

показательна фиг. 3, где четыре кривые отражают процесс набора бусинкой скорости, когда параметр $D = 1$ фиксирован, а E принимает разные значения. На кривой, соответствующей $E = 2$, участок торможения выражен очень отчетливо. Его наличие объясняется изломом производной от V по x на заднем фронте волны, когда разность квадратов производных справа и слева становится на краткое время положительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кажаяев В.В., Уткин Г.А. Движение массы вдоль струны под действием сил волнового давления // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Изд-во ГГУ, 1989. С. 112–117.
2. Весницкий А.И., Уткин Г.А. Движение тела вдоль струны под действием сил волнового давления // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 278–280.
3. Весницкий А.И., Каплан Л.Е., Уткин Г.А. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 7. Вып. 5. С. 863–866.
4. Кошелев С.В., Уткин Г.А. Существование, единственность и некоторые свойства решения задачи о бусинке на струне // Волновые задачи механики. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. С. 36–48.
5. Уткин Г.А. Постановка задач динамики упругих систем с движущимися по ним объектами // Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991. С. 4–14.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
3.06.1996

УДК 531.36

© 1997 г. Л.З. Фишман

КРИТЕРИИ ОПАСНЫХ И БЕЗОПАСНЫХ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В развитие полученных ранее результатов [1–5] даются критерии опасных и безопасных участков границ области устойчивости (ГОУ) состояний равновесия уравнений первого порядка с запаздыванием и систем уравнений второго порядка с запаздыванием, соответствующих нулевому и паре чисто мнимых корней. Используя полученные результаты, определяется характер ГОУ состояния равновесия осциллятора с запаздыванием и показано, что в отличие от осциллятора без запаздывания ГОУ может быть опасной.

Задачи, связанные с определением опасных и безопасных границ области устойчивости (ГОУ) состояний равновесия систем с запаздыванием, рассматривались в [1–11]. Были даны [6–11] способы и алгоритмы исследования устойчивости систем с запаздыванием в критических случаях, основанные на сведении их к укороченным системам без запаздывания. Получены [1, 10] формулы для величины, подобной первой ляпуновской для частных случаев уравнений первого порядка с запаздыванием и рассматриваемой ниже системы второго порядка. Для систем произвольного порядка с запаздыванием в краткой форме приведены [2, 3] критерии опасных и безопасных ГОУ состояний равновесия. Вместе с тем в [1–11] нет таких достаточно простых и удобных критериев опасных и безопасных ГОУ состояний равновесия для систем с запаздыванием, какие имеются для систем без запаздывания [12].

1. Уравнения первого порядка с запаздыванием. Рассмотрим задачу об определении опасных и безопасных ГОУ состояния равновесия уравнения

$$\dot{x} = ax + \sum_{k=1}^n b_k x(t - \tau_k) + F(x, x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)) \quad (1.1)$$

где x – скаляр, a, b_k – постоянные коэффициенты, $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \dots, \tau_n > 0$.

Предположим, что аналитическая функция $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ разлагается в окрестности точки $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 0$ в ряд, начинающийся с членов не ниже второго порядка по $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ следующего вида:

$$F = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n+1} a_{ik} x_i x_k + \sum_{1 \leq i \leq k \leq p \leq n+1} a_{ikp} x_i x_k x_p + \dots$$

где a_{ik}, a_{ikp} – постоянные коэффициенты.

Допустим, что характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = p - a - \sum_{k=1}^n b_k e^{-p\tau_k} = 0 \quad (1.2)$$

имеет или корни $p_{1,2} = \pm i\omega$, или корень $p_j = 0$ и корни p_i , удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0$.

