

УДК 539.3

© 1997 г. Ю.И. Няшин, С.А. Чернопазов

**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ
ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ТРЕНИЕМ**

Рассматривается задача контактного взаимодействия упругого тела с жесткой опорой с трением в области контакта, подчиняющимся закону Кулона. Предполагается, что область контакта известна и не изменяется при нагружении, перемещения и их градиенты малы. Исследуется влияние касательных перемещений на контактное давление. Формулируются достаточные условия, при выполнении которых это влияние отсутствует. С помощью оператора влияния перемещений на контактное давление доказывается существование и единственность обобщенного решения вариационной постановки задачи.

Постановка в приращениях контактной задачи для общего случая граничных условий на поверхности контакта с попыткой доказательства существования и единственности обобщенного решения приведена в [1]. Рассматривались ([2–4]) частные случаи контактных задач с трением, причем доказательства существования и единственности обобщенного решения выполнены только в предположении, что величина силы трения в точках скольжения от решения не зависит (задача с заданным нормальным давлением или трением). Задачи, в которых контактная поверхность и давление на ней не зависят от касательных напряжений, исследованы в [5–7]. Для этого класса задач сформулирован вариационный принцип и с его помощью установлены существование и единственность решения. Приведен [8] частный случай задачи с трением, когда решение не существует. Вопрос существования и единственности обобщенных решений задач с трением в общей постановке остается открытым даже для линейно-упругих материалов.

Цель работы – дальнейшее развитие вариационных методов исследования контактного взаимодействия с учетом сил трения, включая рассмотрение вопроса существования и единственности обобщенного решения.

1. Основные ограничения на постановку задачи. Формулировка граничных условий в приращениях на поверхности контакта. Рассматривается подход к решению упругой контактной задачи с трением, подчиняющимся закону Кулона. В связи с трудностями при исследовании разрешимости задач с трением ([2], с. 148) приняты упрощения, основные из них следующие: область контакта известна и при догрузке не изменяется, перемещения и их градиенты малы, траектории движения точек контактной поверхности по отношению к жесткой опоре – прямые, рассматривается случай догрузки, когда нормальная реакция жесткой опоры в каждой точке отлична от нуля.

Последнее ограничение связано с тем, что при отсутствии нормальной реакции на момент догрузки направления относительных перемещений при догрузке заранее не известны и должны находиться из решения задачи. Формулировка дифференциальной задачи и построение вариационного принципа без учета последнего ограничения не представляет трудности (см., например [1]), однако доказать существование и единственность решения тогда не удастся.

Отметим также, что принятые предположения переводят рассматриваемую задачу в разряд модельных. Однако возможное обобщение предложенного метода на случай кон-

тактного взаимодействия двух деформируемых тел может иметь практические приложения для решения задач температурных и прессовых посадок.

Контактные граничные условия в приращениях сформулируем при учете принятых выше допущений. В каждой точке поверхности контакта L_c выполняется закон трения Кулона:

в области скольжения

$$v \neq 0, \quad |\sigma_\tau| = f|\sigma_n|, \quad \exists \lambda > 0: \quad \sigma_\tau = -\lambda v \quad (1.1)$$

в области сцепления

$$v = 0, \quad |\sigma_\tau| \leq f|\sigma_n| \quad (1.2)$$

где σ_n, σ_τ – проекции реакции опоры на внешнюю единичную нормаль n и касательную τ к поверхности контакта L_c , ось τ направлена вдоль траектории относительного движения, v – проекция скорости точки тела относительно жесткой опоры на ось τ , f ($1 > f > 0$) – коэффициент трения. В точках поверхности контакта, где сила трения (или сцепления) отлична от нуля, определим касательную τ по условию сонаправленности с этой силой.

Для учета истории нагружения решение задачи будем искать в приращениях, причем величину догрузки выберем так, чтобы в каждой точке поверхности контакта L_c приращения компонент вектора напряжений имели более высокий порядок малости по сравнению с его максимально возможной касательной составляющей на момент догрузки, равной $f|\sigma_n|$. Это условие позволяет определить направление возможного относительного перемещения (в сторону, противоположную положительному направлению касательной) в точках предельного равновесия и в точках, где реакция опоры лежит в малой окрестности поверхности конуса трения, а также исключает возможность отрыва контактной поверхности от опоры при догрузке.

Пусть в произвольный момент времени поверхность контакта состоит из поверхности сцепления $L_0 = \{x \in L_c \mid |\sigma_\tau| < f|\sigma_n|\}$ и поверхности $L_1 = \{x \in L_c \mid |\sigma_\tau| = f|\sigma_n|\}$, которая объединяет поверхности скольжения ($v \neq 0$) и предельного равновесия ($v = 0$). При этом $L_c = L_0 \cup L_1$.

