргумента s и параметра η , после чего проанализируем их взаимное расположение. Затем проведем мысленно в плоскости s, ξ прямую $\xi = \text{const}$ и найдем минимальное значение абсциссы $s > 0$, при котором эта прямая пересекает одну из указанных кривых. Значение $\sigma = \pm 1$, отвечающее той кривой, с которой имеет место это пересечение, определяет искомое управление $u = \sigma$ при данных ξ, η и $\zeta = 1$, а значение s , отвечающее этой точке пересечения, равно нормированному времени быстрого действия: $s = T |z|^{-1}$ (нормированной функции Беллмана).

Теперь опишем указанные операции подробнее, причем следует учесть, что все последующие построения верны только при $s > 0$. Из (3.5) имеем

$$\xi^\pm(s) = \mp s^3 / 6 - s^2 / 2 - s\eta \pm (s^2 / 2 \pm \eta \pm s)^{3/2} / 3 \quad (4.10)$$

Если $s \rightarrow +\infty$, то $\xi^\pm(s) \approx \pm(-1 + 1/\sqrt{2})s^3 / 6 \rightarrow \mp\infty$.

Рассмотрим функцию $\xi^+(s)$. В случае $\sigma = 1$ условие $\lambda \leq 1$ выделяет множество $s \in (0, s_2] \cup [s_1, +\infty)$, где $s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 2\eta}$. Выражение для $\xi^+(s)$ определено, если $s \in [s_5, +\infty)$, где $s_5 = -1 + \sqrt{1 - 2\eta}$. Производная $d\xi^+/ds$ обращается в нуль в точках s_5 и $s_7 = -1 + \sqrt{2(1 - 2\eta)}$, если s_5 и s_7 существуют, причем $s_5 \leq s_7$. Кроме того, $d^2\xi^+/ds^2 < 0$ при $s = s_7$, т.е. s_7 — точка максимума. Можно показать, что, если s_1, s_2, s_5 и s_7 существуют, то $s_2 \leq s_7 \leq s_1$, а $s_2 \geq s_5$.

Если $\eta \geq 0$, то $s_2 \leq 0$ и $d\xi^+/ds < 0$ при $s \geq s_1$, т.е. функция $\xi^+(s)$ задана при $s \in [s_1, +\infty)$ и убывает от $\xi^+(s_1)$ до $-\infty$. Если $-1/2 \leq \eta < 0$, то $s_5 > 0$, т.е. функция $\xi^+(s)$ определена при $s \in [s_5,$

$s_2] \cup [s_1, +\infty)$. Она имеет нулевую производную при $s = s_5$, возрастает на отрезке $[s_5, s_2]$ и убывает от $\xi^+(s_1)$ до $-\infty$ при $s \in [s_1, +\infty)$. Если $\eta < -1/2$, то $s_5 > 0$, а значение s_2 не определено. Тогда функция $\xi^+(s)$ задана при $s \in [s_5, +\infty)$, $d\xi^+/ds = 0$ при $s = s_5$, $\xi^+(s)$ возрастает до максимума в точке $s = s_7$, после чего убывает от $\xi^+(s_7)$ до $-\infty$.

Теперь перейдем к функции $\xi^-(s)$. Потребуем, чтобы $\lambda \leq 1$ в (4.9). Получим, что $s \in [s_5, +\infty)$, где $s_5 = -1 + \sqrt{1 - 2\eta}$. Если $s \in (0, s_2] \cup [s_1, +\infty)$, то функция $\xi^-(s)$ из (4.10) определена. Ее производная обращается в нуль в точках s_1, s_2 и $s_3 = 1 - \sqrt{2(1 + 2\eta)}$, если они существуют, причем $s_3 \geq s_1$. Кроме того, $d^2\xi^-/ds^2 > 0$ при $s = s_3$, т.е. $s = s_3$ — точка минимума.

