

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Е.И. Рыжак

ОЦЕНКИ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

С использованием теоремы Ван Хофа доказывается модификация классической теоремы сравнения для частот собственных колебаний однородных линейно-упругих тел произвольной анизотропии, занимающих область произвольной формы с жестко закрепленной границей. При помощи модификаций теоремы Ван Хофа доказываются другие аналогичные модификации теоремы сравнения для однородных линейно-упругих тел специальных типов анизотропии (характеризующихся наличием зеркальной симметрии), имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с гранями, параллельными плоскостям симметрии, и с граничными условиями проскальзывания либо вдоль самих граней, либо вдоль нормалей к ним. На основе совокупности доказанных модификаций теоремы сравнения предлагается метод получения уточненных двусторонних оценок для всех частот спектра собственных колебаний в соответствующих задачах (где, как правило, точные значения частот неизвестны). Оценки оказываются просто связанными с наименьшей и наибольшей скоростями распространения упругих волн в среде и с характерными геометрическими размерами тела. Рассмотрены примеры. Предлагается вариант модификаций теоремы сравнения и метода получения оценок частот, пригодный для линеаризованной задачи о малых собственных колебаниях однородных и однородно деформированных нелинейно-упругих тел, а также для собственных колебаний ограничено неоднородных линейно-упругих тел.

Теория собственных колебаний линейно-упругих тел в математическом отношении сводится к спектральной теории для определенного типа линейных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (см. например [1–3]); общие свойства спектра и системы собственных векторов таких операторов хорошо изучены. Однако число задач о собственных колебаниях, где известны точные решения и соответственно точные значения собственных частот, крайне мало; все они относятся к случаю гуканого материала и тел простой формы: шар, прямоугольный параллелепипед и т.п. В других задачах, где точные значения частот неизвестны, заменой им могут служить строгие двусторонние оценки, причем особый интерес представляет оценка снизу для нижней частоты.

В общей теории [2, 3] доказывается классическая теорема сравнения для собственных частот различных тел, в принципе позволяющая получать двусторонние оценки для частот, если в качестве тел сравнения брать гуканые тела, занимающие области простой формы (поскольку для них частоты известны).

В данной работе для некоторого частного класса задач о собственных колебаниях линейно-упругих тел доказывается модификация теоремы сравнения с менее ограничительным неравенством, накладываемым на тензоры упругих модулей тел, частоты которых сравниваются между собой. Частный класс задач определяется условиями теоремы Ван Хофа [4] и ее модификаций [5–7], использование которых и приводит к тому, что упомянутое неравенство оказывается менее ограничительным.

Модификации теоремы сравнения позволяют получать уточненные (в сопоставлении с классической теоремой) оценки для частот, к тому же являющиеся простыми и физически наглядными. В некоторых случаях уточнение оказывается существенным. В работе рассмотрен пример тела с предельно простым ортотропным упругим законом, занимающего область, сильно сплюснутую в определенном направлении. Оценка снизу для нижней частоты спектра такого тела на основе классической теоремы оказывается во много раз меньше точного значения, тогда как аналогичная оценка на основе модификации этой теоремы почти совпадает с ним. Этот пример наряду с другими демонстрирует эффективность метода построения оценок, вытекающего из предлагаемой теории.

1. Краткая сводка используемых известных результатов по собственным колебаниям линейно-упругих тел. Используется система тензорных обозначений Гиббса, снабженная дополнительно значком тензорного произведения и мультииндексом (вверху справа от символа) для обозначения изомеров тензора. В соотношениях, связанных непосредственно с собственными колебаниями, используются обозначения, близкие к принятым в книге [3], на основе материала которой и изложены основные известные результаты.

Приводя известные соотношения теории собственных колебаний линейно-упругих тел, ограничимся частными случаями, к которым относятся результаты данной работы: упругое тело однородно, массовые силы отсутствуют, в качестве граничных условий берутся либо условие отсутствия перемещений на всей границе тела ("защемленная" граница), либо предполагается, что на границе имеются плоские участки и на этих плоских участках задано условие свободного проскальзывания, либо вдоль самой плоскости поверхности, либо вдоль нормали к этой плоскости в то время как остальная часть границы защемлена; свободных участков граница не имеет.

Будем считать, что тело в равновесной конфигурации, принимаемой в качестве отсчетной [8], занимает область V трехмерного евклидова пространства. Материальные точки тела идентифицируются посредством их радиус-векторов $\mathbf{x}$ в этой конфигурации.

Введем обозначения: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – поле смещений в момент времени t , $\nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – поле градиента смещений ($d\mathbf{u} = d\mathbf{x} \cdot \nabla \otimes \mathbf{u}$), $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ – поле тензора напряжений (вообще говоря, это тензор напряжений Пиолы [8], который в рамках линейной теории совпадает с тензором Коши). Линейный упругий определяющий закон задается в виде

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C} : \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

где $\mathbf{C}$ – тензор упругих модулей (четвертого ранга). В силу предположения об однородности тела тензор $\mathbf{C}$ имеет одно и то же значение для всех его точек.