После догрузки поверхность контакта может быть представлена в виде объединения двух частей:

$$L_c = L_0^* \cup L_1^*, \quad L_0^* = \{x \in L_c \mid \delta u = 0\}, \quad L_1^* = \{x \in L_c \mid \delta u \neq 0\}$$

где δu – перемещения точек из контактной поверхности относительно жесткой опоры при догрузке. Область L_0^* (область L_1^*) образуют точки поверхности контакта, в которых при догрузке имело место сцепление (произошли сдвиги).

Далее будем полагать, что сдвиг при догрузке происходит непрерывно. Тогда в области L_1^* выполняется условие

$$|\sigma_\tau + \delta\sigma_\tau| = f|\sigma_n + \delta\sigma_n| \quad (1.3)$$

где $\delta\sigma_\tau$ и $\delta\sigma_n$ – приращения касательной и нормальной компонент реакций жесткой опоры при догрузке. При учете равенств (1.1), (1.2) и принятого допущения о виде траекторий движения точек контактной поверхности заключаем, что относительные перемещения на поверхности контакта удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \delta u_n &= 0, \quad \delta u_b = 0 \quad \text{на } L_c \\ \delta u_\tau &= 0 \quad \text{на } L_0^*, \quad \delta u_\tau < 0 \quad \text{на } L_1^* \end{aligned} \quad (1.4)$$

$\delta u_b = 0$ – проекция перемещения на ось, перпендикулярную нормали n и касательной

т. Окончательно граничные условия при учете соотношений (1.3) и (1.4) сформулируем следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta u_n &= 0, \quad \delta u_b = 0 \\ \delta u_\tau &= 0 \Rightarrow \sigma_\tau + \delta\sigma_\tau + f(\sigma_n + \delta\sigma_n) \leq 0 \\ \delta u_\tau &< 0 \Rightarrow \sigma_\tau + \delta\sigma_\tau + f(\sigma_n + \delta\sigma_n) = 0\end{aligned}\tag{1.5}$$

2. Дифференциальная постановка. Рассматривается квазистатический процесс деформирования упругого тела, занимающего область $\bar{S}$ в R^3 с регулярной ([4], с. 197) границей L , $\bar{S} = S \cup L$, причем граница L разбита на три попарно не пересекающиеся части: $L = L_u \cup L_c \cup L_\sigma$. На части границы L_u заданы кинематические граничные условия, на L_σ – силы, на L_c – контактные граничные условия. Выберем систему отсчета, по отношению к которой жесткая опора неподвижна и запишем в ней уравнения и граничные условия задачи

$$\nabla \cdot \delta \tilde{\sigma} + \delta = 0, \quad \forall x \in S \tag{2.1}$$

$$\delta \tilde{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \delta u + \delta u \nabla), \quad \delta \tilde{\sigma} = \tilde{\Phi} \cdot \delta \tilde{\epsilon}, \quad \forall x \in \bar{S} \tag{2.2}$$

$$\delta u = 0 \text{ на } L_u, \quad \delta \tilde{\sigma} \cdot n = \delta P \text{ на } L_\sigma \tag{2.3}$$

((2.1) – уравнение равновесия, (2.2) – геометрические и определяющие соотношения, (2.3) – кинематические и статические граничные условия).

К соотношениям (2.1)–(2.3) добавляются граничные условия на поверхности контакта (1.5).

Определим множество

$$U = \{\delta u \in (C^2(\bar{S}))^2 \mid \delta u = 0 \text{ на } L_u, \quad \delta u_n = \delta u_b = 0, \quad \delta u_\tau \leq 0 \text{ на } L_c\}$$

Функцию $\delta u \in U$, удовлетворяющую соотношениям (1.5), (2.1)–(2.3), назовем классическим решением задачи.

При выполнении принятых предположений поставленная задача позволяет связать поля напряжений и деформаций в произвольный момент времени t с соответствующими полями в момент времени $t + \delta t$ после догрузки.

Замечание. Напряженное состояние на момент догрузки считается известным, при этом на поверхности контакта $\sigma_b = 0$. Равенства нулю приращения этой компоненты $\delta\sigma_b$ после догрузки для общего случая из поставленной задачи не следует. Однако если допущение о прямолинейности траекторий выполняется, то $\delta\sigma_b = 0$. Например, в осесимметричной задаче или в задаче о плосконапряженном состоянии равенство нулю приращения напряжений $\delta\sigma_b$ следует из области определения искомых величин.