Если $\eta \geq 0$, то $s_2 \leq 0$ и функция $\xi^-(s)$ задана при $s \in [s_1, +\infty)$, причем $d\xi^-/ds = 0$ при $s = s_1$. Функция $\xi^-(s)$ убывает от $\xi^-(s_1)$ до точки минимума $s = s_3$, после чего возрастает от $\xi^-(s_3)$ до $+\infty$. Если $-1/2 \leq \eta < 0$, то $s_5 > 0$, т.е. зависимость $\xi^-(s)$ определена при $s \in [s_5, s_2] \cup [s_1, +\infty)$. Функция $\xi^-(s)$ возрастает при изменении s от $s = s_5$ до $s = s_2$, причем $d\xi^-/ds = 0$ при $s = s_2$, и убывает при $s \in [s_1, s_3]$, причем $d\xi^-/ds = 0$ при $s = s_1$ и $s = s_3$. Далее $\xi^-(s)$ возрастает от $\xi^-(s_3)$ до $+\infty$. Если $\eta < -1/2$, то $s_5 > 0$, значения s_1, s_2 и s_3 не определены, а $d\xi^-/ds > 0$ при $s \geq s_5$, т.е. функция $\xi^-(s)$ задана при $s \in [s_5, +\infty)$ и возрастает на всем этом интервале до $+\infty$.

Сделаем два замечания о взаимном расположении пары кривых (по одной из обоих исследованных семейств) для одного и того же значения параметра η .

Во-первых, найдем точки пересечения кривых $\xi^+(s)$ и $\xi^-(s)$, что требует решения уравнения

$$1 - (\frac{1}{2} - \eta/s^2 - 1/s)^{3/2} = (\frac{1}{2} + \eta/s^2 + 1/s)^{3/2} \quad (4.11)$$

Возведем обе части уравнения (4.11) в квадрат и приведем подобные члены, затем снова возведем обе части уравнения в квадрат и получим уравнение относительно s

$$((\eta/s^2 + 1/s)^2 + 2)((\eta/s^2 + 1/s)^2 - 1/4)^2 = 0 \quad (4.12)$$

Анализ корней уравнения (4.12) показывает, что только s_1, s_2 и s_5 являются корнями уравнения (4.11), причем положительными хотя бы при одном значении η . Совпадающие значения $\xi^+ = \xi^-$ в указанных точках будем обозначать через ξ^\pm .

Во-вторых, устанавливаем, что $\xi^\pm(s_5) > \xi^\pm(s_1)$ тогда и только тогда, когда $-\sqrt{3}/4 < \eta \leq 0$.

В результате оказывается удобным выделить четыре диапазона значений параметра η , соответствующих различным взаимным расположениям кривых $\xi^+(s)$ и $\xi^-(s)$, которые и определяют искомое управление для всех ξ и η , за исключением $\xi^\pm(s_1), \xi^\pm(s_2)$ и $\xi^\pm(s_5)$.