Введем обозначение для изомеров тензора четвертого ранга. Пусть $(i_1 i_2 i_3 i_4)$ – перестановка чисел (1234). Тогда для разложимых тензоров (тетрад)

$$\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_4^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} = \mathbf{a}_{i_1} \otimes \mathbf{a}_{i_2} \otimes \mathbf{a}_{i_3} \otimes \mathbf{a}_{i_4} \quad (1.2)$$

а для произвольных тензоров $\mathbf{C}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)}$ означает, что вместо каждой тетрады в представлении тензора $\mathbf{C}$ взят ее соответствующий изомер по формуле (1.2); иначе говоря, если $(j_1 j_2 j_3 j_4)$ – перестановка, обратная по отношению к $(i_1 i_2 i_3 i_4)$, то для любых четырех векторов $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 : \mathbf{C}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} : \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_4 &= \mathbf{C}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} : \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_4 = \\ &= \mathbf{C} : \mathbf{u}_{j_1} \otimes \mathbf{u}_{j_2} \otimes \mathbf{u}_{j_3} \otimes \mathbf{u}_{j_4} = \mathbf{u}_{j_1} \otimes \mathbf{u}_{j_2} : \mathbf{C} : \mathbf{u}_{j_3} \otimes \mathbf{u}_{j_4} \end{aligned} \quad (1.3)$$

В силу наличия упругого потенциала, как в классической линейной теории, так и в линеаризованной нелинейной теории тензор упругости обладает симметрией "по перестановке пар":

$$\mathbf{C}^{(3412)} = \mathbf{C} \quad (1.4)$$

В классической линейной теории имеется еще одна симметрия:

$$C^{(1243)} = C^{(2134)} = C$$

которая в линеаризованной нелинейной теории отсутствует. В дальнейших построениях эта симметрия совершенно не будет использоваться и, следовательно, область применимости результатов не ограничивается случаями, где она имеет место.

Обозначая, как обычно, точкой над символом материальную производную по времени, запишем уравнение движения упругого тела для внутренних точек занимаемой им области B :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{C} : \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

где $\rho = \text{const}$ – плотность тела в отсчетной конфигурации, $\nabla \cdot \mathbf{T}$ – дивергенция поля тензора напряжений по отношению к отсчетной конфигурации ($\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I} : \nabla \otimes \mathbf{T}$, где $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга).

Пусть Σ^0 – заземленная часть границы ∂B , Σ' – совокупность плоских участков с проскальзыванием вдоль плоскости, Σ'' – совокупность плоских участков с проскальзыванием вдоль нормали, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе. Тогда граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma^0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma' \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma'' \end{aligned} \quad (1.6)$$

Собственными колебаниями называются синусоидальные по времени поля смещений, удовлетворяющие уравнениям движения и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) \sin(\omega t + \gamma) \\ \nabla \cdot \mathbf{C} : \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma^0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} : \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma' \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{C} : \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma'' \end{aligned} \quad (1.7)$$

где ω – частота, γ – фаза, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – характеристическая мода колебаний; удобно ввести также характеристическое число

$$\lambda = \rho \omega^2, \quad \omega = \sqrt{\lambda / \rho} \quad (1.8)$$

Интегрируя второе уравнение (1.7) по области B с учетом граничных условий, получим

$$\lambda = \langle \nabla \otimes \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \otimes \mathbf{u} \rangle / \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle \quad (1.9)$$

(здесь и далее угловые скобки означают интегрирование по области B).

Если тензор упругости $\mathbf{C}$ таков, что числитель в (1.9) положительно определен, то все характеристические числа положительны. Более того, известно, что они образуют счетное множество $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, причем

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty \quad (1.10)$$

Помимо (1.9) и (1.10), характеристические числа и соответствующие моды обладают рядом других известных свойств, из которых для дальнейшего нужно лишь так называемое минимаксное свойство. Чтобы его охарактеризовать, введем некоторые понятия и обозначения.

Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех непрерывных кусочно-гладких векторных полей, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, $\mathcal{W}_n$ – система из n кусочно-

непрерывных векторных полей $w_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$), $W_n^\perp$ – ортогональное дополнение линейной оболочки системы W_n в пространстве кусочно-непрерывных векторных полей на B в смысле скалярного произведения $\langle u \cdot v \rangle$. Тогда

$$\lambda_{n+1} = \sup_{\{W_n\}} \inf_{W_n^\perp \cap \mathcal{K}} \frac{\langle \nabla \otimes u : C : \nabla \otimes u \rangle}{\langle u \cdot u \rangle} \quad (1.11)$$

где $\{W_n\}$ – множество всех W_n .

Из (1.11) следует, что если C' и C таковы, что для одной и той же области с одними и теми же граничными условиями имеет место неравенство

$$\langle \nabla \otimes u : C' : \nabla \otimes u \rangle \leq \langle \nabla \otimes u : C : \nabla \otimes u \rangle \quad (1.12)$$

для всех допустимых полей ($u(x) \in \mathcal{K}$), то для характеристических чисел с одинаковыми номерами выполняется неравенство

$$\lambda'_n \leq \lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Если же области и/или граничные условия различны, но таковы, что $\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}$ или поля, входящие в $\mathcal{K}$, будучи продолжены нулем в область $B' \supset B$, окажутся принадлежащими множеству $\mathcal{K}'$, и при этом для всех $u(x) \in \mathcal{K}$ выполняется неравенство (1.12), то для характеристических чисел с одинаковыми номерами также выполняется неравенство (1.13).

