

УДК 539.3:531.39

© 1997 г. Н.В. Дерендяев, И.Н. Солдатов

О ДВИЖЕНИИ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ ВДОЛЬ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СТРУНЫ

Рассматривается задача Коши для системы уравнений, описывающих безотрывное движение точечной массы вдоль струны. Показано, что задача может быть сведена к начальной задаче для двух интегро-дифференциальных уравнений. Задача с нулевыми начальными скоростями точек струны сводится к задаче Коши для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Значительное упрощение возможно для задачи с нулевыми начальными перемещениями. Подробно рассматривается случай удара по струне.

При рассмотрении задач о самосогласованном движении объектов по упругим направляющим наглядно раскрывается суть понятий волнового давления, импульса волны и т.п. Задача о движении точечной массы вдоль колеблющейся бесконечной струны, простая по формулировке, уже несет в себе основные трудности подобного типа задач – переменные границы и нелинейность.

1. Точечная масса – математическая идеализация шарика малого радиуса с узким каналом ("бусинки"), через который струна проходит без трения. Уравнения, описывающие эту динамическую систему, имеют вид [1–5]

$$V_{tt} = c^2 V_{xx} = 0, \quad c = \sqrt{N/\rho} \quad (1.1)$$

$$m\ddot{V}(t, l(t)) = \rho(c^2 - \dot{l}^2)[V_x], \quad m\ddot{l} = -\frac{\rho}{2}(c^2 - \dot{l}^2)[V_x^2]$$

Начальные условия предполагаются заданными на всей действительной оси:

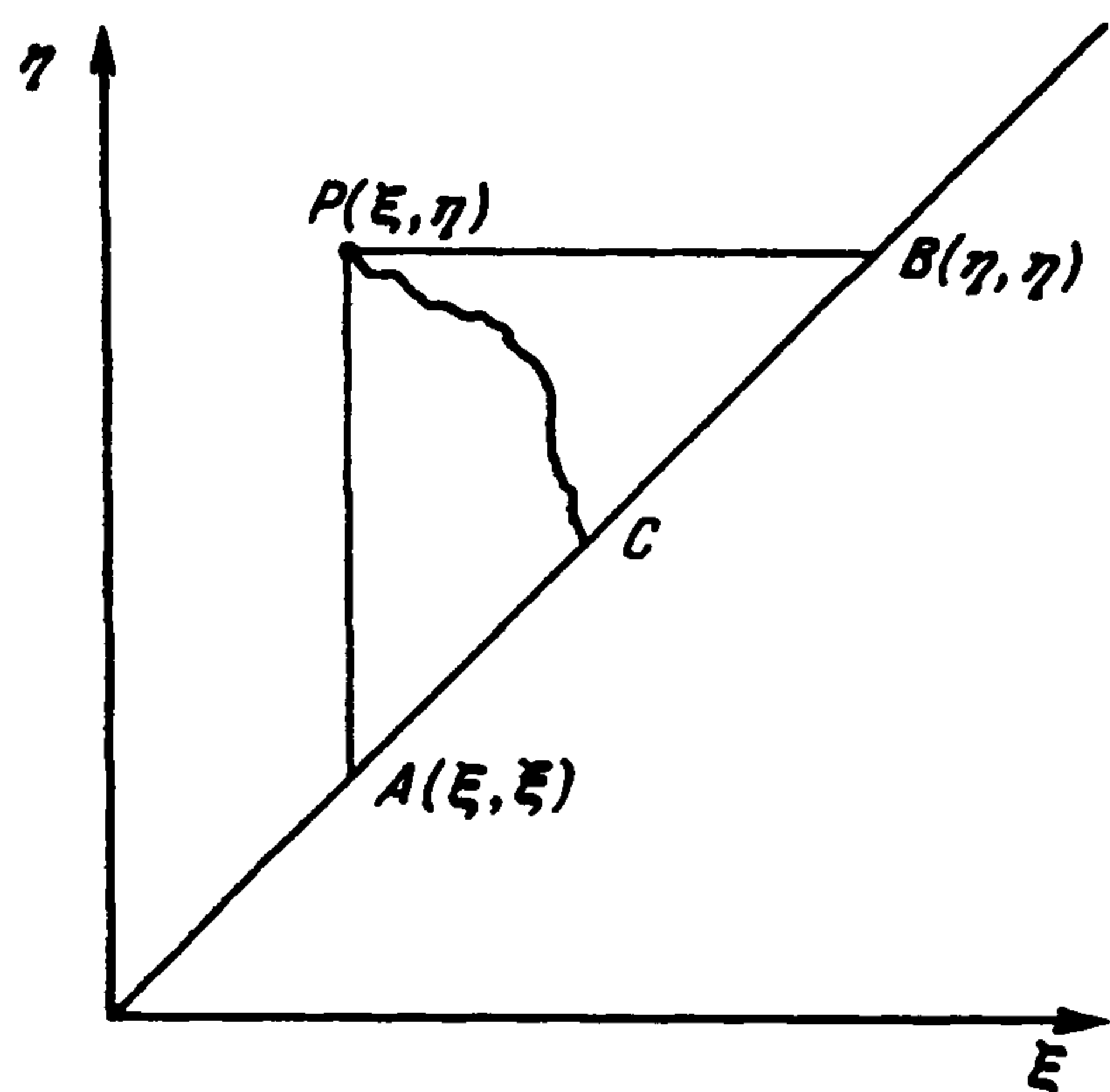
$$V(0, x) = \varphi(x), \quad V_t(0, x) = \psi(0, x) \quad (1.2)$$