Рассмотрим случай, когда уравнение (1.2) имеет корни

$$p_{1,2} = \pm i\omega, \quad p_j \text{ с } \operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0.$$

Запишем уравнение (1.1) в операторной форме [8]

$$dx_t(\theta)/d\theta = Lx_t(\theta) + R(x_t(\theta)), \quad x_t(\theta) = x(t + \theta) \quad (1.3)$$

$$Lx_t(\theta) = \begin{cases} \frac{dx_t(\theta)}{d\theta}, & -\tau \leq \theta < 0 \\ ax_t(0) + \sum_{k=1}^n b_k x_t(-\tau_k), & \theta = 0 \end{cases}$$

$$R(x_t(\theta)) = \begin{cases} 0, & -\tau \leq \theta < 0 \\ F(x_t(0), x_t(-\tau_1), \dots, x_t(-\tau_n)), & \theta = 0 \end{cases}$$

где $\tau = \max(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, $x(t)$ – решение уравнения (1.1) при $t > 0$ с непрерывно дифференцируемой начальной функцией $x_0(\theta) = \varphi(\theta)$.

Рассмотрим функции

$$b_j(\theta) = \exp\left(\frac{p_j \theta}{\Delta_j}\right), \quad \Delta_j = 1 + \sum_{k=1}^n b_k \tau_k \exp(-p_j \tau_k), \quad j = 1, 2$$

По способу из [8], используя замену переменных

$$y_j(t) = x_t(0) - \sum_{k=1}^n b_k \int_0^{-\tau_k} \exp(-p_j(\tau_k + v)) x_t(v) dv$$

$$z_t(\theta) = x_t(\theta) - \sum_{j=1}^2 b_j(\theta) y_j(t)$$

от уравнения (1.3) приходим к "укороченной" системе второго порядка без запаздывания

$$\dot{y}_j = p_j y_j + Q(y_1, y_2), \quad j=1,2 \quad (1.4)$$

$$Q(y_1, y_2) = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1}) = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n+1} a_{ik} \psi_i \psi_k + \sum_{1 \leq i \leq k \leq p \leq n+1} a_{ikp} \psi_i \psi_k \psi_p + \dots$$

$$\psi_k = \alpha_{k1} y_1 + \alpha_{k2} y_2 + \sum_{r+q=2} d_{rq}^{(k)} y_1^r y_2^q, \quad k=1,2,\dots,n+1$$

$$\alpha_{m+1,j} = \exp(-p_j \tau_m) / \Delta_j, \quad j=1,2; \quad m=0,1,2,\dots,n; \quad \tau_0 = 0$$

$d_{rq}^{(k)}$ – постоянные коэффициенты, определяемые ниже.

Перемножив выражения ψ_i, ψ_k, ψ_p между собой, получим функцию $Q(y_1, y_2)$ в виде полинома по (y_1, y_2)

$$Q(y_1, y_2) = \sum_{k \geq 2} \sum_{r+q=k} A_{rq} y_1^r y_2^q$$

где

$$A_{20} = \frac{1}{\Delta_1^2} \sum_{1 \leq i \leq k \leq n+1} a_{ik} \sigma_{i1} \sigma_{k1} \quad (1.5)$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \sum_{1 \leq i \leq k \leq n+1} a_{ik} (\sigma_{i1} \sigma_{k2} + \sigma_{i2} \sigma_{k1}) \quad (1.6)$$

$$A_{21} = \frac{1}{\Delta_1^2 \Delta_2} \left[\sum_{1 \leq i \leq k \leq n+1} a_{ik} (\sigma_{k1} \gamma_{11}^{(i)} + \sigma_{i1} \gamma_{11}^{(k)} + \sigma_{i2} \gamma_{20}^{(k)} + \sigma_{k2} \gamma_{20}^{(i)}) + \right. \\ \left. + \sum_{1 \leq i \leq k \leq p \leq n+1} a_{ikp} (\sigma_{i1} \sigma_{k1} \sigma_{p2} + \sigma_{i1} \sigma_{k2} \sigma_{p1} + \sigma_{i2} \sigma_{k1} \sigma_{p1}) \right]$$

$$\sigma_{m+1,j} = \exp(-p_j \tau_m), \quad j=1,2, \quad \tau_0 = 0, \quad m=0,1,2,\dots,n$$

$$\gamma_{rq}^{(1)} = \frac{A_{rq} \Delta_1^r \Delta_2^q}{\Delta(\lambda)} \left(1 - \frac{1}{\Delta_1} - \frac{1}{\Delta_2} + \sum_{k=1}^n b_k C_{rq}^{(k)} \right) \quad (1.7)$$

$$\gamma_{rq}^{(k+1)} = \exp(-\lambda \tau_k) \gamma_{rq}^{(1)} + A_{rq} C_{rq}^{(k)} \Delta_1^r \Delta_2^q$$

$$C_{rq}^{(k)} = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{(p_j - \lambda) \Delta_j} (\exp(-p_j \tau_k) - \exp(-\lambda \tau_k))$$

$$\lambda = (r-q)i\omega, \quad r+q=2, \quad k=1,2,\dots,n; \quad d_{rq}^{(p)} = \gamma_{rq}^{(p)} / (\Delta_1^r \Delta_2^q)$$