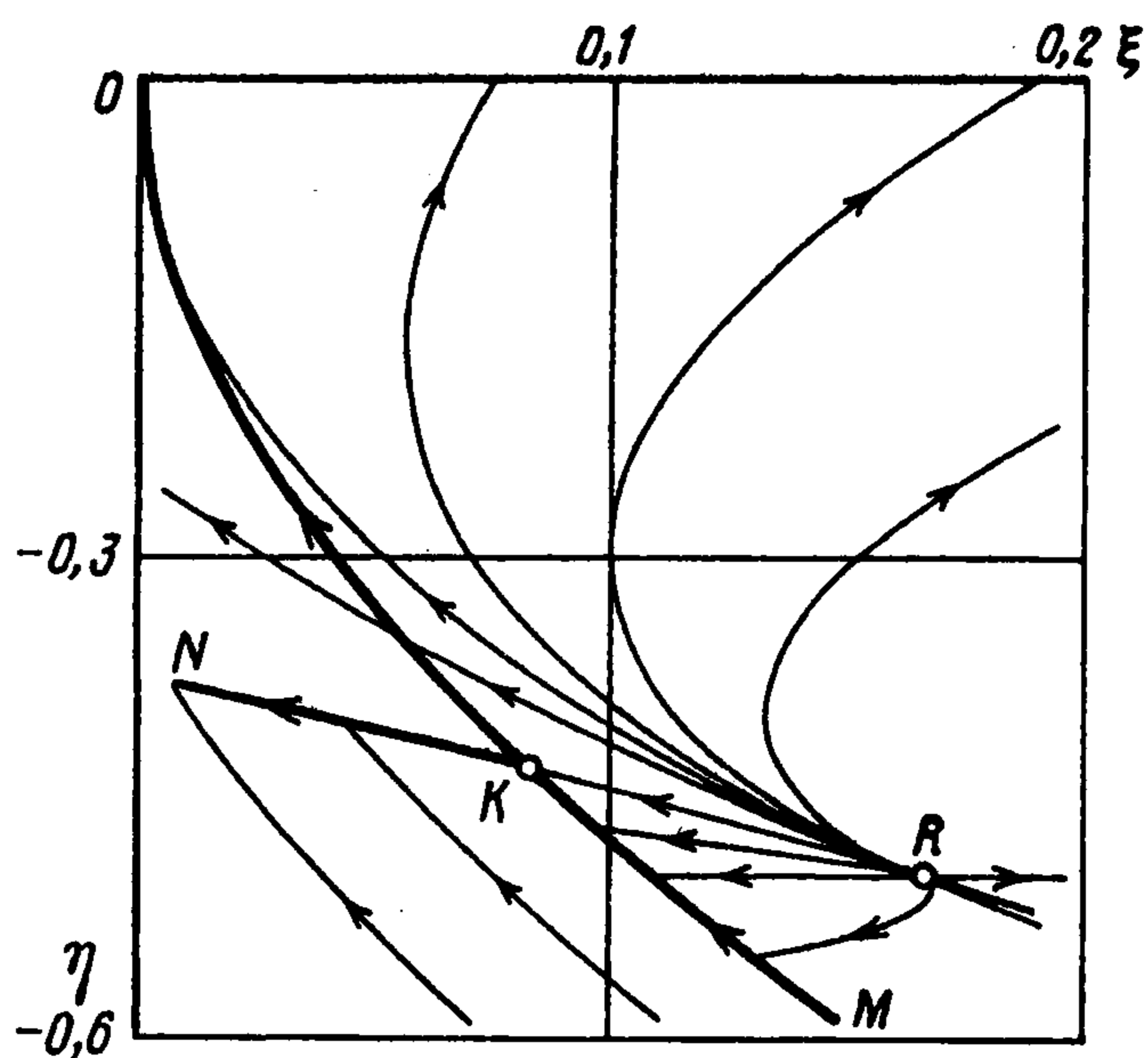
При $\eta \geq 0$ для любого $\xi < \xi^\pm(s_1)$ минимальная допустимая абсцисса s достигается на кривой $\xi^+(s)$. При $\xi > \xi^\pm(s_1)$ тот же результат имеет место для $\xi^-(s)$.

При $-\sqrt{3}/4 < \eta < 0$ к кривым $\xi^+(s)$ и $\xi^-(s)$, имеющим те же характерные особенности, что и в предыдущем случае, добавляется замкнутая изолированная кривая для $s_5 \leq s \leq s_2$, причем кривая $\xi^-(s)$ лежит выше кривой $\xi^+(s)$, а $\xi^\pm(s_5) < \xi^\pm(s_2)$. Кроме того, $\xi^\pm(s_1) < \xi^\pm(s_5)$, т.е. $\xi^\pm(s_1)$ лежит ниже самой нижней точки замкнутой изолированной кривой. Следовательно, искомое управление задается так же, как и в предыдущем случае.