Сформулированные утверждения, выражаемые в конечном итоге неравенствами (1.13), являются основой доказательства классической теоремы сравнения для характеристических чисел [3]. Из них же будут выведены модификации теоремы сравнения для однородных тел при подходящих граничных условиях (т.е. при условиях, когда справедлива теорема Ван Хофа или одна из ее модификаций).

2. Теорема Ван Хофа и ее модификации. Прежде всего дадим некоторые определения, а затем сформулируем теорему Ван Хофа и три ее модификации. Оригинальное доказательство Ван Хофа [4] воспроизведено в [3]. Доказательство модификаций теоремы Ван Хофа дано в [5–7].

Определение. Назовем величины

$$\underline{c} = \min_{|g_1|=|g_2|=1} g_1 \otimes g_2 : C : g_1 \otimes g_2 \quad (2.1)$$

$$\bar{c} = \max_{|g_1|=|g_2|=1} g_1 \otimes g_2 : C : g_1 \otimes g_2 \quad (2.2)$$

соответственно нижним и верхним числами Адамара тензора четвертого ранга C .

Очевидно, что для тензора четвертого ранга выполнение неравенства Адамара (см. [3, 8]) равносильно неотрицательности нижнего числа Адамара, а выполнение условия сильной эллиптичности равносильно его положительности. В терминах собственных чисел акустического тензора $A(n) = n \otimes n : C^{(1324)}$ [3] при всевозможных значениях волновой нормали n нижнее число Адамара – минимум по n наименьшего из собственных чисел, а верхнее число Адамара – максимум по n наибольшего из собственных чисел. Иначе говоря,

$$\underline{c} = \rho \underline{a}^2, \quad \bar{c} = \rho \bar{a}^2 \quad (2.3)$$

где $\underline{a}$, $\bar{a}$ – соответственно наименьшая и наибольшая из скоростей распространения упругих волн всех возможных поляризаций по всевозможным направлениям в теле плотности ρ с тензором упругости C .

Теорема Ван Хофа. Пусть B – ограниченная регулярная область в R^3 , C – постоянный тензор четвертого ранга, $u(x)$ – непрерывное кусочно-гладкое векторное поле, обращающееся в нуль на ∂B . Тогда справедливы неравенства

$$\underline{c} \langle \nabla \otimes u : \nabla \otimes u \rangle \leq \langle \nabla \otimes u : C : \nabla \otimes u \rangle \leq \bar{c} \langle \nabla \otimes u : \nabla \otimes u \rangle \quad (2.4)$$

Очевидно, что такая формулировка, несколько отличная от оригинальной [4], эквивалентна ей.

Прежде чем формулировать модификации теоремы Ван Хофа, дадим определение тензора четвертого ранга, инвариантного относительно одного или нескольких зеркальных отражений. Для простоты будем обозначать представления зеркальных отражений в пространстве тензоров четвертого ранга теми же символами, что и сами отражения (действующие в векторном пространстве). Образ тензора C при отражении Q обозначим $C * Q$, причем для разложимых тензоров (тетрад) это означает следующее:

$$c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \otimes c_4 * Q = c_1 \cdot Q \otimes c_2 \cdot Q \otimes c_3 \cdot Q \otimes c_4 \cdot Q \quad (2.5)$$

а для произвольного тензора по формуле (2.5) преобразуется каждая тетрада в его представлении.

Тензор второго ранга

$$Q_i = I - 2e_i \otimes e_i \quad (2.6)$$

задает отражение относительно плоскости с нормалью e_i .

Назовем тензор четвертого ранга C зеркально симметричным относительно плоскости с нормалью e_i , если

$$C * Q_i = C \quad (2.7)$$

Назовем тензор четвертого ранга C ортотропным, если для него существует тройка взаимно ортогональных плоскостей, относительно которых он зеркально симметричен:

$$C * Q_i = C, \quad i = 1, 2, 3, \quad e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Эти плоскости называются в таком случае плоскостями ортотропии.

Модифицированная теорема Ван Хофа 1. Пусть B – прямоугольный параллелепипед с гранями, имеющими единичные нормали $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$ (первая, вторая и третья пары граней), C – постоянный тензор четвертого ранга, $u(x)$ – непрерывное кусочно-гладкое векторное поле.

Тогда:

1) если тензор C зеркально симметричен относительно плоскости одной из пар граней (например, первой), а поле $u(x)$ удовлетворяет условию тангенциальности ($u \cdot e_1 = 0$) на гранях этой пары и обращается в нуль на остальных гранях, то справедливо неравенство (2.4);

2) если тензор C ортотропен и его плоскости ортотропии параллельны плоскостям граней, а поле $u(x)$ удовлетворяет условию тангенциальности на всех гранях ($u \cdot e_i = 0$ на гранях i -й пары), то также справедливо неравенство (2.4).

Модифицированная теорема Ван Хофа 2 повторяет оба утверждения Модифицированной теоремы Ван Хофа 1 с единственной разницей: условие тангенциальности поля $u(x)$ заменяется условием его нормальности на гранях одной пары или на всех гранях, соответственно.

Модифицированная теорема Ван Хофа 3 охватывает всевозможные смешанные случаи, когда условия различных типов (тангенциальности или нормальности) ставятся на различных парах граней или на различных гранях одной пары.