3. Вариационная постановка. Пусть δu – классическое решение задачи (1.5), (2.1)–(2.3), $\delta u \in U$. Умножим скалярно уравнение равновесия (2.1) на выражение $\delta v - \delta u$, где $\delta v \in U$, и проинтегрируем по области $\bar{S}$. Применим к полученному выражению теорему Остроградского – Гаусса. Используя определяющие и геометрические соотношения, граничные условия, а также определение множества U , получим

$$\begin{aligned}A(\delta u, \delta v - \delta u) - \langle f, \delta v - \delta u \rangle &= \int_{L_c} \delta\sigma_\tau (\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_c, \quad \forall \delta v \in U \\ A(\delta u, \delta v - \delta u) &= \int_S \delta \tilde{\epsilon}(\delta u) \cdot \tilde{\Phi} \cdot \delta \tilde{\epsilon}(\delta v - \delta u) dS \\ \langle f, \delta v - \delta u \rangle &= \int_{L_\sigma} \delta P \cdot (\delta v - \delta u) dL_\sigma + \int_S \delta F \cdot (\delta v - \delta u) dS\end{aligned}\tag{3.1}$$

Воспользуемся для дальнейших выводов тем, что на контактной поверхности L_c выполняется неравенство

$$(\sigma_\tau + \delta\sigma_\tau + f(\sigma_n + \delta\sigma_n))(\delta v_\tau - \delta u_\tau) \geq 0 \quad (3.2)$$

В самом деле, если $\delta u_\tau = 0$, то первый сомножитель неположителен согласно (1.5), а $\delta v_\tau \leq 0$ по определению множества U . Если же $\delta u_\tau < 0$, то согласно (1.5) первый сомножитель равен нулю и в соотношении (3.2) имеет место строгое равенство.

Теперь добавим к левой и правой части равенство (3.1) выражение

$$\int_{L_c} (\sigma_\tau + f(\sigma_n + \delta\sigma_n))(\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_c$$

Введем обозначение $g = \sigma_\tau + f\sigma_n$, причем $g = 0$ на L_1 . Тогда при учете неравенства (3.2) получим

$$\begin{aligned} A(\delta u, \delta v - \delta u) - \langle f, \delta v - \delta u \rangle + \int_{L_0} g(\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_0 + \\ + \int_{L_c} f\delta\sigma_n(\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_c \geq 0, \quad \forall \delta v \in U \end{aligned} \quad (3.3)$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Классическое решение задачи (1.5), (2.1)–(2.3) удовлетворяет неравенству (3.3).

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти $\delta u \in U$:

$$\begin{aligned} A(\delta u, \delta v - \delta u) - \langle f, \delta v - \delta u \rangle + \int_{L_0} g(\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_0 + \\ + \int_{L_c} f\delta\sigma_n(\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_c \geq 0, \quad \forall \delta v \in U \end{aligned} \quad (3.4)$$

Теорема 2. Если задача 1 имеет решение δu , то оно удовлетворяет всем заданным кинематическим граничным условиям в соотношениях (1.5) и (2.3) дифференциальной задачи, а тензор напряжений, определенный по δu с помощью геометрических и определяющих соотношений (2.2), удовлетворяет уравнениям равновесия (2.1) и всем заданным граничным условиям в силах в соотношениях (1.5), (2.3).

Доказательство. Предположим, что неравенство (3.4) имеет решение δu . Примем в неравенстве (3.4) в качестве элемента $\delta v \in U$ вначале $\delta u + q \in U$, а затем $\delta u - q \in U$, где $q \in U$ – финитная на области $\bar{S}$ функция. Получим, что

$$A(\delta u, q) - \int_S \delta F \cdot q dS = 0$$

Из этого равенства, учитывая связь δu с деформациями и напряжениями (соотношения (2.2)) и в силу произвольности выбора q , следует выполнение уравнения равновесия (2.1). Умножим далее уравнение (2.1) скалярно на вектор $\delta u - \delta v$, где $\delta v, \delta u \in U$. Проинтегрируем полученное выражение по области $\bar{S}$ и применим теорему Остроградского – Гаусса. Полученное соотношение вычтем из неравенства (3.4). В итоге получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{L_0} (\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_0 + \int_{L_c} f\delta\sigma_n(\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_c - \int_{L_\sigma} \delta P \cdot (\delta v - \delta u) dL_\sigma + \\ + \int_{L_\sigma} n \cdot \delta \tilde{\sigma}(\delta v - \delta u) dL_\sigma + \int_{L_c} \delta\sigma_\tau(\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_c \geq 0, \quad \forall \delta v \in U \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выберем в качестве $\delta v \in U$ такой элемент, чтобы $\delta u = \delta v$ на $L \setminus L_\sigma$. Тогда неравенство (3.5) примет вид

$$\int_{L_\sigma} (\delta P - p \cdot \delta \tilde{\sigma}) \cdot (\delta v - \delta u) dL_\sigma \geq 0$$

откуда в силу произвольности δv на L_σ следует выполнение статических граничных условий в (2.3).