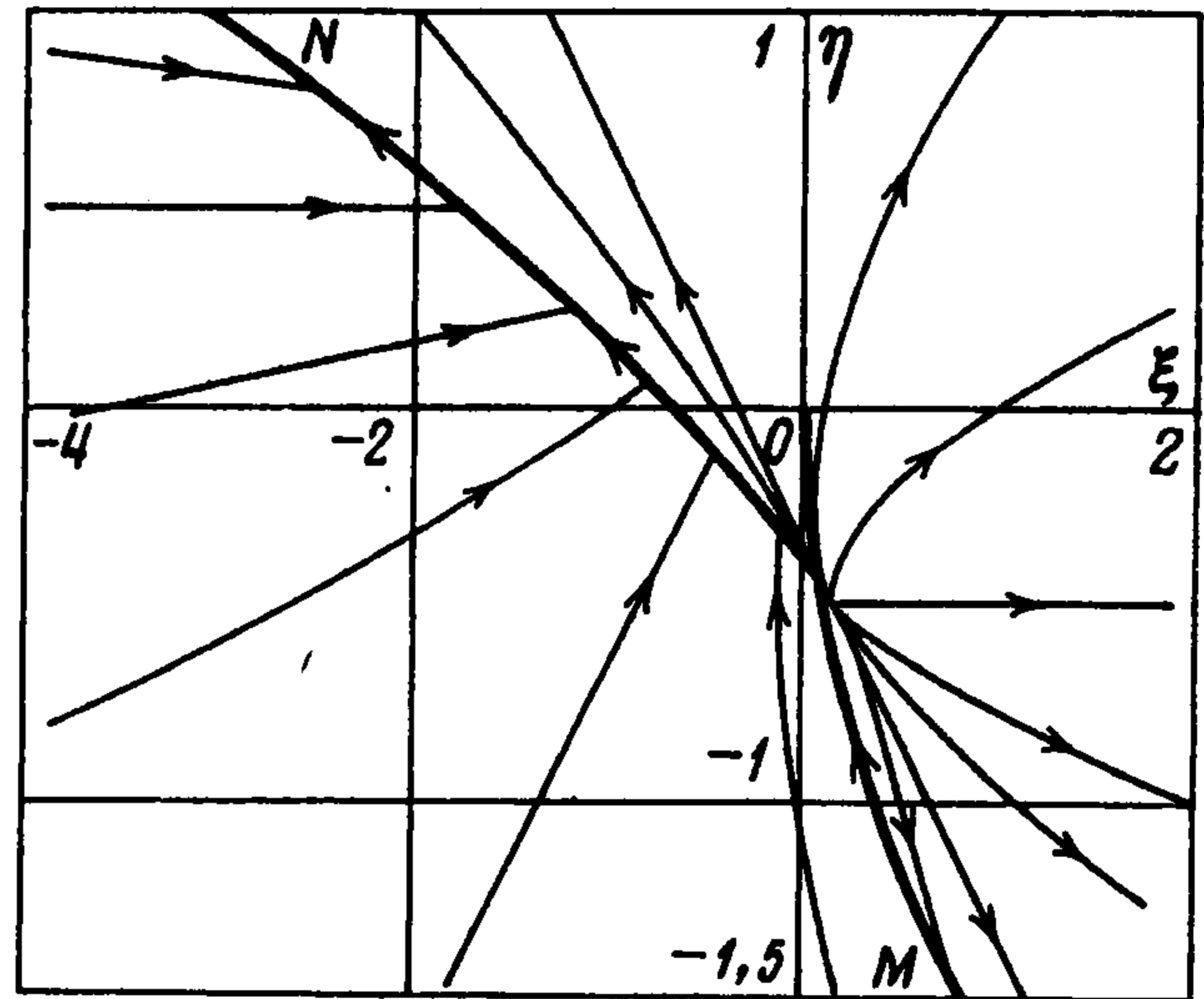
При $-1/2 \leq \eta \leq -\sqrt{3}/4$ выполняется неравенство $\xi(s_1) > \xi(s_5)$, и для любого $\xi < \xi^\pm(s_5)$ минимальная допустимая абсцисса s достигается на кривой $\xi^+(s)$. При $\xi > \xi^\pm(s_5)$ то же самое утверждение справедливо для $\xi^-(s)$.

Замкнутая изолированная кривая исчезает при $\eta < -1/2$, и искомое управление задается так же, как и в предыдущем случае.

Определим управление на кривых $\xi^\pm(s_1(\eta)), \xi^\pm(s_2(\eta))$ и $\xi^\pm(s_5(\eta))$ в плоскости $\xi\eta$. Напомним, что зависимости s_1, s_2 и s_5 от η приведены выше. В соответствии с (4.9) на кривой $\xi^\pm(s_1(\eta))$ имеем $\lambda = 0$ при $\sigma = -1$, т.е. временной интервал, в котором надо применять $u = 1$, равен нулю. Следовательно, на кривой $\xi^\pm(s_1(\eta))$ надо применять $u = -1$, и она является КП при $\eta > -\sqrt{3}/4$. Аналогично на кривой $\xi^\pm(s_2(\eta))$ следует использовать $u = -1$ при $-1/2 \leq \eta < 0$, но КП она не будет. Тем же способом нетрудно показать, что на кривой $\xi^\pm(s_5(\eta))$ имеем $u = 1$ при $\eta < 0$. Она служит КП.