3. Модификации теоремы сравнения и двусторонние оценки для характеристических чисел. Заметим, что если область B , граничные условия и сильно-эллиптические тензоры четвертого ранга C' и C таковы, что удовлетворяют условиям той или иной теоремы типа Ван Хофа, а для биквадратичных форм тензоров C' и C выполняется неравенство

$$f \otimes g: C': f \otimes g \leq f \otimes g: C: f \otimes g, \quad \forall f, g \quad (3.1)$$

то для ненулевых допустимых векторных полей $u(x)$ имеем

$$0 < \langle \nabla \otimes u: C': \nabla \otimes u \rangle \leq \langle \nabla \otimes u: C: \nabla \otimes u \rangle \quad (3.2)$$

что совпадает с неравенством (1.12) (это следует из неравенства (2.4) для разности тензоров C и C').

Вернемся к задаче о собственных колебаниях однородных упругих тел. Из положительной определенности квадратичных функционалов в (3.2) следует, что собственные колебания существуют, а из (1.12) вытекают неравенства (1.13) для положительных характеристических чисел в случаях, когда два тела с тензорами упругости C' и C соответственно занимают одинаковые области, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда, с одинаковыми граничными условиями, соответствующими той или иной теореме типа Ван Хофа.

Допустим, что области, занимаемые телами, имеют другую форму и к тому же, возможно, различны или различны те части границы, где заданы условия различных типов (отсутствия смещений, их тангенциальности или нормальности к граничной поверхности). Пусть при этом каждое из полей может быть продолжено нулем до поля в прямоугольном параллелепипеде, удовлетворяющего условиям некоторой теоремы типа Ван Хофа, а кроме того, все продолженные поля, допустимые для тела с тензором упругости C , одновременно являются допустимыми и для тела с тензором упругости C' . Тогда выполнение неравенства (3.1) влечет за собой выполнение неравенств (1.13) для характеристических чисел (см. разд. 1).

Сформулированные выше утверждения представляют собой совокупность модификаций классической теоремы сравнения для собственных колебаний. В частности, если граница зашпелена, то помимо выполнения неравенства (3.1), нужно лишь, чтобы область B была подобластью области B' (здесь достаточно применить исходную теорему Ван Хофа).

Отличие установленных модификаций теоремы сравнения от классической заключается в том, что в классической теореме неравенство типа (3.1) должно выполняться не только на диадах $f \otimes g$, но и на произвольных тензорах второго ранга, что является гораздо более сильным условием, чем (3.1).

Проиллюстрируем это отличие на примере тел, удовлетворяющих закону Гука с модулями сдвига и объемного сжатия G', K' и G, K соответственно. В этом случае в классической теореме сравнения требуется одновременное выполнение неравенств

$$0 < G' \leq G, \quad 0 < K' \leq K$$

тогда как неравенство (3.1) эквивалентно системе неравенств

$$0 < G' \leq G, \quad 0 < K' + \frac{4}{3}G' \leq K + \frac{4}{3}G$$

Таким образом, если G' существенно меньше, чем G , то K' может быть существенно больше, чем K ; при достаточно большой разнице между модулями сдвига величина K' может быть даже отрицательной, и все равно для такого тела (при выполнении условий какой-либо из теорем типа Ван Хофа) характеристические числа, а значит, и частоты с одинаковыми номерами будут удовлетворять неравенству (1.13).

Рассмотрим вопрос о получении двусторонних оценок для характеристических чисел и, следовательно, для собственных частот. Остановимся на случае, когда граница однородного тела, занимающего область B , заземлена. Наряду с данным телом, имеющим сильно-эллиптический тензор упругости C , введем в рассмотрение два умозрительных "тела сравнения" с заземленной границей, занимающих области $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ ($B^{(1)} \supset B \supset B^{(2)}$), с "тензорами упругости" соответственно $C^{(1)} = \underline{c}1$, $C^{(2)} = \bar{c}1$, где $\underline{c} > 0$ и $\bar{c} > 0$ – нижнее и верхнее числа Адамара тензора C , а $1 = I \otimes I^{(1324)}$ – единичный тензор четвертого ранга (единичный оператор над пространством тензоров второго ранга). Очевидно, что тогда будут выполнены неравенства:

$$f \otimes g: C^{(1)}: f \otimes g \leq f \otimes g: C: f \otimes g \leq f \otimes g: C^{(2)}: f \otimes g, \quad \forall f, g$$

Значит, для соответствующих характеристических чисел справедливы неравенства

$$0 < \lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n \leq \lambda_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

т.е. числа $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_n^{(2)}$ дают двустороннюю оценку для λ_n . Остается найти их явные значения. Заметим, что уравнения собственных колебаний (1.7) для тел сравнения являются характеристическими уравнениями для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле. Очевидно, что каждое из них эквивалентно системе трех скалярных уравнений Гельмгольца при тех же граничных условиях. Иначе говоря, каждая характеристическая функция оператора Лапласа (решение уравнения Гельмгольца) порождает трехмерное подпространство характеристических вектор-функций с тем же характеристическим числом; $\lambda^{(1)}$ получается из соответствующего характеристического числа умножением на $\underline{c}$, а $\lambda^{(2)}$ – умножением на $\bar{c}$. Таким образом, числа $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ имеют трехкратное вырождение (если невырождены характеристические числа скалярного оператора Лапласа).

