

УДК 539.3

© 1997 г.

Р.В. Гольдштейн, С.В. Кузнецов

## ЭНЕРГИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В УПРУГОМ АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ

Рассматривается задача определения функции запасенной энергии, энергии деформирования и коэффициента концентрации энергии, отвечающих сингулярным воздействиям в виде сосредоточенных сил и моментов в безграничной однородной линейно упругой анизотропной среде. Применяется метод мультипольных разложений. Приводятся примеры.

**1. Постановка задачи.** Для гиперупругой однородной анизотропной среды функция запасенной энергии может быть определена как билинейная форма на пространстве симметричных тензоров второго ранга, отвечающих линейным деформациям среды [1]

$$f(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3 \quad (1.1)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензорное поле деформаций,  $\mathbf{C}$  – четырехвалентный тензор упругости, характеризующий упругие свойства среды. Предполагается, что тензор  $\mathbf{C}$  строго эллиптический, так что  $f > 0$  при  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \neq 0$ . Функция запасенной энергии представляет интерес при анализе перераспределения энергии деформирования по различным направлениям при нагружении анизотропной среды.

В качестве внешних воздействий рассматриваются двойная сила без момента, двойная сила с моментом и центр расширения [1], расположенные в начале координат безграничной среды. Существенно, что для этих видов воздействий функция запасенной энергии оказывается положительно однородной по координатам функцией, имеющей особенность только в начале координат.

Зная функцию запасенной энергии, можно вычислить и энергию деформирования:

$$W_\delta = \int_{R^3 \setminus B_\delta} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.2)$$

где  $B_\delta$  – шар радиуса  $\delta$  с центром в начале координат,  $d\mathbf{x}$  – лебегова мера в  $R^3$ . Необходимость исключения в (1.2) окрестности начала координат, где приложены сосредоточенные силовые воздействия, связана, как показано ниже, с наличием неинтегрируемой особенности у функции  $f$ . Выделение окрестностей, содержащих неинтегрируемые особенности, при определении энергии деформирования встречалось и ранее, например в задачах теории дислокаций.

Наряду с энергией, вычисляемой по формуле (1.2), также представляет интерес величина коэффициента концентрации энергии, определяемая формулой

$$W_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^\alpha W_\delta \quad (1.3)$$

где  $\alpha$  – показатель асимптотики при  $\delta \rightarrow 0$  в формуле (1.2).

Для получения аналитического выражения функции  $f$ , отвечающей рассматриваемым видам воздействий, используется метод мультиполярных разложений [2],

позволяющий представить  $f$  в виде абсолютно сходящегося ряда по сферическим гармоникам. Этот же метод применяется для вычисления энергии деформирования.

**2. Основные соотношения.** Уравнения равновесия Ламе для анизотропной среды могут быть представлены в виде

$$A(\partial_x)u(x) \equiv -\operatorname{div}_x C \cdot \nabla_x u(x) = 0 \quad (2.1)$$

где  $A$  - матричный дифференциальный оператор уравнений равновесия,  $u$  - векторное поле перемещений в среде. Применение интегрального преобразования Фурье

$$g^\wedge(\xi) = \int_{R^3} g(x) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) dx$$

к (2.1) позволяет получить символ оператора уравнений равновесия, при помощи которого символ фундаментального решения уравнений равновесия может быть записан в виде

$$E^\wedge(\xi) = A_0^\wedge(\xi) / \det A^\wedge(\xi), \quad A^\wedge(\xi) = (2\pi)^2 \xi \cdot C \cdot \xi \quad (2.2)$$

где  $A_0^\wedge$  - матрица алгебраических дополнений символа  $A^\wedge$ . Формула (2.2) показывает, что символ  $E^\wedge$  положительно однороден по  $|\xi|$  степени  $-2$ .

В общем случае анизотропии фундаментальное решение уравнений (2.1), связанное с обращением по Фурье выражения (2.2), удастся получить только численно.

**3. Сингулярные воздействия.** Рассматриваются следующие виды единичных сосредоточенных силовых воздействий в безграничной среде и вызванные ими (преобразованные по Фурье) поля смещений и деформаций [1].