Фиг. 2



Фиг. 3

Приведем полностью результаты построения синтеза оптимального управления. Примем для определенности $z > 0$, $\zeta = 1$. Кривая переключений в плоскости $\xi\eta$ определена равенствами

$$\xi = f(\eta) = \begin{cases} \Phi(\eta, 1, 1/3), & \eta \leq \eta^* \\ \Phi(\eta, -1, -1/3), & \eta > \eta^*; \eta^* = -\sqrt{3}/4 \end{cases} \quad (4.13)$$

где использовано обозначение (4.8). В точке K с координатами $\xi^* = 1/12$, $\eta^* = -\sqrt{3}/4$ КП непрерывна и имеет излом. Эта кривая изображена жирной линией на фиг. 2, 3. В связи с тем, что масштаб на фиг. 3 меньше, чем на фиг. 2, точки K и R , показанные на фиг. 2, практически неразличимы на фиг. 3 и потому не обозначены. С другой стороны, масштаб фиг. 3 позволяет изобразить все характерные фазовые траектории, существенная часть которых отсутствует на фиг. 2. В остальном обозначения на фиг. 2 и фиг. 3 идентичны. Для определенности в дальнейшем будем ссылаться в основном на фиг. 2. Ветви КП, отвечающие $\eta < \eta^*$ и $\eta > \eta^*$, обозначены буквами M и N , соответственно. В плоскости $\xi\eta$ имеем

$$\begin{aligned} u &= 1 \text{ при } \xi < f(\eta) \\ u &= 1 \text{ при } \xi = \Phi(\eta, 1, 1/3), \eta \leq 0 \\ u &= -1 \text{ в остальных точках плоскости } \xi\eta \end{aligned} \quad (4.14)$$

Таким образом, $u = 1$ слева и снизу от КП (4.13), на ее участке KM справа и снизу от точки K , а также на дуге кривой $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$, соединяющей начало координат и точку K , см. фиг. 2, причем эта дуга является частью КП. В остальной части плоскости $\xi\eta$ имеем $u = -1$.

При $z < 0$, $\zeta = -1$ КП остается той же, а в соотношениях (4.14) множества точек $\xi\eta$, где $u = 1$ и $u = -1$, следует просто поменять местами. Итак, синтез оптимального управления $u(x, y, z)$ полностью определен соотношениями (4.2), (4.4), (4.5), (4.8), (4.13), (4.14) при всех x, y, z .

Опишем теперь множество оптимальных траекторий, которые в переменных ξ, η состоят из дуг кривых (4.8). Пусть задана начальная точка x, y, z , причем для определенности примем $z > 0$. Согласно формулам (3.4) найдем ξ, η и $\zeta = 1$.

Если точка $\xi\eta$ лежит на кривой $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$, причем $\eta \leq 0$, то движение происходит вдоль этой кривой $MK0$ с управлением $u = 1$ до попадания в начало координат.

Все остальные оптимальные траектории приходят в начало координат также

по этой кривой. Исключение составляет отрезок RO кривой $\xi = \Phi(\eta, -1, 1/3)$ при $\eta \in [-1/2, 0]$: этот отрезок сам является фазовой траекторией для $u = -1$, начинающейся в точке R с координатами $(1/6, -1/2)$ и входящей в начало координат. На фиг. 2 и 3 фазовые траектории изображены тонкими линиями, стрелки указывают направление движения.

Если начальная точка лежит в криволинейном угле

$$\eta \leq 0, \quad \Phi(\eta, 1, 1/3) < \xi < \Phi(\eta, -1, 1/3) \quad (4.15)$$

то оптимальная траектория состоит из участка с $u = -1$ до попадания на кривую $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$ и из последующего движения по ней с $u = 1$.

