

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСТАТА

Исследуется возмущенное движение гиростата, мало отличающееся от регулярной прецессии в случае Эйлера. В качестве возмущений рассматриваются малое смещение центра тяжести, наличие роторов и нарушение динамической симметрии. На основании КАМ-теории устанавливается устойчивость условно-периодического движения, близкого к регулярной прецессии.

Рассмотрим возмущенное движение гиростата в однородном поле тяжести. В качестве невозмущенного движения примем эйлерово вращение по инерции вокруг неподвижной точки твердого тела с осевой динамической симметрией ($A = B$). Возмущения вызваны наличием симметричных роторов, смещением центра тяжести тела относительно закрепленной точки и нарушением осевой динамической симметрии.

Исследования проводились в канонических переменных типа Пуанкаре $L, \rho_1, \rho_2, \lambda, \omega_1, \omega_2$, связанных с каноническими переменными Андуайе – Депри $L, G, \mathcal{H}, l, g, h$ соотношениями [1] $L = L, \rho_1 = L - G, \rho_2 = G - \mathcal{H}, \lambda = l + g + h, \omega_1 = -(g + h), \omega_2 = -h$.

Тогда функция Гамильтона, описывающая возмущенное движение гиростата, будет иметь вид

$$H = H_0 + \varepsilon(H_1 + H_2 + H_3), \quad H_0 = \frac{\rho_1(\rho_1 - 2L)}{2A} + \frac{L^2}{2C}, \quad \varepsilon = \frac{A - B}{A}$$

Здесь ε – малый параметр (A и B – моменты инерции гиростата), H_0 – невозмущенный гамильтониан (C – осевой момент инерции), а составляющие возмущающей функции H_1, H_2, H_3 можно представить так:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\rho_1(\rho_1 - 2L)}{2B} \cos^2(\lambda + \omega_1) \\ H_2 &= D \left[\frac{\alpha_1}{A} (\rho_1(\rho_1 - 2L))^{\frac{1}{2}} \sin(\lambda + \omega_1) + \frac{\alpha_2}{B} (\rho_1(\rho_1 - 2L))^{\frac{1}{2}} \cos(\lambda + \omega_1) + \frac{\alpha_3}{C} L \right] \Omega \\ H_3 &= -mg \left\{ \beta_1 \left[b \sin(\lambda + \omega_1) + \frac{b_1}{2} ((b_4 + 1) \sin(\lambda + \omega_2) + (b_4 - 1) \sin(\lambda + 2\omega_1 - \omega_2)) \right] + \right. \\ &\quad + \beta_2 \left[b \cos(\lambda + \omega_1) + \frac{b_1}{2} ((b_4 + 1) \cos(\lambda + \omega_2) + (b_4 - 1) \cos(\lambda + 2\omega_1 - \omega_2)) \right] + \\ &\quad \left. + \beta_3 (b_2 + b_3 \cos(\omega_2 - \omega_1)) \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – направляющие косинусы оси динамической симметрии ротора относительно связанных осей, Ω – относительная угловая скорость ротора ($\Omega = \text{const}$), J – его момент инерции. Кроме того, введены обозначения

$$\begin{aligned} b &= \frac{(L - \rho_1 - \rho_2)(\rho_1(\rho_2 - 2L))^{\frac{1}{2}}}{(L - \rho_1)^2}, \quad b_1 = \frac{(\rho_2(2L - 2\rho_1 - \rho_2))^{\frac{1}{2}}}{L - \rho_1}, \quad b_2 = \frac{(L - \rho_1 - \rho_2)L}{(L - \rho_1)^2} \\ b_3 &= \frac{(\rho_1\rho_2(\rho_1 - 2L)(2L - 2\rho_1 - \rho_2))^{\frac{1}{2}}}{(L - \rho_1)^2}, \quad b_4 = \frac{L}{L - \rho_1} \end{aligned}$$

$$\varepsilon D = J, \quad \beta_1 \varepsilon = x_C, \quad \beta_2 \varepsilon = y_C, \quad \beta_3 \varepsilon = z_C$$

(x_C, y_C, z_C – координаты центра масс гиростата).

Из (1) видно, что составляющая возмущающей функции εH_1 описывает возмущения,

вызванные нарушением осевой динамической симметрии гиростата, ϵH_2 – возмущения, вызванные наличием роторов, а ϵH_3 – возмущения, вызванные смещением центра масс гиростата относительно неподвижной точки.

При $\epsilon = 0$ общее решение системы канонических уравнений имеет вид

$$L = L_0 = \text{const}, \quad \rho_1 = \rho_{10} = \text{const}, \quad \rho_2 = \rho_{20} = \text{const}$$

$$\lambda = n_1 t + v_1, \quad \omega_1 = n_2 t + v_2, \quad \omega_2 = \omega_{20} = \text{const}$$

где $n_1 = -\rho_1/A + L/C$, $n_2 = (\rho_1 - L)/A$ – частоты невозмущенного движения, а v_1 и v_2 – постоянные интегрирования.