Вид остальных коэффициентов A_{rq} системы (1.4) не приводится, так как они не выходят в выражения величины, подобной первой ляпуновской.

Величина, подобная первой ляпуновской, для системы (1.4), а значит, и уравнения (1.1) находится по формуле

$$g = \operatorname{Re} A_{21} - \omega^{-1} A_{11} \operatorname{Im}(A_{20}) \quad (1.8)$$

В частном случае $n=1$, когда в уравнении (1.1) имеется только одно запаздывание $\tau_1 = \tau$, формулы (1.5), (1.6) упрощаются и принимают вид

$$A_{20} = \frac{1}{\Delta_1^2} (a_{11} + a_{12} \delta_1 + a_{22} \delta_1^2) \quad (1.9)$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} [2(a_{11} + a_{22}) + a_{12} (\delta_1 + \delta_2)] \quad (1.10)$$

$$A_{21} = \frac{1}{\Delta_1^2 \Delta_2} [2a_{11}(\gamma_{20}^{(1)} + \gamma_{11}^{(1)}) + 2a_{22}(\delta_2 \gamma_{20}^{(2)} + \delta_1 \gamma_{11}^{(2)}) + \\ + a_{12}(\gamma_{11}^{(2)} + \gamma_{20}^{(2)} + \delta_1 \gamma_{11}^{(1)} + \delta_2 \gamma_{20}^{(1)}) + 3(a_{11} + \delta_1 a_{222}) + a_{112}(2\delta_1 + \delta_2) + a_{122}(2 + \delta_2^2)] \\ \delta_1 = \exp(-p_1 \tau), \quad \delta_2 = \exp(-p_2 \tau), \quad \Delta_j = 1 + b_1 e^{-p_j \tau}$$

В формулах (1.9), (1.10) величины $\gamma_{rq}^{(1)}$, $\gamma_{rq}^{(2)}$ получаются из выражений (1.7) при $n = 1$, $\tau_1 = \tau$, $k = 1$.

В случае, когда в уравнении (1.1) $n = 1$, $\tau_1 = \tau = 1$, $a = a_{ik} = 0$, $b_1 = -\frac{\pi}{2}$ формула (1.8) приводится к виду

$$g = 3a_{111} + a_{122} - \left(\frac{3\pi}{2} a_{222} - \frac{\pi}{2} a_{112} \right)$$

и совпадает с формулой, полученной в этом случае ранее [10].

Если $g < 0$, то граница области устойчивости уравнения (1.1) безопасная, если $g > 0$ – опасная [6, 8].

Рассмотрим случай одного нулевого корня для уравнения (1.1). Пусть

$$a + \sum_{k=1}^n b_k = 0, \quad \Delta_0 = \left. \frac{d\Delta(p)}{dp} \right|_{p=0} = 1 + \sum_{k=1}^n b_k \tau_k \neq 0$$

Уравнение (1.2) в этом случае имеет однократный корень $p_1 = 0$. Пусть остальные корни p_j уравнения (1.2) удовлетворяют условию $\operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0$.