где N – натяжение струны, ρ – погонная плотность, квадратные скобки означают разность предельных значений, заключенного в них выражения справа и слева от границы $x = l(t)$, $V(t, l(t))$ – поперечное отклонение "бусинки", $l(t)$ -ее – продольное смещение вдоль струны, точка над символом означает обыкновенную производную по времени, индексы t, x – частные производные по времени и пространственной переменной соответственно. Дополним задачу (1.1), (1.2) следующими начальными условиями для точечной массы:

$$l(0) = l_0, \quad \dot{l}(0) = w, \quad V(0, l_0) = \varphi(l_0), \quad V_t(0, l_0) = \psi(l_0)$$

2. Ряд выкладок становится проще, если перейти к характеристическим переменным $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$. Представим, что продольное смещение бусинки отображено на плоскость характеристических переменных и в момент t на этой плоскости бусинка имеет координаты ξ, η (точка $P(\xi, \eta)$ на фиг. 1). Из точки $P(\xi, \eta)$ проведем характеристики волнового уравнения до пересечения с прямой, $\eta = \xi$, на которой заданы начальные условия. Используя формулу Гаусса

$$\iint_D V_{\xi\eta} d\xi d\eta = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (V_\eta d\eta - V_\xi d\xi)$$



Фиг. 1

после интегрирования вдоль контуров фигур APC и CPB (фиг. 1), получим, возвращаясь к исходным переменным x, t с учетом начальных условий (1.2)

$$\begin{aligned} c \int_0^t V_x^- dt + \frac{1}{c} \int_{l_0}^{l(t)} V_t^- dx &= V(t, l(t)) - \varphi(l - ct) - \\ &- \frac{1}{c} \int_{l-ct}^{l_0} \psi(x) dx \\ c \int_0^t V_x^+ dt + \frac{1}{c} \int_{l_0}^{l(t)} V_t^+ dx &= -V(t, l(t)) + \varphi(l + ct) + \\ &+ \frac{1}{c} \int_{l_0}^{l+ct} \psi(x) dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

где индекс минус у символа означает, что берется предельное значение слева от кривой CP, плюс – справа.