Если начальная точка лежит в области $\xi < f(\eta)$, то сначала движение происходит с $u = 1$ до пересечения с кривой $\Phi = \xi(\eta, -1, -1/3)$, являющейся частью KN КП (4.13) (см. фиг. 2), а затем с $u = -1$ по этой кривой, уходящей на бесконечность. Согласно (3.4) в бесконечно удаленной точке плоскости $\xi\eta$ имеем $z = 0$. На бесконечности z меняет знак, и затем $z < 0$, $\zeta = -1$. Фазовая траектория продолжается, приходя при $u = -1$ из бесконечности по кривой $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$, и входит по этой кривой в начало координат. Отметим, что движение через бесконечно удаленную точку происходит без смены управления и занимает конечное время.

Осталось рассмотреть начальные точки в области $\xi > f(\eta)$, но вне криволинейного угла (4.15). Здесь имеем сначала $u = -1$ и траектория $\xi = \Phi(\eta, -1, A)$ уходит на бесконечность, причем $A > -1/3$. Затем движение происходит при $\zeta = -1$, $u = -1$ по кривым $\xi = \Phi(\eta, 1, -A)$ со сменой знака A . Эти кривые лежат в области $\xi < f(\eta)$ и упираются в ветвь KN кривой переключений $\xi = \Phi(\eta, -1, -1/3)$. По этой кривой траектория с $u = 1$ уходит на бесконечность, где снова меняется знак z . Далее при $\zeta = 1$ движение происходит при $u = 1$ по кривой $\xi = \Phi(\eta, 1, 1/3)$ вплоть до попадания в начало координат.

Отметим, что некоторые фазовые траектории содержат отрезки прямых $\xi = \pm\eta - 1/3$ и $\eta = \pm(2\alpha)^{-1}$, которые отвечают значениям $A = 0$ и $A = \infty$ в (4.8) соответственно. При уходе на бесконечность по этим прямым одновременно с z обращается в нуль также переменная x (для прямых с $A = 0$) или y (для прямых с $A = \infty$), в чем легко убедиться при помощи (3.4). В остальном эти прямые рассматриваются так же, как остальные траектории (4.8).

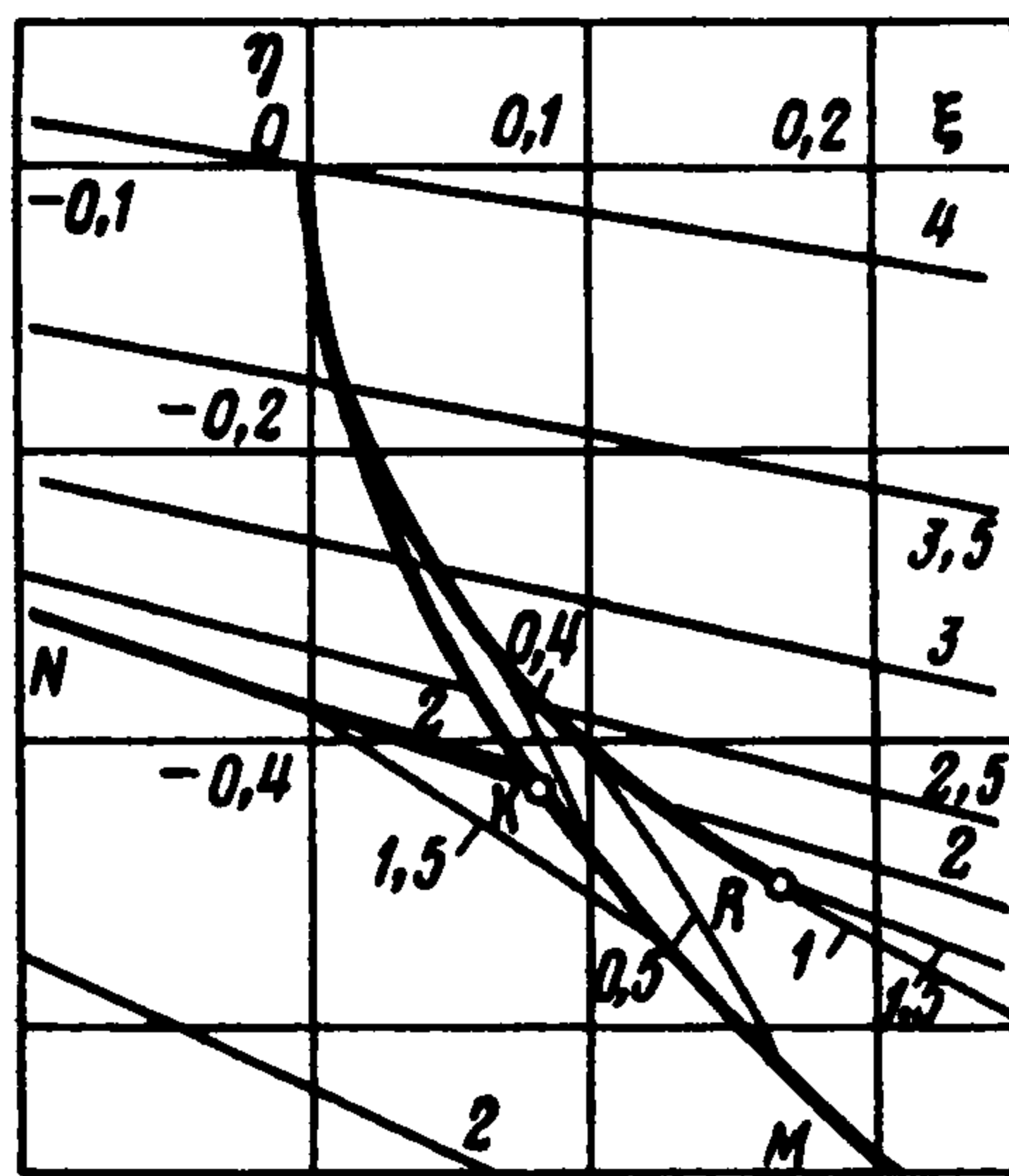
Таким образом, для любой начальной точки x, y, z движение полностью описывается траекториями фиг. 2, 3 и содержит не более двух участков постоянства управления. При этом знак z может меняться не более двух раз.