Используя в этом случае описанный ранее подход [3, 7], находим величины, подобные первой и второй ляпуновским для уравнения (1.1):

$$g_1 = \frac{1}{\Delta_0^2} \sum_{1 \leq i \leq k \leq n+1} a_{ik}, \quad g_2 = \frac{1}{\Delta_0^3} \sum_{1 \leq i \leq k \leq p \leq n+1} a_{ikp} \quad (1.11)$$

Как следует из вида уравнения (1.1) при $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = 0$, $a + \sum_{k=1}^n b_k = 0$, устойчивость состояния равновесия $x = 0$ определяется величиной $l_1 = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n+1} a_{ik}$, если $l_1 \neq 0$, и величиной $l_2 = \sum_{1 \leq i \leq k \leq p \leq n+1} a_{ikp}$, если $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$. Из формул (1.11) при сделанном предположении о том,

что $\Delta_0 \neq 0$, следует, что, если величина $l_1 \neq 0$, то граница $\Gamma: a + \sum_{k=1}^n b_k = 0$, $1 + \sum_{k=1}^n b_k \tau_k \neq 0$ области устойчивости состояния равновесия $x = 0$ уравнения (1.1) при $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = 0$ и любых $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_n > 0$ опасная. В случае, если $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$, характер границы Γ при $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = 0$ и любых $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0, \dots, \tau_n > 0$ одинаковый, если $\Delta_0 > 0$, и различный, если $\Delta_0 < 0$.

В частном случае $n = 1$, когда в уравнении (1.1) имеется только одно запаздывание $\tau_1 = \tau$, ГОУ состояния равновесия $x = 0$ уравнения (1.1), соответствующей одному нулевому корню является полупрямая $a + b_1 = 0$, $a < 1/\tau$, величина $\Delta_0 = 1 - a\tau > 0$. Поэтому в случае $n = 1$ характер границы $a + b_1 = 0$, $a < 1/\tau$ один и тот же при $\tau = 0$ и любом $\tau > 0$ в случаях, когда $l_1 \neq 0$ или когда $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$.

Пример. Проиллюстрируем отыскание величины g с помощью формул (1.7)–(1.10) на примере известного уравнения Райта [13]

$$\dot{x} = -\alpha x(t-1)(1+x) \quad (1.12)$$

при $\alpha = \alpha_1 = \pi/2$.

Уравнение (1.12) – частный случай уравнения (1.1). Для него величины $a = 0$, $b_1 = -\alpha$, $a_{12} = -\alpha$, $n = \tau_1 = \tau = 1$.

При $\alpha = \alpha_1$ характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = p + \alpha \exp(-p) = 0$$

имеет корни $p_{1,2} = \pm i\pi/2$ и p_j с $\operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0$.

По формулам (1.7), (1.9), (1.10) получаем

$$A_{20} = \alpha_1 i / \Delta_1^2, \quad A_{11} = 0$$

$$\gamma_{20}^{(1)} = A_{20} \Delta_1^2 (1 - 1/\Delta_1 - 1/\Delta_2 - \alpha_1 C_{20}^{(1)}) / \Delta^* \quad (1.13)$$

$$\gamma_{20}^{(2)} = -\gamma_{20}^{(1)} + A_{20} \Delta_1^2 C_{20}^{(1)}, \quad C_{20}^{(1)} = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{(p_j - i\pi)\Delta_j} (\delta_j + 1)$$

$$\Delta^* = -\pi/2 + i\pi, \quad \Delta_1 = 1 + i\pi/2, \quad \Delta_2 = 1 - i\pi/2, \quad \delta_1 = -i, \quad \delta_2 = i$$

$$A_{21} = -\alpha_2 (\gamma_{20}^{(2)} + \delta_2 \gamma_{20}^{(1)}) / (\Delta_1^2 \Delta_2) \quad (1.14)$$

Из (1.13), (1.14) при $\alpha = \alpha_1$ по формуле (1.8) получаем выражение

$$g = \operatorname{Re} A_{21} = -(3\pi - 2)/10 < 0$$

совпадающее с полученным ранее [9, 10].

2. Системы уравнений второго порядка с запаздыванием. Рассмотрим задачу об определении опасных и безопасных ГОУ состояния равновесия системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_l &= a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + b_{l1}x_1(t-\tau) + b_{l2}x_2(t-\tau) + \\ &+ F_l(x_1, x_2, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)), \quad l=1,2, \quad \tau > 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a_{lk}, b_{lk} ($k=1,2$) – постоянные коэффициенты.