Тот факт, что струна не рвется в той точке, где находится бусинка, может быть выражен формулой

$$V_t^+ + V_x^+ l = V_t^- + V_x^- l \quad (2.2)$$

Используя выражение (2.2) и вычитая из второго соотношения (2.1) первое, получим

$$\int_0^t \left(c - \frac{l^2}{c} \right) [V_x] dt = -2V(l, t) + \varphi(l + ct) + \varphi(l - ct) + \frac{1}{c} \int_{l-ct}^{l+ct} \psi(x) dx \quad (2.3)$$

Проинтегрируем один раз второе уравнение (1.1) и в его правую часть вместо интеграла подставим правую часть выражения (2.3), позволяющего выразить этот интеграл через функции начального условия и $V(l, t)$. Получим

$$\dot{V} + \frac{2\rho c}{m} V = \frac{\rho c}{m} \left\{ \varphi(l + ct) + \varphi(l - ct) + \frac{1}{c} \int_{l-ct}^{l+ct} \psi(x) dx \right\} \quad (2.4)$$

Из (2.4) нетрудно найти поперечное отклонение точечной массы, если известно ее продольное смещение.

Выведем уравнение для продольного перемещения. Продифференцируем по времени уравнения (2.1), а затем сложим их, используя формулу (2.2). Тогда

$$\left(c - \frac{l^2}{c} \right) (V_x^+ + V_x^-) = -\frac{2l}{c} \dot{V}(l, t) + \Phi^+(l, t) + \Phi^-(l, t) \quad (2.5)$$

$$\Phi^\pm(l, t) = \pm \varphi'(l \pm ct)(l \pm c) + \frac{1}{c} \psi(l \pm ct)(l \pm c)$$

где штрих означает обыкновенную производную.

Продифференцируем уравнение (2.3) по времени и перемножим левую и правую его части с соответствующими частями уравнения (2.5), а затем умножим на $\rho/[2(c^2 - l^2)]$. Левая часть полученного уравнения совпадает с правой частью последнего уравнения системы (1.1), описывающего продольное перемещение бусинки. Отсюда для продольного ускорения точечной массы имеем выражение

$$\ddot{l} = -\frac{\rho c^2}{2m(c^2 - l^2)} \{-2\dot{V}(l, t) + \Phi^+(l, t) - \Phi^-(l, t)\} \left\{ -\frac{2l}{c} \dot{V}(l, t) + \Phi^+(l, t) + \Phi^-(l, t) \right\} \quad (2.6)$$

Таким образом, для определения продольного и поперечного смещений бусинки имеем систему из двух связанных уравнений (2.4) и (2.6).

3. Заметим, что если в начальный момент времени струна отпускается без сообщения ее точкам скоростей, то приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений. При малой величине безразмерного числа $\rho c T_0/m$ (T_0 – характерное время) для ускорения точечной массы справедливо приближенное выражение