Применим к возмущающей функции $R = \epsilon(H_1 + H_2 + H_3)$ оператор усреднения $M_{\lambda, \omega_1}[R]$ [2] по быстрым угловым переменным λ и ω_1 , после чего усредненная функция Гамильтона запишется в виде

$$\bar{H} = \frac{\rho_1(\rho_1 - 2L)}{2A} + \frac{L^2}{2C} + \epsilon \left[\frac{\rho_1(\rho_1 - 2L)}{4B} + \frac{\alpha_3 D L \Omega}{C} - \beta_3 m g b_2 \right]$$

Соответствующие канонические усредненные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}}{dt} &= 0, \quad \frac{d\bar{\rho}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{\rho}_2}{dt} = 0 \\ \frac{d\bar{\lambda}}{dt} &= -\frac{\rho_1}{A} + \frac{L}{C} - \epsilon \left(\frac{\rho_1}{2B} - \frac{\alpha_3 D \Omega}{C} + \beta_3 m g b_{2,L} \right) \\ \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} &= \frac{\rho_1 - L}{A} + \epsilon \left(\frac{L - \rho_1}{2B} + \beta_3 m g b_{2,\rho_1} \right); \quad \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} = -\epsilon \beta_3 m g b_{2,\rho_2} \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$b_{2,L} = b_2 \left[\frac{2L - \rho_1 - \rho_2}{L(L - \rho_1 - \rho_2)} - \frac{2}{L - \rho_1} \right], \quad b_{2,\rho_1} = b_2 \left(\frac{2L}{L - \rho_1} - \frac{1}{L - \rho_1 - \rho_2} \right), \quad b_{2,\rho_2} = -\frac{L}{L - \rho_1 - \rho_2}$$

В результате интегрирования системы (2) найдем

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \bar{L}_0 = \text{const}, \quad \bar{\lambda} = (n_1 + N_1)t + v'_1; \quad \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_{10} = \text{const}, \quad \bar{\omega}_1 = (n_2 + N_2)t + v'_2 \\ \bar{\rho}_2 &= \bar{\rho}_{20} = \text{const}, \quad \bar{\omega}_2 = N_3 t + v_3 \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$N_1 = -\epsilon \left(\frac{\rho_1}{2B} - \frac{\alpha_3 D \Omega}{C} + \beta_3 m g b_{2,L} \right), \quad N_2 = \epsilon \left(\frac{\rho_1 - L}{2B} - \beta_3 m g b_{2,\rho_1} \right), \quad N_3 = -\epsilon \beta_3 m g b_{2,\rho_2}$$

(v'_1, v'_2, v_3 – постоянные интегрирования).

Из (3) видно, что возмущенное движение гиростата, описываемое усредненной системой уравнений (2), является псевдорегулярной прецессией.

Чтобы решить вопрос о характере движения гиростата, описываемого полной, а не усредненной системой уравнений, можно воспользоваться теоремой Колмогорова – Арнольда [3], согласно которой возмущенное движение (т.е. движение, описываемое системой, содержащей опущенные при усреднении члены) будет условно-периодическим, если невозмущенное движение не допускает собственного вырождения, т.е. выполняется неравенство

$$\text{Hess } \bar{H} = \frac{\partial(\partial \bar{H} / \partial L, \partial \bar{H} / \partial \rho_1, \partial \bar{H} / \partial \rho_2)}{\partial(L, \rho_1, \rho_2)} \neq 0 \quad (4)$$

После вычисления входящих в гессиан частных производных получим

$$\text{Hess } \bar{H} = \frac{\beta_3^2 m^2 g^2 [C(L + \rho_1)(3L - \rho_1) - 4L^2 A]}{AC(L - \rho_1)} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

Таким образом, при $C(L + \rho_1)(3L - \rho_1) \neq 4L^2 A$ выполнено неравенство (4), т.е. движение гири, описываемое усредненной системой уравнений не допускает вырождения, и следовательно, на основании теоремы Колмогорова – Арнольда [3] будет устойчиво по отношению к величинам L , ρ_1 и ρ_2 . Это в свою очередь означает, что возмущенное движение, описываемое полной системой уравнений, будет условно-периодическим при всех $t \geq t_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демин В.Г., Конкина Л.И. Новые методы в динамике твердого тела. Фрунзе.: Илим, 1989. 182 с.
2. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986, 255 с.
3. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.

Великие Луки, Москва

Поступила в редакцию
6.II.1997