Предположим, что аналитические функции $F_l(x_1, x_2, x_3, x_4)$ разлагаются в окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ в ряды, начинающиеся с членов не ниже второго порядка по (x_1, x_2, x_3, x_4) следующего вида:

$$F_l = F_l^{(2)} + F_l^{(3)} + \dots, \quad F_l^{(2)} = \sum_{1 \leq i \leq k \leq 4} a_{lik} x_i x_k \quad (2.2)$$

$$F_l^{(3)} = \sum_{1 \leq i \leq k \leq p \leq 4} a_{likp} x_i x_k x_p$$

где a_{lik}, a_{likp} – постоянные коэффициенты.

Характеристическое уравнение для состояния равновесия системы (2.1) имеет вид

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p - c_{11}(p) & -c_{12}(p) \\ -c_{21}(p) & p - c_{22}(p) \end{vmatrix} = 0 \quad (c_{lk}(p) = a_{lk} + b_{lk}e^{-p\tau}) \quad (2.3)$$

Допустим, что уравнение (2.3) имеет простые корни $p_{1,2} = \pm i\omega$ и корни p_j с $\operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0$.

Обозначим через A и B матрицы с элементами a_{lk} и b_{lk} ($l, k=1,2$), через $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ – вектор с компонентами $F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Запишем систему (2.1) в операторной форме [8]

$$dx_t(\theta)/d\theta = Lx_t(\theta) + R(x_t(\theta)), \quad x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad (2.4)$$

$$Lx_t(\theta) = \begin{cases} dx_t(\theta)/d\theta, & -\tau \leq \theta < 0 \\ Ax_t(0) + Bx_t(-\tau), & \theta = 0 \end{cases}, \quad R(x_t(\theta)) = \begin{cases} 0, & -\tau \leq \theta < 0 \\ F(x_t(0)), \quad x_t(-\tau), & \theta = 0 \end{cases}$$

где $x(t)$ – вектор с компонентами $x_1(t), x_2(t)$, представляющий собой решение системы (2.1) при $t > 0$ с непрерывно дифференцируемой начальной вектор-функцией $x_0(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Пусть $\Delta_{21}(p_j)$ – отличные от нуля алгебраические дополнения элемента второй строки и первого столбца определителей $\Delta(p_j)$ ($j=1,2$).

Рассмотрим векторы $b_j(\theta)$ с компонентами

$$b_j^{(i)}(\theta) = \exp(p_j \theta) \Delta_{2i}(p_j) / \Delta_j, \quad i, j = 1, 2$$

$$\Delta_j = \Delta_{21}(p_j) d\Delta(p) / dp \Big|_{p=p_j}$$

где $\Delta_{2i}(p_j)$ – алгебраические дополнения элементов второй строки и i -го столбца определителей $\Delta(p_j)$.

По способу из [8], используя замену переменных

$$y_j(t) = \sum_{l=1}^2 \Delta_{l1}(p_j) \left[x_{lt}(0) + \int_{-\tau}^0 \exp[-p_j(v+\tau)] \sum_{k=1}^2 x_{kt}(v) b_{lk} dv \right]$$

$$z_t(\theta) = x_t(\theta) - \sum_{j=1}^2 b_j(\theta) y_j(t)$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – скалярные переменные, $z(t)$ – векторная переменная, от системы (2.4) приходим к "укороченной" системе второго порядка без запаздывания

$$\dot{y}_j = p_j y_j + Q_j(y_1, y_2), \quad j = 1, 2 \quad (2.5)$$

$$Q_j(y_1, y_2) = \sum_{l=1}^2 \Delta_{l1}(p_j) F_l(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) =$$

$$= \sum_{l=1}^2 \Delta_{l1}(p_j) \left[\sum_{1 \leq i \leq k \leq 4}^2 a_{lik} \psi_i \psi_k + \sum_{1 \leq i \leq p \leq 4} a_{likp} \psi_i \psi_k \psi_p + \dots \right]$$

$$\alpha_{kj} = b_j^{(k)}(0) = \Delta_{2k}(p_j) / \Delta_j \quad (1 \leq k \leq 2)$$

$$\alpha_{kj} = b_j^{(k)}(-\tau) = \exp(-p_j \tau) \alpha_{k-2,j} \quad (3 \leq k \leq 4), \quad j = 1, 2$$

$$\psi_k = \alpha_{k1} y_1 + \alpha_{k2} y_2 + \sum_{r+q=2} d_{rq}^{(k)} y_1^r y_2^q, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

где y_2 – комплексно-сопряженная к y_1 переменная, $d_{rq}^{(k)}$ – постоянные величины, определяемые ниже.