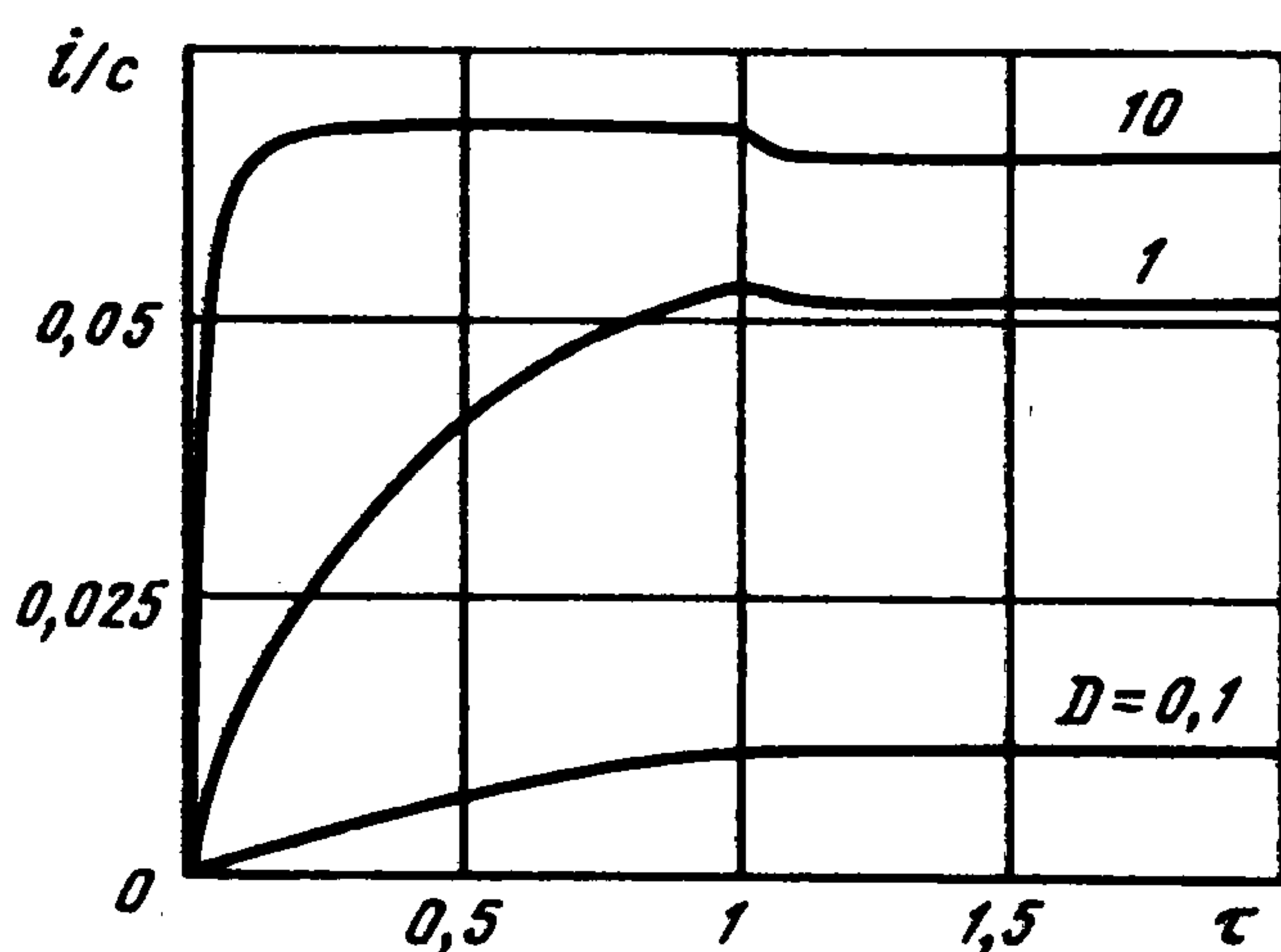
$$\ddot{l} \approx -\frac{\rho}{2m} \{c^2 \varphi'^2(\chi) - c^2 \varphi'^2(\zeta) + \psi^2(\chi) - \psi^2(\zeta) + 2c\varphi'(\chi)\psi(\chi) + 2c\varphi'(\zeta)\psi(\zeta)\},$$