а) *Двойная сила без момента:*

$$u^\wedge(\xi) = 2\pi i(n \cdot \xi)E^\wedge(\xi) \cdot n, \quad \epsilon^\wedge(\xi) = -(2\pi)^2(n \cdot \xi)\xi \otimes E^\wedge(\xi) \cdot n \quad (3.1)$$

где  $n$  - вектор единичной длины, направленный по линии действия двойной силы.

б) *Двойная сила с моментом.* Соответствующие выражения отличаются от (3.1) заменой  $(n \cdot \xi)$  на  $(n_\perp \cdot \xi)$ ,  $n_\perp$  - направление "плеча" пары, а  $n$  - направление одной из сил.

в) *Центр растяжения - сжатия:*

$$u^\wedge(\xi) = 2\pi i E^\wedge(\xi) \cdot \xi, \quad \epsilon^\wedge(\xi) = -(2\pi)^2 \xi \otimes E^\wedge(\xi) \cdot \xi \quad (3.2)$$

**4. Метод мультипольных разложений.** Анализ выражений (3.1), (3.2) для тензора деформаций, показывает, что в каждом из рассмотренных случаев деформации  $\epsilon^\wedge$  оказываются положительно однородными по  $|\xi|$  степени 0 и вещественно-аналитичными по  $\xi$  всюду в  $R^3 \setminus 0$ . Разложим их в ряды по поверхностным сферическим гармоникам по аналогии с [2]:

$$\epsilon^\wedge(\xi) = \sum_{n=0,2,4,\dots} \sum_{p=1}^{2n+1} \epsilon^{np} Y_n^p(\xi'), \quad \xi' = \frac{\xi}{|\xi|} \quad (4.1)$$

где  $\epsilon^{np}$  - коэффициенты мультипольных рядов, определяемые интегрированием тензора  $\epsilon^\wedge$  по единичной сфере  $S$  в  $R^3$ ;  $Y_n^p$  - сферические гармоники степени  $n$  и индекса  $p$ . Суммирование в (4.1) ведется по гармоникам четных степеней ввиду четности  $\epsilon^\wedge$  на единичной сфере. Существенно, что ряды в правой части (4.1) абсолютно сходятся на  $S$ .

Обратное преобразование Фурье, примененное к правой части (4.1), позволяет получить искомые тензоры деформаций в пространстве оригиналов также в виде мультипольных рядов

$$\epsilon(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-3} \sum_{n=2,4,\dots} \gamma_n \sum_{p=1}^{2n+1} \epsilon^{np} Y_n^p(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad \gamma_n = i^n \pi^{-3/2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

где  $\gamma_n$  – множители перехода от пространства изображений к исходному пространству [2]. При суммировании в (4.2) исключена гармоника нулевой степени, как приводящая к  $\delta$ -образной составляющей в выражении тензора деформаций.

**5. Энергия деформирования.** Подстановка разложения (4.2) в выражение для функции запасенной энергии (1.1) дает

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{x}|^{-6} \sum_{n=2,4,\dots} \sum_{m=2,4,\dots} \gamma_n \gamma_m \sum_{p=1}^{2n+1} \sum_{q=1}^{2m+1} \epsilon^{np} \dots C \dots \epsilon^{mq} Y_n^p(\mathbf{x}') Y_m^q(\mathbf{x}') \quad (5.1)$$

Формула (5.1) показывает, что функция  $f$  имеет особенность в начале координат вида  $O(|\mathbf{x}|^{-6})$ , так что интеграл энергии оказывается расходящимся.