Функции $Q_j(y_1, y_2)$ представляются в виде

$$Q_j(y_1, y_2) = \sum_{k=2}^3 \sum_{r+q=k} A_{rq}^{(j)} y_1^r y_2^q + \dots, \quad A_{rq}^{(j)} = \sum_{l=1}^2 \Delta_{l1}(p_j) D_{rq}^{(l)} \quad (2.6)$$

Здесь

$$D_{11}^{(l)} = 2 \sum_{i=1}^4 a_{lii} \alpha_{i1} \alpha_{i2} \cdot \sum_{1 \leq i \leq k \leq 4} a_{lik} (\alpha_{i1} \alpha_{k2} + \alpha_{i2} \alpha_{k1}) \quad (2.7)$$

$$D_{20}^{(l)} = \sum_{i=1}^4 a_{lii} \alpha_{i1}^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq 4} a_{lik} \alpha_{i1} \alpha_{k1}, \quad D_{21}^{(l)} = S_1^{(l)} + S_2^{(l)}$$

$$S_1^{(l)} = \sum_{1 \leq i \leq k \leq p \leq 4} a_{likp} (\alpha_{i1} \alpha_{k1} \alpha_{p2} + \alpha_{i1} \alpha_{k2} \alpha_{p1} + \alpha_{i2} \alpha_{k1} \alpha_{p1})$$

$$S_2^{(l)} = \sum_{1 \leq i \leq k \leq 4} a_{lik} (\alpha_{i2} d_{20}^{(k)} + \alpha_{k2} d_{20}^{(i)} + \alpha_{k1} d_{11}^{(i)} + \alpha_{i1} d_{11}^{(k)})$$

Величины $d_{rq}^{(i)} = d_{rq0}^{(i)}$ ($1 \leq i \leq 2$), $d_{rq}^{(i)} = d_{rq1}^{(i-2)}$ ($3 \leq i \leq 4$). Величины $d_{rq0}^{(1)}$, $d_{rq1}^{(1)}$ – компоненты двумерных векторов

$$d_{rq0} = \chi^{-1}(\lambda) \left(D_{rq} - \sum_{j=1}^2 A_{rq}^{(j)} \alpha_j + B C_{rq} \right), \quad d_{rq1} = e^{-\lambda \tau} d_{rq0} + C_{rq}$$

$$C_{rq} = \sum_{j=1}^3 A_{rq}^{(j)} \frac{1}{p_j - \lambda} (e^{-p_j \tau} - e^{-\lambda \tau}) \alpha_j$$

$$\chi(\lambda) = (\lambda E - A - B e^{-\lambda \tau}), \quad \lambda = (r - q)i\omega, \quad r + q = 2, \quad q = 0, 1$$

Векторы D_{rq} и α_j имеют компоненты $D_{rq}^{(1)}$, $D_{rq}^{(2)}$ и α_{1j} , α_{2j} .

Из (2.6), (2.7) находятся коэффициенты $A_{20}^{(1)}$, $A_{11}^{(1)}$, $A_{21}^{(1)}$.

Для системы (2.5) первая ляпуновская величина выражается через коэффициенты $A_{20}^{(1)}$, $A_{11}^{(1)}$, $A_{21}^{(1)}$ следующим образом:

$$g = \operatorname{Re} A_{21}^{(1)} - \omega^{-1} A_{11}^{(1)} \operatorname{Im}(A_{20}^{(1)}) \quad (2.8)$$

В частном случае, когда в (2.2) $F_l^{(2)} = 0$, формула (2.8) упрощается

$$g = \operatorname{Re} A_{21}^{(1)} = \operatorname{Re} \sum_{l=1}^r \Delta_{11}(p_l) S_1^{(l)}$$

Величина g для системы (2.1) будет величиной, подобной первой ляпуновской [8].