Теперь учитывая определение g и выполнение статических граничных условий запишем неравенство (3.5) в виде

$$\int_{L_c} (\sigma_\tau + \delta \sigma_\tau + f(\sigma_n + \delta \sigma_n))(\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_c \geq 0, \quad \forall \delta v \in U \quad (3.6)$$

Точки контактной поверхности, где выполняется равенство $\delta u_\tau = 0$, образуют область L_0^* . В силу неположительности δv_τ на L_0^* и произвольности его выбора из неравенства (3.6) следует неравенство

$$(\sigma_\tau + \delta \sigma_\tau) + f(\sigma_n + \delta \sigma_n) \leq 0 \quad \text{на } L_0^*$$

На другой части контактной поверхности L_1^* $\delta u_\tau < 0$. Тогда из неравенства (3.6) в силу произвольности выбора δv_τ следует, что

$$(\sigma_\tau + \delta \sigma_\tau) + f(\sigma_n + \delta \sigma_n) = 0 \quad \text{на } L_1^*$$

Кинематические граничные условия $\delta u = 0$ на L_u и $\delta u_n = \delta u_b = 0$ на L_c следуют из определения множества U . Теорема доказана.

Будем называть обобщенным решением задачи 1 решение в более широком классе функций

$$W = \{\delta u \in (H^1(S))^3 \mid \delta u = 0 \quad \text{на } L_u, \quad \delta u_n = \delta u_b = 0, \quad \delta u_\tau \leq 0 \quad \text{на } L_c\}$$

где $(H^1(S))^3$ – пространство Соболева [4]. Здесь и далее значение функций на границе понимаются в смысле значений оператора следа ([4], с. 48–51).

Исследование обобщенного решения задачи 1 затруднено тем, что не определен оператор, ставящий в соответствие элементу $\delta u \in W$ распределение контактного давления $\delta \sigma_n$ на поверхности контакта L_c ([2], с. 148).

4. Оператор влияния относительных сдвигов на контактное давление. Пусть на поверхности контакта L_c заданы касательные смещения δu_τ , определенные оператором следа [4]

$$\gamma_\tau: (H^1(S))^3 \rightarrow H^{1/2}(L_c)$$

Определим по заданным касательным смещениям δu_τ , являющимся следом элементов из множества W , другое множество:

$$Z = \{\delta v \in W \mid \delta v_\tau = \delta u_\tau = \gamma_\tau(\delta u) \quad \text{на } L_c\}$$

Рассмотрим краевую задачу (2.1)–(2.3) с кинематическими граничными условиями

$$\delta u_n = \delta u_b = 0, \quad \delta u_\tau = \delta u_\tau \quad \text{на } L_c \quad (4.1)$$

Эквивалентная для гладких функций задаче (2.1)–(2.3), (4.1) задача в вариационной постановке имеет следующий вид.

Задача 2. Найти $\delta u \in Z$:

$$A(\delta u, \delta v - \delta u) = \langle f, \delta v - \delta u \rangle, \quad \forall \delta v \in Z \quad (4.2)$$

Докажем это утверждение. Пусть δu – решение задачи (2.1)–(2.3), (4.1). Тогда, повторяя доказательство соотношения (3.1) с учетом того, что $\delta v_\tau = \delta u_\tau = \delta u_\tau$ на L_c , получим соотношение (4.2).

Теперь докажем обратное. Пусть δu – решение задачи 2. Возьмем $\delta v = \delta u + q$, где q – финитная на области $\bar{S}$ функция. Тогда из соотношения (4.2) следует уравнение равновесия (2.1) при условии, что на δu деформации и напряжения определены соотношениями (2.2). Умножим скалярно уравнение (2.1) на $\delta v - \delta u$, $\delta v \in Z$, проинтегрируем произведение по области $\bar{S}$ и применим теорему Остроградского – Гаусса. Вычитая полученное таким образом соотношение из соотношения (4.2), имеем

$$0 = \int_{L_\sigma} \delta P \cdot (\delta v - \delta u) dL_\sigma - \int_{L_\sigma} n \cdot \delta \tilde{\sigma} \cdot (\delta v - \delta u) dL_\sigma, \quad \forall \delta v \in Z$$

В силу произвольности выбора δv из последнего равенства получаем условия в силах на поверхности L_σ .

Кинематические граничные условия на поверхности L_u и L_c следуют из определения множества Z .