Выделение шаровой окрестности начала координат в (1.2) позволяет получить конечные значения интеграла энергии. С учетом ортонормальности на единичной сфере  $S$  поверхностных сферических гармоник из (5.1) это дает

$$W_\delta = \frac{1}{6} \delta^{-3} \sum_{n=2,4,\dots} \gamma_n^2 \sum_{p=1}^{2n+1} \epsilon^{np} \dots C \dots \epsilon^{np} \quad (5.2)$$

Ряд в правой части (5.2) абсолютно сходится ввиду вещественной аналитичности в  $R^3 \setminus 0$  компонент тензора деформаций. Аналогичным образом по (1.3), (5.2) определяется коэффициент концентрации энергии. Если в (1.1), (1.3) воспользоваться равенством Парсеваля, то получим ( $S$  – сфера единичного радиуса в  $R^3$ )

$$W_0 = \frac{1}{6} \int_S \epsilon^\wedge(\xi') \dots C \dots \epsilon^\wedge(\xi') d\xi' \quad (5.3)$$

Анализ выражений (3.1), (3.2) для тензора деформаций и формул (1.1) – (1.3) показывает, что функция запасенной энергии, энергия деформирования и коэффициент концентрации энергии оказываются формами четвертой степени от вектора  $\mathbf{n}$  для двойной силы без момента и второй степени от векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}_\perp$  для двойной силы с моментом. Ниже дается представление коэффициента концентрации энергии для двойной силы без момента (а) и двойной силы с моментом (б):

$$\text{а) } W_0 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \dots W_0 \dots \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \text{б) } W_0 = \mathbf{n}_\perp \otimes \mathbf{n} \dots W_0 \dots \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}_\perp \quad (5.4)$$

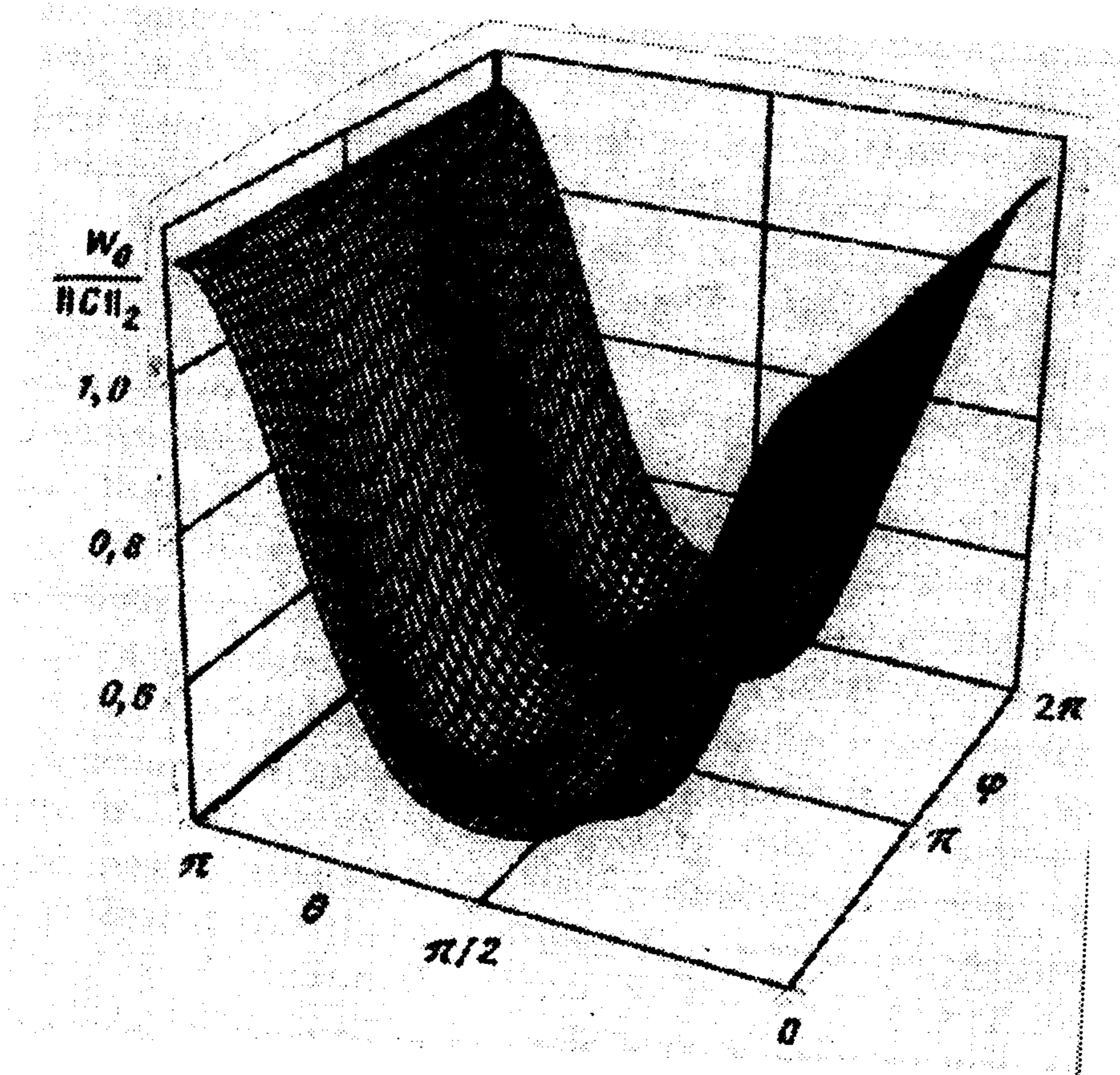
В формулах (5.4)  $W_0$  – симметричный тензор четвертого ранга, зависящий только от упругих свойств анизотропной среды, записанный в силу выражений (3.1), (3.2), (5.3)