Если область B достаточно проста и для нее известны характеристические числа оператора Лапласа μ_i , $i = 1, 2, \dots$, то можно взять $B^{(1)} = B^{(2)} = B$, и тогда получим:

$$\lambda_{3i-2}^{(1)} = \lambda_{3i-1}^{(1)} = \lambda_{3i}^{(1)} = \underline{c}\mu_i, \quad \lambda_{3i-2}^{(2)} = \lambda_{3i-1}^{(2)} = \lambda_{3i}^{(2)} = \bar{c}\mu_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Если же числа μ_i для области B неизвестны, то в качестве областей $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ можно выбрать простые области, например, параллелепипеды с размерами $l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, l_3^{(k)}$ ($k = 1, 2$); при этом необходимо соблюдение соотношения $B^{(1)} \supset B \supset B^{(2)}$. Тогда можно воспользоваться известным решением для параллелепипеда с условием Дирихле:

$$\mu_i^{(k)} = \pi^2 \left(\frac{(n_1^{(k)})^2}{(l_1^{(k)})^2} + \frac{(n_2^{(k)})^2}{(l_2^{(k)})^2} + \frac{(n_3^{(k)})^2}{(l_3^{(k)})^2} \right), \quad n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)} = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2$$

где $\mu_i^{(k)}$ для каждого значения k считаются занумерованными по i в виде неубывающей последовательности.

Если хотим получить некоторую физически достаточно наглядную оценку для первой частоты (нижней границы спектра), то можем взять $\mu_1^{(1)}$ для параллелепипеда $B^{(1)}$, охватывающего B , а $\mu_1^{(2)}$ – скажем, для шара $B^{(2)}$, лежащего внутри B :

$$\mu_1^{(1)} = \pi^2 \left(\frac{1}{(l_1^{(1)})^2} + \frac{1}{(l_2^{(1)})^2} + \frac{1}{(l_3^{(1)})^2} \right) > \frac{\pi^2}{(l_1^{(1)})^2}, \quad \mu_1^{(2)} = \frac{4\pi^2}{(l^{(2)})^2}$$

где $l^{(2)}$ – диаметр шара $B^{(2)}$, и некоторым образом оптимизировать их. Что касается $\mu_1^{(2)}$, то наилучшую оценку такого типа дает вписанный шар наибольшего возможного

диаметра, который обозначим $l_*^{(2)}$. С параллелепипедом же сделаем следующее: пусть $l_{1*}^{(1)}$ – наименьшая толщина плоского слоя, содержащего B , $l_{2*}^{(1)}$ – наименьшая толщина слоя, содержащего B и ортогонального первому слою (в том смысле, что их плоскости ортогональны), $l_{3*}^{(1)}$ – наименьшая толщина слоя, содержащего B и ортогонального двум предыдущим. Тогда

$$\pi \frac{a}{l_{1*}^{(1)}} < \pi \frac{a}{l_{1*}^{(1)}} \left(1 + \left(\frac{l_{1*}^{(1)}}{l_{2*}^{(1)}} \right)^2 + \left(\frac{l_{1*}^{(1)}}{l_{3*}^{(1)}} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \omega_1 \leq 2\pi \frac{\bar{a}}{l_*^{(2)}} \quad (3.4)$$

Эти оценки просто связаны с временами распространения самой быстрой и самой медленной волн на расстояния, являющиеся характерными геометрическими параметрами области B .

Заметим, что двусторонние оценки получены для однородного тела произвольной анизотропии, когда даже для простой области (шара или параллелепипеда) аналитическое решение неизвестно; вычисление же нижнего и верхнего чисел Адамара можно выполнить аналитически или, в крайнем случае, численно, и эта задача о нахождении экстремума функции, в принципе, достаточно проста.

Если рассмотреть случай, когда область B – параллелепипед с условиями, скажем, проскальзывания на всей границе, а тензор упругости $\underline{C}$ ортотропен с плоскостями ортотропии, параллельными плоскостям граней, то, в силу изотропии тензоров $\underline{c}_1, \bar{c}_1$ и в силу Модифицированной теоремы Ван Хофа 1 имеем неравенства (3.3), где $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}$ – характеристические числа следующих граничных задач:

$$c^{(k)} \Delta \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) + \lambda^{(k)} \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{(k)} \cdot \mathbf{n}|_{\partial B} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \otimes \mathbf{u}^{(k)} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})|_{\partial B} = 0, \quad k = 1, 2, \end{cases}$$

$$c^{(1)} = \underline{c}, \quad c^{(2)} = \bar{c}$$

и занумерованы в порядке неубывания. Решения таких задач тоже известны: вводя оси, параллельные ребрам параллелепипеда, получаем расщепление каждой из указанных задач на три задачи для компонент. Например, для $u_1^{(1)}(\mathbf{x})$ имеем

$$\underline{c} \Delta u_1^{(1)} + \lambda^{(1)} u_1^{(1)} = 0$$

$$u_1^{(1)}|_{x_1=0} = u_1^{(1)}|_{x_1=l_1} = 0; \quad \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=l_3} = 0$$

Таким образом

$$\mu_i = \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2} \right), \quad n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots; \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \geq 1$$

где μ_i занумерованы в порядке неубывания с учетом кратности вырождения, а именно числа μ_i , соответствующие случаям, когда отлично от нуля только одно из чисел (два из чисел, все три числа) n_k , считаются однократно (соответственно двукратно и трехкратно). При этом $\lambda_i^{(k)} = c^{(k)} \mu_i$.