Если $g < 0$, то ГОУ система (2.1) безопасная, если $g > 0$ – опасная.

Отметим, что так как система (1.1) – частный случай системы с запаздыванием, рассмотренной в [2], то формулы для коэффициентов $A_{rq}^{(j)}$ могут быть получены из соответствующих формул, приведенных в [2].

Заметим, что величина g может находиться для системы (1.1) по формуле (2.8) также и в том случае, когда функции $F_l(x_1, x_2, x_3, x_4)$ только C^r – гладкие ($r \geq 3$).

Пример. С помощью полученного критерия определим характер ГОУ состояния равновесия осциллятора с запаздыванием, уравнение которого

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \dot{x}(t - \tau) [\alpha + \beta x(t - \tau) + \gamma x^2(t - \tau)] \quad (2.9)$$

где $\alpha, \beta, \gamma < 0$ – параметры.

Это уравнение – частный случай системы (2.1).

Характеристическое уравнение для состояния равновесия $x = 0$ уравнения (2.9) при $\alpha = 0$ имеет корни $p_{1,2} = \pm i$.

По формулам (2.6), (2.7) при $\alpha = 0$ находим для уравнения (2.9) коэффициенты

$$A_{20}^{(1)} = \beta \alpha_{31} \alpha_{41}, \quad A_{11}^{(1)} = 0, \quad A_{21}^{(1)} = \beta (\alpha_{32} d_{20}^{(4)} + \alpha_{42} d_{20}^{(3)} + \alpha_{31} d_{11}^{(4)} + \alpha_{41} d_{11}^{(3)}) + \\ + \gamma (\alpha_{31}^2 \alpha_{42} + 2 \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{42})$$

Здесь

$$d_{11}^{(k)} = 0, \quad d_{20}^{(k)} = A_{20}^{(1)} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{p_j - 2i} (\exp(-p_j \tau) - \exp(-2i\tau)) \alpha_{k-2,j},$$

$$\alpha_{1j} = 1/\Delta_j, \quad \alpha_{2j} = p_j \alpha_{1j}, \quad \alpha_{3j} = \exp(-p_j \tau)/\Delta_j, \quad \alpha_{4j} = p_j \alpha_{3j},$$

$$\Delta_1 = 2i, \quad \Delta_2 = -2i, \quad k = 3, 4$$

При $\alpha = 0$ по формуле (2.8) найдем

$$g = \operatorname{Re} A_{21}^{(1)} = \frac{1}{8} \gamma \cos \tau - \frac{1}{24} \beta^2 \sin 3\tau \quad (2.10)$$

Так как по предположению $\gamma < 0$, то из выражения (2.10) получаем, что граница $\alpha = 0$, безопасная при $0 \leq \tau \leq \pi/3$, становится опасной при $\tau = \pi$.

Работа поддержана программой "Университеты России" по направлению "Фундаментальные проблемы математики и механики" (1.5.21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фишман Л.З. О рождении периодического решения у систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1976. № 12. С. 96–107.
2. Фишман Л.З. Критерий определения опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 185–187.
3. Фишман Л.З. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием в случае нулевого корня // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1830–1832.
4. Фишман Л.З. Критерии опасных и безопасных границ для уравнений с запаздыванием // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. 3-й конф. Н. Новгород, 1993. 190 с.
5. Фишман Л.З. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием в случае двух пар чисто мнимых корней // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 12. С. 2020–2024.
6. Мышкис А.Д., Шиманов С.Н., Эльсгольц Л.Э. Устойчивость и колебания систем с запаздыванием // Труды междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Киев, 1961, Киев: Изд-во АН УССР, 1963. Т. 2. С. 241–267.
7. Шиманов С.Н. Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 3. С. 447–457.
8. Шиманов С.Н. Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2. № 3. С. 467–480.
9. Колесов Ю.С., Швитра Д.И. Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979. 146 с.
10. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
11. Хейл Дж.К. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
13. Hutchinson G.E. Circular causal systems in ecology // Ann. N.Y. Acad. Sci. 1948. V. 50. P. 221–246.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
23.XI.1995