$$\chi = l + ct, \quad \zeta = l - ct$$

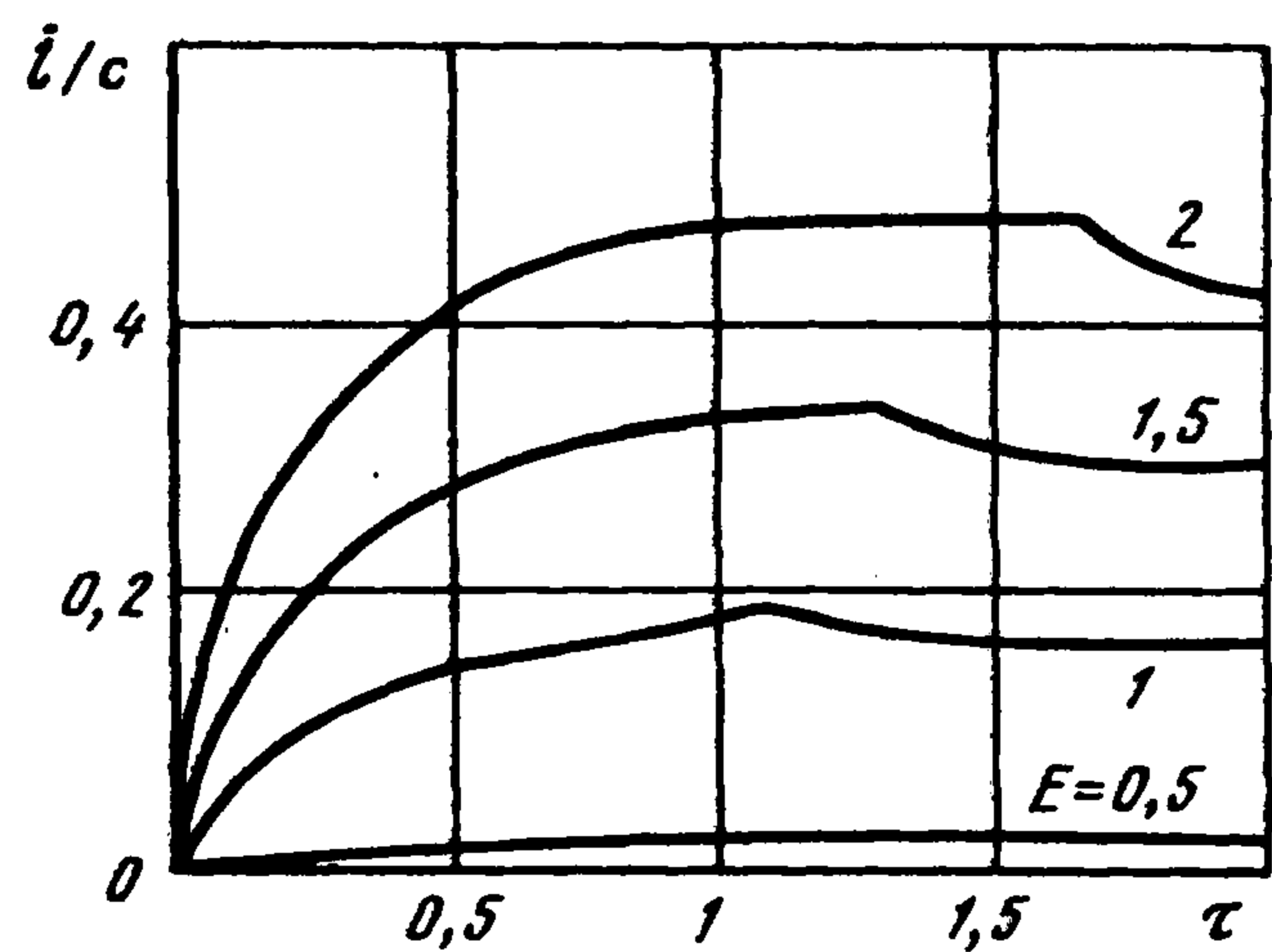
которое, в частности, при нулевых начальных скоростях точек струны приобретает простой вид

$$\ddot{l} \approx -\frac{\rho c^2}{2m} \{\varphi'^2(\chi) - \varphi'^2(\zeta)\} \quad (3.1)$$

Определенная трудность в нахождении из последнего выражения перемещения бусинки при малых t заключается в том, что в правую часть формулы (3.1) входит неявная функция от l .