Если $l_1 \leq l_2 \leq l_3$, то

$$\mu_1 = \frac{\pi^2}{l_3^2}; \quad \underline{c} \frac{\pi^2}{l_3^2} \leq \lambda_1 \leq \bar{c} \frac{\pi^2}{l_3^2} \Leftrightarrow \pi \frac{a}{l_3} \leq \omega_1 \leq \pi \frac{\bar{a}}{l_3}$$

где оценки для ω_1 опять-таки просто связаны с временами распространения самой быстрой и самой медленной волн на расстояние, равное длине наибольшего ребра параллелепипеда.

Рассмотрим численный пример. Пусть $l_3 = 5l_2 \geq 5l_1$, $\bar{c} = 3/2c$. Тогда

$$\mu_k = \pi^2 k^2 / l_3^2, \quad k = 1, \dots, 5$$

причем для $k = 1, \dots, 4$ вырождения нет, оно начинается только с $k = 5$ ($\mu_5 = \mu_6$). Для диапазонов, содержащих первые четыре λ_k , измеренные в единицах $\pi^2 c / l_3^2$, имеем

$$1 \leq \lambda_1 \leq 1,5, \quad 4 \leq \lambda_2 \leq 6, \quad 9 \leq \lambda_3 \leq 13,5, \quad 16 \leq \lambda_4 \leq 24, \quad 25 \leq \lambda_5 \leq 37,5$$

т.е. эти диапазоны не перекрываются между собой и с диапазоном для λ_5, λ_6 ; они дают вполне эффективные двусторонние оценки. Заметим, что эти оценки справедливы для произвольного ортотропного тела (ориентированного подходящим образом), когда в общем случае получить аналитическое решение не представляется возможным.

4. Некоторые модификации предложенного метода в случае однородно напряженных нелинейно-упругих тел и ограниченно неоднородных тел. Линейные уравнения движения (1.5) могут быть получены в результате линеаризации нелинейных уравнений по градиентам смещений в случае, когда последние малы. Будем считать, что предварительно деформированное нелинейно-упругое тело находится в равновесии при тех или иных граничных условиях. Рассматриваются колебания, соответствующие смещениям с малыми градиентами относительно этой равновесной конфигурации $\mathbf{x}$. В равновесной конфигурации имеется поле напряжений Коши $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$, удовлетворяющее уравнениям равновесия как внутри тела, так и на границе на участках тангенциального или нормального проскальзывания; заметим, что в отсчетной конфигурации тензоры напряжений Коши $\mathbf{T}$ и Пиолы $\mathbf{T}_\kappa$ совпадают между собой, однако в конфигурациях, отличных от отсчетной, этого совпадения уже не будет [8]. Зададим линеаризованное инкрементальное определяющее соотношение для тензора напряжений Пиолы в виде

$$\mathbf{T}_\kappa(\mathbf{x}, t) - \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – поле смещений относительно отсчетной конфигурации. Тогда уравнение движения примет вид (1.5), где под плотностью ρ следует понимать плотность в отсчетной конфигурации. Если нелинейно-упругое тело однородно и в отсчетной конфигурации оно однородно деформировано, то $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \text{const}$, и все результаты разд. 3 остаются в силе.

Заметим, что тензор упругости $\mathbf{C}$ обладает свойством (1.4); кроме того, он связан определенным образом с другим тензором упругости $\mathbf{L}$, задающим линеаризованное соотношение между яуманновым приращением тензора напряжений Коши и тензором малых деформаций (симметризованным градиентом поля малых смещений) [8]. Поскольку тензор $\mathbf{L}$ – традиционно используемая характеристика инкрементальной упругости, сопоставим нижнее и верхнее числа Адамара $\underline{c}$ и $\bar{c}$ с соответствующими величинами $\underline{l}$ и $\bar{l}$.

Прежде всего из соотношения между $\mathbf{C}$ и $\mathbf{L}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{L} + \mathbf{T}_0 \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{T}_0 \otimes \mathbf{I} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{T}_0)^{(1423)} - \frac{1}{2}(\mathbf{T}_0 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{T}_0)^{(1432)}$$

получим, что для единичных векторов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$

$$\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} : \mathbf{C} : \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} = \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} : \mathbf{L} : \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathbf{T}'_0 : (\mathbf{f} \otimes \mathbf{f} - \mathbf{g} \otimes \mathbf{g})$$

где $T'_0 = T_0 - \frac{1}{3}I(I:T_0)$ – девиатор напряжений Коши. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского для тензоров T'_0 и $(f \otimes f - g \otimes g)$, получим

$$f \otimes g : L : f \otimes g - \tau_0 \leq f \otimes g : C : f \otimes g \leq f \otimes g : L : f \otimes g + \tau_0$$

где $\tau_0 = (T'_0 : T'_0 / 2)^{1/2}$ – интенсивность касательных напряжений. Отсюда следуют неравенства

$$\underline{l} - \tau_0 \leq \underline{c} \leq \underline{l} + \tau_0, \quad \bar{l} - \tau_0 \leq \bar{c} \leq \bar{l} + \tau_0 \quad (4.1)$$

дающие эффективные оценки для $\underline{c}$, $\bar{c}$ в случаях, когда касательные напряжения невелики по сравнению с модулями материала. Если в теоремы сравнения и двусторонние оценки для характеристических чисел подставить $\underline{l} - \tau_0$ вместо $\underline{c}$ и $\bar{l} + \tau_0$ вместо $\bar{c}$, то снова получим строгие, хотя и несколько более грубые двусторонние оценки.