В дальнейшем потребуются эквивалентная задаче 2 постановка в виде минимизации квадратичного функционала.

Определим пространство

$$X = \{\delta v \in (H^1(S))^3 \mid \delta v = 0 \text{ на } L_u\}$$

и введем норму

$$\|\delta v\|_X = (\delta v, \delta v)^{1/2}, \quad (\delta v, \delta v) = \int_S \delta \tilde{\epsilon}(\delta v) \cdot \tilde{\Phi} \cdot \delta \tilde{\epsilon}(\delta v) dS \quad (4.3)$$

где $(\delta v, \delta v)$ – скалярное произведение в пространстве X [2, 4].

Определим также пространство

$$Z_0 = \{\delta v \in X \mid \delta v = 0 \text{ на } L_c\}$$

являющееся подпространством пространства X .

Любой элемент $x \in X$ представим единственным образом

$$x = y + z, \text{ где } y \in Z_0, z \in X, z \perp Z_0 \quad (4.4)$$

([9]), теорема 6.4.1).

Рассмотрим два произвольных элемента $a, b \in X$, таких, что $a = b$ на L_c . Представим эти элементы с помощью (4.4) следующим образом:

$$a = a_0 + a_\perp, b = b_0 + b_\perp$$

$$a_0, b_0 \in Z_0, a_\perp, b_\perp \in X, a_\perp, b_\perp \perp Z_0$$

Выполним преобразования

$$\begin{aligned} a &= b + (a - b) = b_0 + b_\perp + (a - b) = \\ &= b_\perp + [b_0 + (a - b)] = b_\perp + c_0 \quad (c_0 = [b_0 + (a - b)] \in Z_0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

В силу единственности разложения (4.5) получаем $a_\perp = b_\perp$.

Таким образом, любой элемент $\delta v \in X$, такой, что $\delta v = \delta u$ на L_c ($\delta u \in X$), может быть представлен единственным образом в следующем виде:

$$\delta v = \delta v_0 + \delta w \quad (4.6)$$

где

$$\delta v_0 \in Z_0, \delta w \in X, \delta w \perp Z_0, \delta w = \delta u \text{ на } L_c$$

причем δw не зависит от выбора δv .

С помощью равенства (4.6) выполним разложение решения задачи 2, так как $\delta u \in X$:

$$\delta u = \delta u_0 + \delta w$$

где

$$\delta u_0 \in X_0, \delta w \in X, \delta w \perp X_0, w_\tau = y_\tau, w_n = w_0 = 0 \text{ на } L_c$$

Применяя это разложение также к элементам $\delta v \in Z$ в (4.2) получим, что

$$A(\delta w + \delta u_0, \delta v_0 - \delta u_0) = \langle f, \delta v_0 - \delta u_0 \rangle$$

откуда при $\delta v_0 = 0$ имеем

$$A(\delta u_0, \delta u_0) = \langle f, \delta u_0 \rangle$$

При учете разложения (4.6) и последнего равенства перепишем задачу 2 в следующем виде.

Задача 2а. Найти $\delta u_0 \in Z_0$:

$$A(\delta u_0, \delta v_0) = \langle f, \delta v_0 \rangle, \forall \delta v_0 \in Z_0, \delta u = \delta u_0 + \delta w, \delta w \in Z, \delta w \perp Z_0 \quad (4.7)$$

Контактное давление определим с помощью множителей Лагранжа. Опустим ограничение на нормальную составляющую перемещений в области контакта $\delta u_n = 0$ при определении допустимого множества перемещений Z_0 . Это условие выполним с помощью множителя Лагранжа, который, как будет показано ниже, совпадает с приращением нормальной компоненты реакции жесткой опоры при догрузке.

Определим далее функционал

$$J(\delta v_0) = \frac{1}{2} A(\delta v_0, \delta v_0) - \langle f, \delta v_0 \rangle$$

и рассмотрим задачу, эквивалентную задаче 2а.

Задача 3. Найти $\delta u_0 \in Z_0$:

$$J(\delta u_0) \leq J(\delta v_0), \forall \delta v_0 \in Z_0, \delta u = \delta u_0 + \delta w, \delta w \in Z, \delta w \perp Z_0 \quad (4.8)$$

Решение задачи 3 не изменится, если к функционалу $J(\delta v_0)$ добавить выражение $A(\delta w, \delta v_0)$, так как $\delta v_0 \in Z_0$, а $\delta w \perp Z_0$. При учете этого замечания двойственную постановку задачи 3 запишем в следующем виде [10].