Фиг. 2



Фиг. 3

4. Система уравнений (2.4), (2.6) значительно упрощается в достаточно интересном случае удара молотком по отрезку струны $[x_1, x_2]$ (для определенности будем считать этот отрезок лежащим левее бусинки), т.е. при задании начальных условий вида

$$V(0, x) = 0, \quad V_t(0, x) = \psi_0 H(x - x_1) H(x_2 - x)$$

где $H(x)$ – единичная функция Хевисайда. Система приобретает вид

$$\dot{V} + \frac{2\rho c}{m} V = \frac{\rho}{m} \psi_0 H(x_2 - \zeta) \{x_2 - \zeta H(\zeta - x_1) - x_1 H(x_1 - \zeta)\}, \quad \zeta = l - ct$$

$$\ddot{l} = -\frac{\rho c^2}{2m(c^2 - \dot{l}^2)} \left\{ \frac{4\dot{l}}{c} \dot{V}^2 - \frac{\psi_0^2}{c^2} H(\zeta - x_1) H(x_2 - \zeta) (i - c)^2 \right\}$$

На фиг. 2 дана зависимость скорости бусинки $\dot{l}/c$ от безразмерного времени $\tau = tc/(x_2 - x_1)$ для разных значений $D = \rho(x_2 - x_1)/m$, когда другой безразмерный комплекс $E = \psi/c$ постоянен и равен 0,5. При $D < 1$ скорость бусинки постепенно увеличивается и плавно подходит к некоторому постоянному значению, которое не меняется вследствие того, что волна, обогнав точечную массу, перестает на нее воздействовать. Начиная со значений D , близких к единице и выше, становится заметно, что выход скорости бусинки на режим движения с постоянной скоростью осуществляется немонотонным образом: на заднем фронте волны есть небольшой участок торможения. Наличие этого участка – довольно интересный факт, если привлекать для объяснения динамических эффектов взаимодействия бусинки и струны популярную концепцию волнового давления. Пожалуй, еще более

показательна фиг. 3, где четыре кривые отражают процесс набора бусинкой скорости, когда параметр $D = 1$ фиксирован, а E принимает разные значения. На кривой, соответствующей $E = 2$, участок торможения выражен очень отчетливо. Его наличие объясняется изломом производной от V по x на заднем фронте волны, когда разность квадратов производных справа и слева становится на краткое время положительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кажаяев В.В., Уткин Г.А. Движение массы вдоль струны под действием сил волнового давления // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Изд-во ГГУ, 1989. С. 112–117.
2. Весницкий А.И., Уткин Г.А. Движение тела вдоль струны под действием сил волнового давления // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 278–280.
3. Весницкий А.И., Каплан Л.Е., Уткин Г.А. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 7. Вып. 5. С. 863–866.
4. Кошелев С.В., Уткин Г.А. Существование, единственность и некоторые свойства решения задачи о бусинке на струне // Волновые задачи механики. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. С. 36–48.
5. Уткин Г.А. Постановка задач динамики упругих систем с движущимися по ним объектами // Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991. С. 4–14.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
3.06.1996

УДК 531.36

© 1997 г. Л.З. Фишман

КРИТЕРИИ ОПАСНЫХ И БЕЗОПАСНЫХ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В развитие полученных ранее результатов [1–5] даются критерии опасных и безопасных участков границ области устойчивости (ГОУ) состояний равновесия уравнений первого порядка с запаздыванием и систем уравнений второго порядка с запаздыванием, соответствующих нулевому и паре чисто мнимых корней. Используя полученные результаты, определяется характер ГОУ состояния равновесия осциллятора с запаздыванием и показано, что в отличие от осциллятора без запаздывания ГОУ может быть опасной.

Задачи, связанные с определением опасных и безопасных границ области устойчивости (ГОУ) состояний равновесия систем с запаздыванием, рассматривались в [1–11]. Были даны [6–11] способы и алгоритмы исследования устойчивости систем с запаздыванием в критических случаях, основанные на сведении их к укороченным системам без запаздывания. Получены [1, 10] формулы для величины, подобной первой ляпуновской для частных случаев уравнений первого порядка с запаздыванием и рассматриваемой ниже системы второго порядка. Для систем произвольного порядка с запаздыванием в краткой форме приведены [2, 3] критерии опасных и безопасных ГОУ состояний равновесия. Вместе с тем в [1–11] нет таких достаточно простых и удобных критериев опасных и безопасных ГОУ состояний равновесия для систем с запаздыванием, какие имеются для систем без запаздывания [12].