Рассмотрим теперь случай, когда поле тензора упругости $C(x)$ неоднородно, но его отличие от некоторого однородного поля C_0 невелико (в том или ином смысле). Покажем, как свести этот случай к однородному.

Введем некоторую величину α_0 , характеризующую отклонение $C(x)$ от C_0 :

$$\alpha_0 = \sup_{x \in B} ((C(x) - C_0) : (C(x) - C_0))^{1/2}$$

Тогда для любого тензора второго ранга N имеем

$$N : (C_0 - \alpha_0 1) : N \leq N : C : N \leq N : (C_0 + \alpha_0 1) : N$$

(в силу неравенства Коши–Буняковского для тензоров $C - C_0$ и $N \otimes N$).

Далее пользуясь классической теоремой сравнения, получаем, что характеристические числа для тела с тензором упругости C заключены между характеристическими числами с теми же номерами для умозрительных однородных тел с тензорами упругости $C_0^- = C_0 - \alpha_0 1$ и $C_0^+ = C_0 + \alpha_0 1$ соответственно. Заметим, что

$$\underline{c}_0^- = \underline{c}_0 - \alpha_0; \quad \bar{c}_0^+ = \bar{c}_0 + \alpha_0$$

и для каждого из тел сравнения можем пользоваться результатами разд. 3 при условии, что

$$\underline{c}_0^- > 0 \Leftrightarrow \alpha_0 < \underline{c}_0 \quad (4.2)$$

Неравенство (4.2) придает точный смысл предположению об ограниченной неоднородности поля $C(x)$. В отличие от того или иного варианта теории возмущений здесь не требуется, чтобы величина α_0 была очень мала.

5. Пример сопоставления однотипных оценок, полученных на основе классической теоремы сравнения и ее модификаций. Пусть тензор упругости C постоянен, область B , занимаемая телом, – прямоугольный параллелепипед $0 \leq x \cdot e_i \leq l_i$ ($i = 1, 2, 3$), $l_1 < l_2 \leq l_3$, на границе которого тело зашпелено. Тогда в силу первой модификации классической теоремы сравнения (разд. 3) для первого характеристического числа справедливо неравенство

$$\frac{\pi^2 \underline{c}}{l_1^2} < \pi^2 \underline{c} \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \right) \leq \lambda_1 \quad (5.1)$$

С другой стороны, в силу (1.11) при $n = 0$

$$\lambda_1 = \inf_{\mathcal{H}} \frac{\langle \nabla \otimes u : C : \nabla \otimes u \rangle}{\langle u \cdot u \rangle} \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что стоящее в правой части равенства отношение при любом кинематически допустимом поле $u(x)$ является оценкой сверху для характеристического числа λ_1 . В частности, в качестве такого поля можно взять

$$u(x) = g \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \sin \frac{\pi x_2}{l_2} \sin \frac{\pi x_3}{l_3}, \quad x_i = x \cdot e_i, \quad |g| = 1 \quad (5.3)$$

Тогда

$$\lambda_1 \leq \pi^2 \left(\frac{e_1 \otimes g : C : e_1 \otimes g}{l_1^2} + \frac{e_2 \otimes g : C : e_2 \otimes g}{l_2^2} + \frac{e_3 \otimes g : C : e_3 \otimes g}{l_3^2} \right) \quad (5.4)$$

Пусть ориентация граней параллелепипеда относительно характерных направлений в анизотропной среде такова, что вектор e_1 совпадает с нормалью к фронту самой медленной упругой волны. Учитывая, что g в (5.3) и (5.4) – произвольный единичный вектор, выберем его совпадающим с вектором поляризации такой волны. Тогда $e_1 \otimes g$ – та самая диада, на которой биквадратичная форма (2.1) достигает своего минимального значения

$$\underline{c} = e_1 \otimes g : C : e_1 \otimes g \quad (5.5)$$

В силу предположения (5.5) неравенства (5.1) и (5.4) принимают вид

$$\pi^2 \underline{c} \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \right) \leq \lambda_1 \leq \pi^2 \underline{c} \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{e_2 \otimes g : C : e_2 \otimes g}{\underline{c}} \frac{1}{l_2^2} + \frac{e_3 \otimes g : C : e_3 \otimes g}{\underline{c}} \frac{1}{l_3^2} \right) \quad (5.6)$$

Если параллелепипед сильно сплюснут в направлении e_1 ($l_1 \ll l_2$ и $l_1 \ll l_3$), то оценки сверху и снизу в (5.6) почти смыкаются и сколь угодно мало отличаются от величины $\pi^2 \underline{c} / l_1^2$. Иначе говоря, при выбранной ориентации граней параллелепипеда оценка снизу для нижней частоты спектра, полученная на основе модификации теоремы сравнения, стремится к точному значению в асимптотике малых толщин.