Задача 4. Найти

$$\sup_{p^* \in H_*^{1/2}(L_c)} \inf_{\delta v_0 \in Y_0} \Phi(\delta v_0, p^*) \quad (4.9)$$

$$Y_0 = \{\delta v \in X \mid \delta v_\tau = \delta v_b = 0 \text{ на } L_c\}$$

$$\Phi(\delta v_0, p^*) = J(\delta v_0) + A(\delta w, \delta v_0) - \langle p^*, \delta v_{0n} \rangle$$

$$\delta v_{0n} \equiv \gamma_n(\delta v_0), \gamma_n: (H^1(S))^3 \rightarrow H^{1/2}(L_c)$$

где $H_*^{1/2}(L_c)$ – пространство, сопряженное к $H^{1/2}(L_c)$, γ_n – оператор следа, определяющий нормальную компоненту перемещений на L_c .

Предположим далее, что $(\delta u_0, q^*) \in Y_0 \times H_*^{1/2}(L_c)$ – решение задачи 4. Покажем, что первая компонента δu_0 – решение задачи 3, а вторая компонента p^* – приращение нормальной составляющей контактного давления.

Для седловой точки имеем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Phi(\delta \mathbf{u}_0 + \alpha \delta \mathbf{v}_0, \mathbf{q}^*) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{v}_0 \in Y_0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Phi(\delta \mathbf{u}_0, \mathbf{q}^* + \alpha \mathbf{p}^*) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \forall \mathbf{p}^* \in H_*^{1/2}(L_c); \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

После вычисления производных получаем

$$A(\delta \mathbf{w} + \delta \mathbf{u}_0, \delta \mathbf{v}_0) - \langle \mathbf{f}, \delta \mathbf{v}_0 \rangle - \langle \mathbf{q}^*, \delta \mathbf{v}_{0n} \rangle = 0, \quad \forall \delta \mathbf{v}_0 \in Y_0 \quad (4.10)$$

$$\langle \mathbf{p}^*, \delta \mathbf{u}_{0n} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{p}^* \in H_*^{1/2}(L_c) \quad (4.11)$$

Из соотношения (4.11) в силу произвольности выбора $\mathbf{p}^*$ имеем $\delta \mathbf{v}_{0n} = 0$ на L_c . Следовательно, $\delta \mathbf{u}_0 \in Z_0$.

Теперь обратимся к соотношению (4.10). Имеем $Z_0 \subset Y_0$, следовательно, соотношение (4.10) справедливо для любого $\delta \mathbf{v}_0 \in Z_0$. Тогда получаем

$$A(\delta \mathbf{u}_0, \delta \mathbf{v}_0) - \langle \mathbf{f}, \delta \mathbf{v}_0 \rangle = 0, \quad \forall \delta \mathbf{v}_0 \in Z_0$$

Итак, доказано, что $\delta \mathbf{u}_0$ – решение задачи 3.

Механический смысл множителя Лагранжа определим в предположении, что $\delta \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{w}$ – регулярная функция. Тогда, принимая в (4.10) в качестве $\delta \mathbf{v}_0$ финитные на $\bar{\Omega}$ функции и учитывая связь перемещений с деформациями и напряжениями (2.2), получим уравнение равновесия в виде

$$\nabla \cdot \delta \tilde{\sigma}(\delta \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{w}) + \delta \mathbf{F} = 0 \quad (4.12)$$

Умножим скалярно уравнение (4.12) на произвольный элемент $\delta \mathbf{v}_0 \in Y_0$, проинтегрируем по области $\bar{\Omega}$ и, применяя теорему Остроградского – Гаусса, получим равенство, вычитая которое из равенства (4.10), имеем выражение

$$\langle \mathbf{q}^*, \delta \mathbf{v}_{0n} \rangle = \int_{L_c} \mathbf{n} \cdot \delta \tilde{\sigma}(\delta \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \delta v_{0n} dL_c, \quad \forall \delta \mathbf{v}_0 \in Y_0 \quad (4.13)$$

определяющее механический смысл множителя Лагранжа.

Определим гильбертово пространство

$$H = \{ \delta \mathbf{v} \in X \mid \delta \mathbf{v}_n = \delta \mathbf{v}_b = 0 \text{ на } L_c \}$$

Теорема 3. Если $Y_0 \perp H$, то приращение контактного давления при догрузке не зависит от величины относительных сдвигов.

Доказательство теоремы состоит в повторении вывода соотношения (4.13) с учетом равенства $A(\delta \mathbf{w}, \delta \mathbf{v}_0) = 0$, которое следует из ортогональности пространств.

В контактных задачах для пластин ортогональность по энергетической норме принятых в этих задачах пространств является следствием независимости мембранных перемещений, определяющих касательные перемещения в области контакта, и нормальных к поверхности пластины перемещений. Другие случаи независимости контактного давления от сил трения и сцепления приведены в [5]. Этот класс задач подробно изучен в работах [5–7] и др.).