Приведем результаты исследования нормированного времени оптимального быстрого действия s как функции ξ, η . Изучается зависимость s от ξ при различных фиксированных η , причем s_1, s_2, s_5 снова рассматриваются как введенные выше функции от η . При $\eta \geq 0$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает с ростом ξ , если $\xi < \xi^\pm(s_1)$ и имеет разрыв, если $\xi = \xi^\pm(s_1)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_1)$ к $\xi > \xi^\pm(s_1)$ и при росте ξ от $\xi = \xi^\pm(s_1)$ до $+\infty$ она растет.

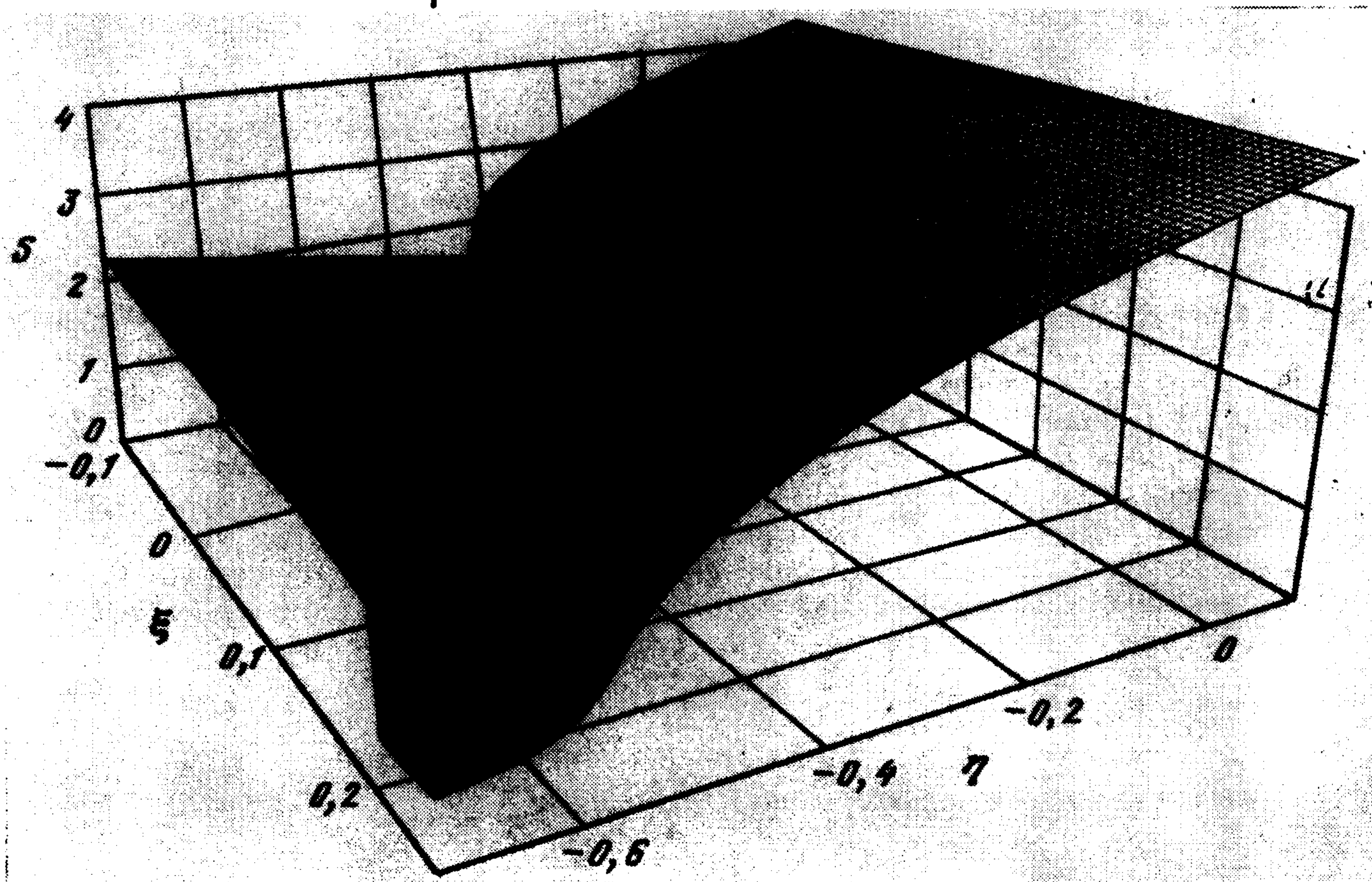
При $-\sqrt{3}/4 < \eta < 0$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает с ростом ξ , если $\xi < \xi^\pm(s_1)$, и имеет разрыв, если $\xi = \xi^\pm(s_1)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_1)$ к $\xi > \xi^\pm(s_1)$ она растет. Еще один разрыв имеет место при $\xi = \xi^\pm(s_5)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_5)$ к $\xi > \xi^\pm(s_5)$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает, а при $\xi^\pm(s_5) \leq \xi \leq \xi^\pm(s_2)$ растет. При $\xi = \xi^\pm(s_2)$ опять происходит разрыв. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_2)$ к $\xi > \xi^\pm(s_2)$ и при росте ξ от $\xi = \xi^\pm(s_2)$ до $+\infty$ функция $s(\xi, \eta)$ также растет.