Заметим, что оценка (5.1), полученная при помощи тела сравнения с тензором упругости $\underline{c}I$, может рассматриваться и как полученная при помощи некоторого гукера тела сравнения с тензором упругости $\underline{c}(2I^{\text{def}} - I \otimes I)$, где I^{def} – ортогональный проектор на подпространство симметричных тензоров второго ранга:

$$I^{\text{def}} = \frac{1}{2} (I \otimes I^{(1324)} + I \otimes I^{(1342)})$$

$$I^{\text{def}} : H = H^s = \frac{1}{2} (H + H^T), \quad H : I^{\text{def}} : H = H^s : H^s$$

Действительно, для любых диадных H имеем

$$f \otimes g : I : f \otimes g = f \otimes g : (2I^{\text{def}} - I \otimes I) : f \otimes g$$

и поэтому в условиях любой из теорем Ван Хофа

$$\langle \nabla \otimes u : \nabla \otimes u \rangle = \langle \nabla \otimes u : I : \nabla \otimes u \rangle = \langle \nabla \otimes u : (2I^{\text{def}} - I \otimes I) : \nabla \otimes u \rangle$$

Это означает, что при таких условиях (скажем условиях защемления на всей границе) частоты и моды собственных колебаний тел с тензорами упругости $\underline{c}I$ и $\underline{c}(2I^{\text{def}} - I \otimes I)$ совпадают (несмотря на то что второе из этих тел имеет отрицательный модуль объемного сжатия, оно вопреки традиционным представлениям в условиях защемления устойчиво и может испытывать собственные колебания).

Покажем теперь на примере некоторого ортотропного тензора C , что в той же задаче оценка снизу для нижней частоты на основе классической теоремы, полученная при помощи всевозможных допустимых гукеров тел сравнения (т.е. оценка того же самого типа), может быть сколь угодно мала по отношению к точному значению.

Пусть тензоры упругости ортотропного тела C и гукова тела сравнения C' задаются равенствами [9]

$$C = 2G((1^{\text{def}} - S \otimes S) + hS \otimes S), \quad S:I = 0, \quad S = S^T, \quad S:S = 1, \quad h < 1 \quad (5.7)$$

$$C' = 2G' \left(1^{\text{def}} - \frac{1}{3} I \otimes I \right) + K' I \otimes I$$

По условию классической теоремы сравнения

$$H:C':H \leq H:C:H, \quad \forall H$$

откуда получаем неравенство для модулей гукова тела

$$G' \leq Gh, \quad K' \leq \frac{2}{3}G \quad (5.8)$$

Не пытаясь найти точное значение первого характеристического числа λ'_1 для гукова тела (имеющего ту же форму и находящегося при тех же граничных условиях защемления, что и ортотропное тело), воспользуемся оценкой сверху (5.4), заменив тензор упругости C на C' и вектор g на e_3 . Тогда оценка сверху для λ'_1 принимает вид

$$\lambda'_1 \leq \pi^2 \left(\frac{G'}{l_1^2} + \frac{G'}{l_2^2} + \frac{K' + \frac{4}{3}G'}{l_3^2} \right) \leq \pi^2 \left(\frac{Gh}{l_1^2} + \frac{Gh}{l_2^2} + \frac{2}{3} \frac{G(1+2h)}{l_3^2} \right)$$

что в асимптотике малых толщин сводится к

$$\lambda'_1 \leq \pi^2 \frac{Gh}{l_1^2} \quad (5.9)$$

Приведем без вычислений (которые достаточно громоздки) значение нижнего числа Адамара для тензора C (5.7):

$$\underline{c} = 2G \frac{s_2^2 + h(1 - s_2^2)}{2 - s_2^2 + h s_2^2} \quad (5.10)$$

где s_2 – второе из занумерованных в порядке неубывания собственных чисел тензора S .

Если $s_2 \neq 0$, т.е. тензор S отличен от девиатора чистого сдвига, то при $h \ll s_2^2$ из (5.10) получаем

$$\underline{c} \approx G \frac{s_2^2}{1 - s_2^2/2} \gg Gh$$

Значит, в асимптотике малых толщин и малых значений h оценка снизу (5.9) на основе классической теоремы сколь угодно мала по сравнению с точным значением, задаваемым системой неравенств (5.6), которые в данной асимптотике переходят в равенство.

Заметим, что приведенное сопоставление оценок справедливо не только для параллелепипеда, но и для тонкого диска подходящей ориентации и произвольной формы в плане, тонкого эллипсоида и ряда других защемленных тонких тел.

Автор благодарит П.А.Жилина за дискуссию, способствовавшую возникновению идеи данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-05-64347, 96-05-65884).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Friedrichs K.O.* On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality // *Ann. Math.* 1947. V. 48. P. 441–455.
2. *Мухлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.
3. *Gurtin M.* The linear theory of elasticity // *Handbuch der Physik.* Berlin: Springer, 1972. V. 6a/2. P. 1–295.
4. *Van Hove L.* Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux integrales multiples a plusieurs fonctions inconnues // *Proc. Kön. Nederl. Akad. Wetensch.* 1947. V. 50. P. 18–23.
5. *Рыжак Е.И.* К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1991. N 1. С. 111–127.
6. *Ryzhak E.I.* On stable deformation of "unstable" materials in a rigid triaxial testing machine // *J. Mech. and Phys. Solids.* 1993. V. 41. № 8. P. 1345–1356.
7. *Ryzhak E.I.* On stability of homogeneous elastic bodies under boundary conditions weaker than displacement conditions // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1994. V. 47. Pt. 4. P. 663–672.
8. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics // *Handbuch der Physik.* Berlin: Springer, 1965. V. III/3. 602 p.
9. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.1996