Итак, предложенный подход позволяет определить контактное давление в смысле равенства (4.13) при заданных относительных сдвигах. Тем самым определен опера-

тор, ставящий в соответствие касательным сдвигам δw_τ на L_c приращение контактного давления:

$$p: \delta w_\tau \rightarrow q^* \in H_*^{1/2}(L_c) \quad (4.14)$$

где q^* – линейный функционал.

Исследуем свойства функционала q^* . Возьмем $\delta w_\tau = 0$. Этому условию соответствует функционал q_0^* , определенный соотношением (4.10):

$$\langle q_0^*, \delta v_{0n} \rangle = A(\delta u_0, \delta v_0) - \langle f, \delta v_0 \rangle, \quad \forall \delta v_0 \in Y_0 \quad (4.15)$$

где δu_0 – решение задачи 3.

Теперь рассмотрим произвольное распределение сдвигов δw_τ на L_c и определим с помощью (4.10) функционал q^* , отвечающий за распределение контактного давления:

$$\langle q^*, \delta v_{0n} \rangle = A(\delta u_0 + \delta w, \delta v_0) - \langle f, \delta v_0 \rangle, \quad \forall \delta v_0 \in Y_0 \quad (4.16)$$

где δu_0 , как и прежде, решение задачи 3.

Вычитая из (4.16) равенство (4.15), получим

$$\langle q_w^*, \delta v_{0n} \rangle = A(\delta w, \delta v_0), \quad \forall \delta v_0 \in Y_0; \quad q_w^* = q^* - q_0^* \quad (4.17)$$

Итак, оператор, определяющий контактное давление, может быть представлен в виде суммы двух линейных функционалов:

$$q^* = q_0^* + q_w^*$$

Учитывая линейности отображения $\delta w \rightarrow q_w^*$ (соотношение (4.17)), линейный функционал q_w^* можно представить билинейной формой, которую обозначим p_w . Взаимно-однозначное соответствие (4.6) между δw_τ на L_c и $w \in Z$ и соотношение (4.17) позволяют определить p_w следующим образом:

$$p_w(\cdot, \cdot): H_*^{1/2}(L_c) \times H_*^{1/2}(L_c) \rightarrow \mathbb{R}$$

Таким образом, доказано существование линейного оператора, определяющего контактное давление по относительным сдвигам. Перепишем с помощью этого оператора последний интеграл в (3.4):

$$\int_{L_c} f \delta \alpha_n (\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_c = f \left[\langle q_0^*, \delta v_\tau - \delta u_\tau \rangle + p_w(\delta u_\tau, \delta v_\tau - \delta u_\tau) \right] \quad (4.18)$$

Проблема существования и единственности решения задач типа (4.10), (4.11) рассмотрена ранее ([10]), предложение 5.2, с. 74). Для упругих материалов решение этой задачи существует, первая компонента δu_0 находится единственным образом. Единственность множителя Лагранжа доказывается с помощью метода регуляризации [11] и предельного перехода при стремлении к нулю регулизирующей добавки.

Итак, в данном разделе доказано существование линейного оператора, ставящего в соответствие относительным сдвигам на поверхности контакта приращение контактного давления.

5. Доказательство существования и единственности обобщенного решения. Перепишем задачу 1 при учете равенства (4.18) следующим образом.

Задача 1а. Найти $\delta u \in W$:

$$B(\delta u, \delta v - \delta u) - \langle s, \delta v - \delta u \rangle \geq 0, \quad \forall \delta v \in W \quad (5.1)$$

$$B(\delta u, \delta v - \delta u) = A(\delta u, \delta v - \delta u) + f p_w(\delta u_\tau, \delta v_\tau - \delta u_\tau)$$

$$\langle s, \delta v - \delta u \rangle = \int_{L_0} g(\delta v_\tau - \delta u_\tau) dL_0 - \langle f, \delta v - \delta u \rangle + f \langle q_0^*, \delta v_\tau - \delta u_\tau \rangle$$

Под обобщенным решением будем теперь понимать решение задачи 1а.

Выше было доказано существование оператора p_w . Для решения вопроса, вынесенного в заглавие этого раздела, необходимо исследование свойств этого оператора.