$$W_0 = \frac{2}{3} \pi^2 \int_S \xi' \otimes E^\wedge(\xi') \otimes \xi' d\xi'$$

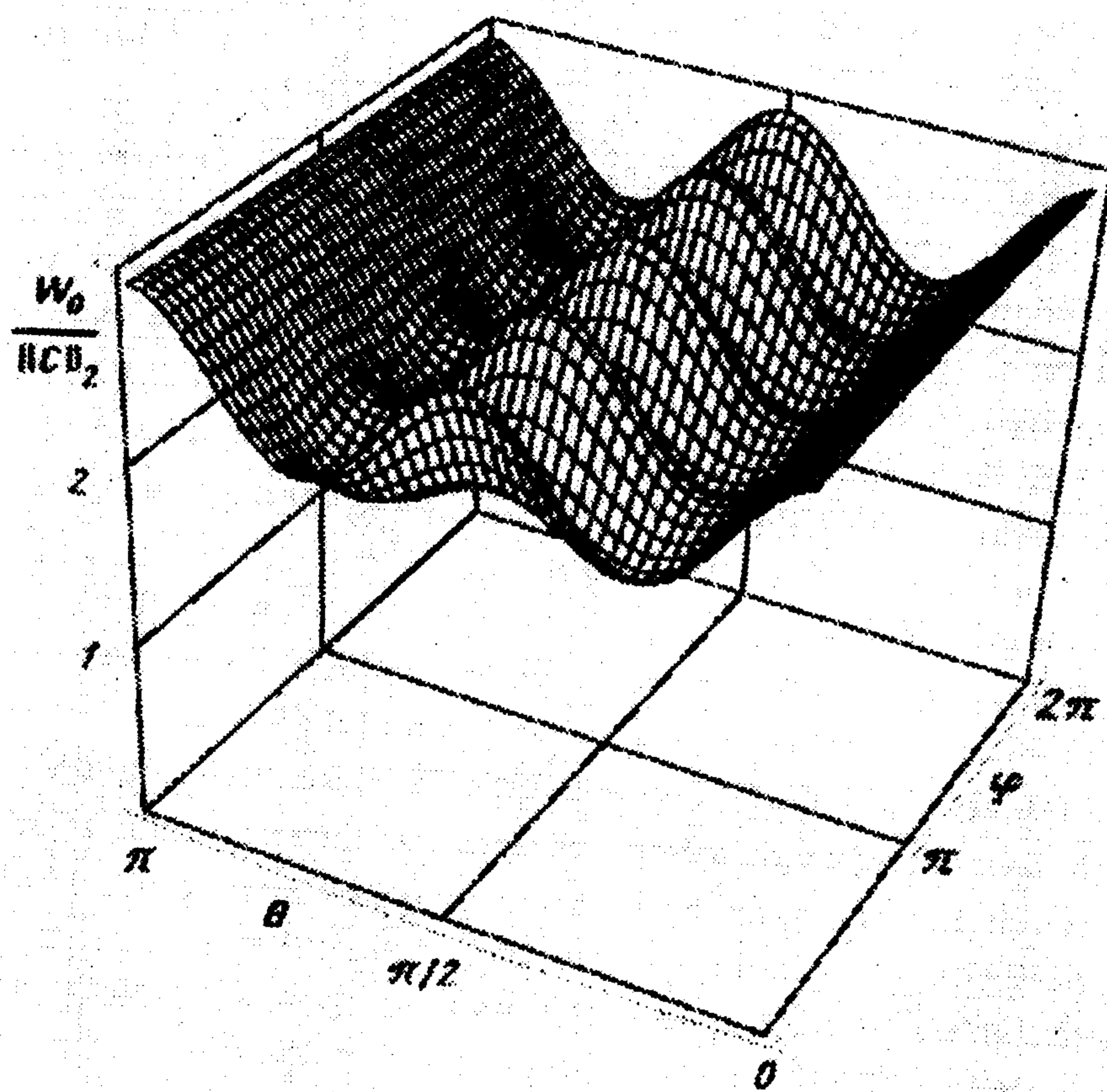
причем учитывалось, что  $A^\wedge(\xi) \cdot E^\wedge(\xi) = I$ . Используя индексную форму для компонент тензора напряжений, формуле для  $W_0$  можно придать следующий вид, удобный при проведении вычислений:

$$W_0^{ijkl} = \frac{2}{3} \pi^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \xi^i E^{\wedge jk}(\xi) \xi^l \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\xi_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \xi_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \xi_3 = \cos \theta$$



Фиг. 1



Фиг. 2

**Ориентация дефектов в анизотропных кристаллах.** Рассмотрим задачу определения ориентации изолированного дефекта в виде двойной силы без момента, отвечающей минимуму коэффициента концентрации энергии. Такого рода дефекты моделируют точечные краевые дислокации, при объединении которых впоследствии могут возникать дислокационные петли.

Выражение (1.3) показывает, что величина коэффициента концентрации энергии определенным образом характеризует энергию деформирования, связанную с образованием в кристалле такого дефекта. В силу (5.4) для определения минимума  $W_0$  достаточно вычислить инвариантный по отношению к различным ориентациям дефекта тензор  $W_0$ , а затем, осуществляя по (5.4) свертку с векторами  $n$ , определить то направление  $n$ , для которого реализуется минимум  $W_0$ .

На фиг. 1, 2 построены графики изменения коэффициентов концентрации энергии для двух кристаллов: transversально изотропного кристалла цинка и кубического кристалла шпинели ( $MgAl_2O_4$ ) соответственно. По вертикальной оси на графиках даны безразмерные значения коэффициента концентрации:  $W_0/\|C\|_2$ , где  $\|C\|_2$  – евклидова норма тензора упругости. Приведенные графики указывают на наличие определенных направлений в рассматриваемых кристаллах, для которых  $W_0$  достигает минимума. Для transversально изотропного кристалла цинка этими направлениями оказываются направления  $\theta = \pi/2$ , отвечающие расположению дефекта в виде двойной силы без момента в плоскости изотропии. В случае кристалла шпинели минимальные направления при  $\theta = \pi/4, 3\pi/4, \varphi = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$  оказываются одинаково наклоненными по отношению к векторам исходного ортогонального базиса, совпадающими с главными осями упругости кристалла.

По всей видимости, минимальные направления отвечают наиболее вероятным ориентациям дефектов в виде двойной силы без момента в рассмотренных кристаллах. Аналогичные результаты могут быть получены и для дефектов в виде двойной силы с моментом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (M7Y000).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gurtin M.E. The Linear Theory of Elasticity // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1973. Bd VIa/2. P. 1–295.
2. Кузнецов С.В. Фундаментальные решения уравнений Ламе для анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50–54.

Москва

Поступила в редакцию  
28.VIII.1995