При $-1/2 \leq \eta \leq -\sqrt{3}/4$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает с ростом ξ , если $\xi < \xi^\pm(s_5)$ и имеет разрыв, если $\xi = \xi^\pm(s_5)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_5)$ к $\xi > \xi^\pm(s_5)$ она убывает, а при $\xi^\pm(s_5) \leq \xi \leq \xi^\pm(s_2)$ растет. При $\xi = \xi^\pm(s_2)$ происходит следующий разрыв. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_2)$ к $\xi > \xi^\pm(s_2)$ и при росте ξ от $\xi = \xi^\pm(s_2)$ до $+\infty$ функция $s(\xi, \eta)$ растет.

При $\eta < -1/2$ функция $s(\xi, \eta)$ убывает с ростом ξ при $\xi < \xi^\pm(s_5)$ и имеет разрыв, если $\xi = \xi^\pm(s_5)$. При переходе от $\xi < \xi^\pm(s_5)$ к $\xi > \xi^\pm(s_5)$ она убывает, а при росте ξ от $\xi = \xi^\pm(s_5)$ до $+\infty$ растет.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4 тонкие кривые – линии уровня функции $s(\xi, \eta)$, а жирные – линии разрыва этой функции. Остальные обозначения те же, что и на фиг. 3. Трехмерный график функции $s(\xi, \eta)$ показан на фиг. 5, причем чем темнее фон, тем меньше соответствующее значение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01137).

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.II.1997