Определим норму в пространстве $H^{1/2}(L_c)$, являющегося областью значений оператора следа γ_τ с областью определения H :

$$\|\delta z\|_{H^{1/2}(L_c)} = \inf_{\substack{\delta v \in H, \\ \gamma_\tau(\delta v) = \delta z \text{ на } L_c}} (\delta v, \delta v)_X^{1/2} = (\delta w, \delta w)_X^{1/2} \quad (5.2)$$

$$\gamma_\tau(\delta w) = \delta z \text{ на } L_c$$

Из соотношения (4.17) следует, что

$$\begin{aligned} \|q_w^*\|_{H^{1/2}(L_c)} &= \|p_w^*(\delta w_\tau, \cdot)\|_{H^{1/2}(L_c)} = \sup A(\delta w, \delta v_\perp) \leq \\ &\leq \|\delta w\|_X \leq \|\delta u\|_X, \quad \forall \delta u \in H, \quad \gamma_\tau(\delta u) = \delta w_\tau \text{ на } L_c \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\sup$ берется по $\delta v_\perp \in Y_0$, $\|\delta v_\perp\|_X = 1$, $\delta w \in H$, $\delta w \perp Z_0$, $\gamma_\tau(\delta w) = \delta w_\tau$ на L_c .

Используя неравенство (5.3) и определение нормы (5.2), получим оценку

$$\begin{aligned} p_w(\delta u_\tau, \delta u_\tau) &\geq -|p_w(\delta u_\tau, \delta u_\tau)| \geq -\|q_w^*\|_{H^{1/2}(L_c)} \|\delta u_\tau\|_{H^{1/2}(L_c)} \geq \\ &\geq -\|\delta u\|_X^2, \quad \forall \delta u \in H: \gamma_\tau \delta u = \delta u_\tau \text{ на } L_c \end{aligned} \quad (5.4)$$

Коэрцитивность оператора B следует из соотношения (5.4) и условия $0 < f < 1$:

$$\begin{aligned} B(\delta u, \delta u) &= A(\delta u, \delta u) + f p_w(\delta u_\tau, \delta u_\tau) \geq \|\delta u\|_X^2 - f \|\delta u\|_X^2 = \\ &= (1-f) \|\delta u\|_X^2, \quad \forall \delta u \in H \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ограниченность оператора B докажем с помощью неравенства (5.3):

$$\begin{aligned} B(\delta u, \delta v) &\leq \|\delta u\|_X \|\delta v\|_X + f \|q_w^*\|_{H^{1/2}(L_c)} \|\delta v_\tau\|_{H^{1/2}(L_c)} \leq \\ &\leq \|\delta u\|_X \|\delta v\|_X + f \|\delta u\|_X \|\delta v\|_X = (1+f) \|\delta u\|_X \|\delta v\|_X, \quad \forall \delta u, \delta v \in H \end{aligned} \quad (5.6)$$

Известна теорема [12]: пусть B – коэрцитивная билинейная форма на H , $W \subset H$ – замкнутое выпуклое множество и $h \in H^*$ (H^* – пространство, сопряженное к H); тогда существует единственное решение следующей задачи:

Найти $\delta u \in W$:

$$B(\delta u, \delta v - \delta u) - \langle h, \delta v - \delta u \rangle \geq 0, \quad \forall \delta v \in W$$

Сравним условия приведенной теоремы с условиями решаемой задачи. Оператор B линейен по каждому аргументу. Непрерывность его следует из ограниченности (5.6). Следовательно B – билинейная форма на H . Коэрцитивность B доказана неравенством (5.5). Потребуем, чтобы объемные и поверхностные силы удовлетворяли условию $h \in H^*$. Выпуклость и замкнутость множества W очевидны. Условия приведенной выше теоремы выполнены. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4. Задача 1а имеет единственное обобщенное решение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 95-01-001522).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // ПММ. 1980. 44. Вып. 1. С. 122–129.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. Гловачек И., Гаслингс Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986. 270 с.
4. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 492 с.
5. Спектор А.А. Вариационный метод исследования контактных задач с проскальзыванием и сцеплением // Докл. АН СССР. 1977. 336, № 1. С. 39–42.
6. Гольдштейн Р.В., Спектор А.А. Вариационные оценки решений смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 82–94.
7. Гольдштейн Р.В., Спектор А.А. Вариационный метод исследования пространственных смешанных задач о плоском разрезе в упругой среде при наличии проскальзывания и сцепления его поверхностей // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 276–285.
8. Martins J.A.C., Manuel D.P., Gostaldi F. In an example of non-existence of solution to a quasistatic frictional contact problem // Eur. J. Mech. A/Solids. 1994. V. 13. № 1. P. 113–133.
9. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.
10. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
11. Oden J.T., Kikuchi N. Finite elements methods for constrained problems in elasticity // Intern. J. Numer. Meth. in Eng. 1982. V. 18. № 5. P. 701–725.
12. Киндерлерер Д., Стампакья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.

Пермь

Поступила в редакцию
20.IX.1996