

УДК 539.3

© 1997 г. П.Е. Товстик

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

На основании трехмерных уравнений теории упругости выводятся приближенные соотношения упругости для осесимметричной деформации тонкой оболочки вращения из нелинейно упругого материала. Деформации предполагаются имеющими порядок малого параметра, пропорционального квадратному корню из безразмерной толщины оболочки. В соотношениях упругости удержаны члены второго порядка малости по отношению к деформациям, в результате чего полученные уравнения имеют погрешность порядка безразмерной толщины оболочки, обычную для линейной теории оболочек. Гипотезы Кирхгофа – Лява выполняются лишь в первом приближении. В качестве примера рассмотрено осевое сжатие оболочки в предположении, что одна из крайних параллелей может свободно скользить по опорной плоскости, перпендикулярной оси вращения. Получена формула для предельной нагрузки, учитывающая в первом приближении физически и геометрически нелинейные эффекты.

1. Метрика деформированной оболочки. Пусть срединная поверхность оболочки вращения до деформации описывается соотношениями (фиг. 1)

$$r_0 = r_0(s_0), \quad \theta_0 = \theta_0(s_0), \quad r'_0 = \cos \theta_0 \quad (1.1)$$

Здесь s_0 – длина дуги образующей, r_0 – расстояние до оси вращения, θ_0 – угол между нормалью к срединной поверхности и осью вращения, штрих означает дифференцирование по s_0 .

Главные радиусы кривизны срединной поверхности до деформации определяются выражениями

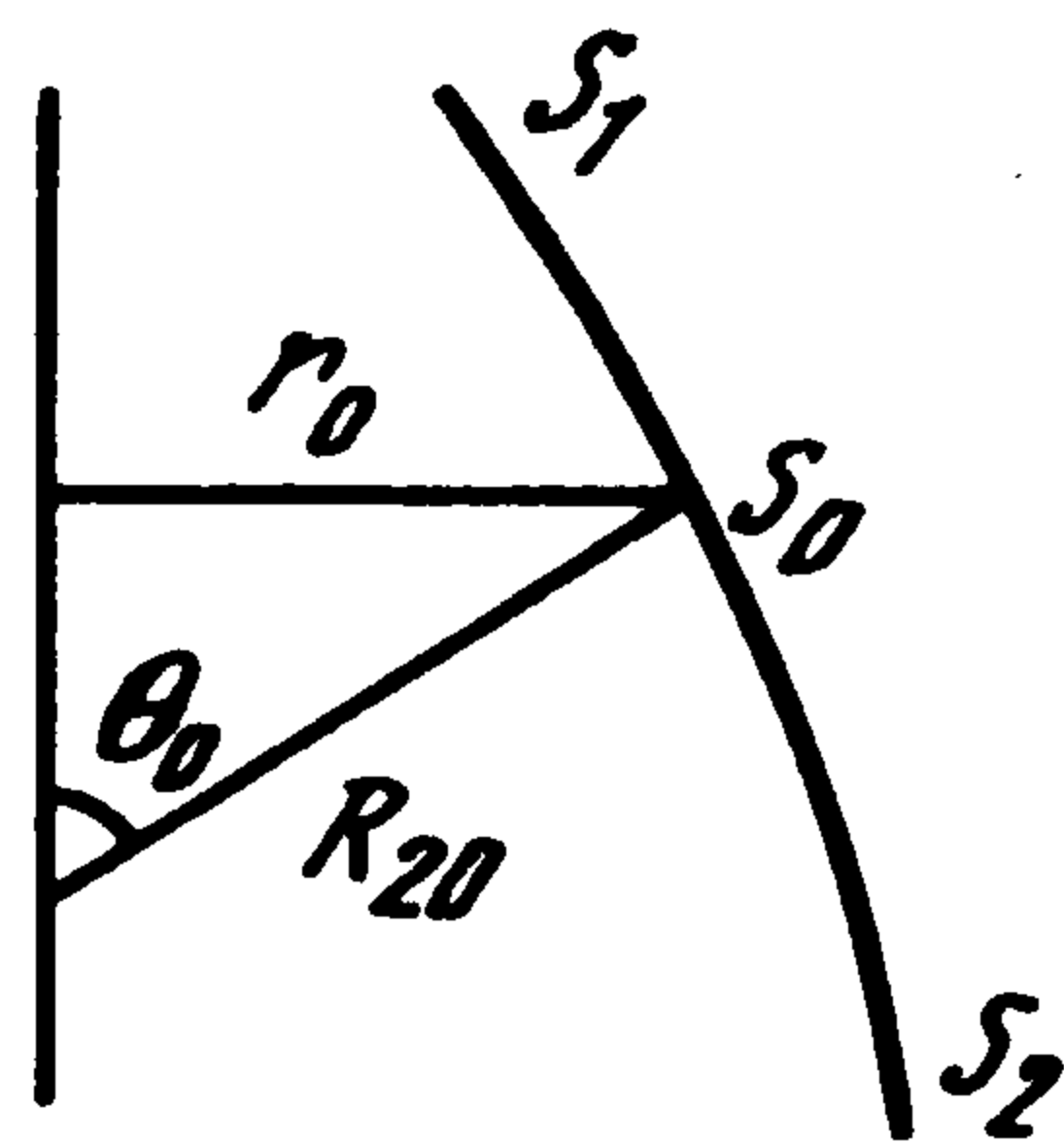
$$\frac{1}{R_{10}} = \theta'_0, \quad \frac{1}{R_{20}} = \frac{\sin \theta_0}{r_0} \quad (1.2)$$

После деформации те же величины обозначим соответственно через s, r, θ, R_1, R_2 . Имеют место формулы, аналогичные (1.1), (1.2).

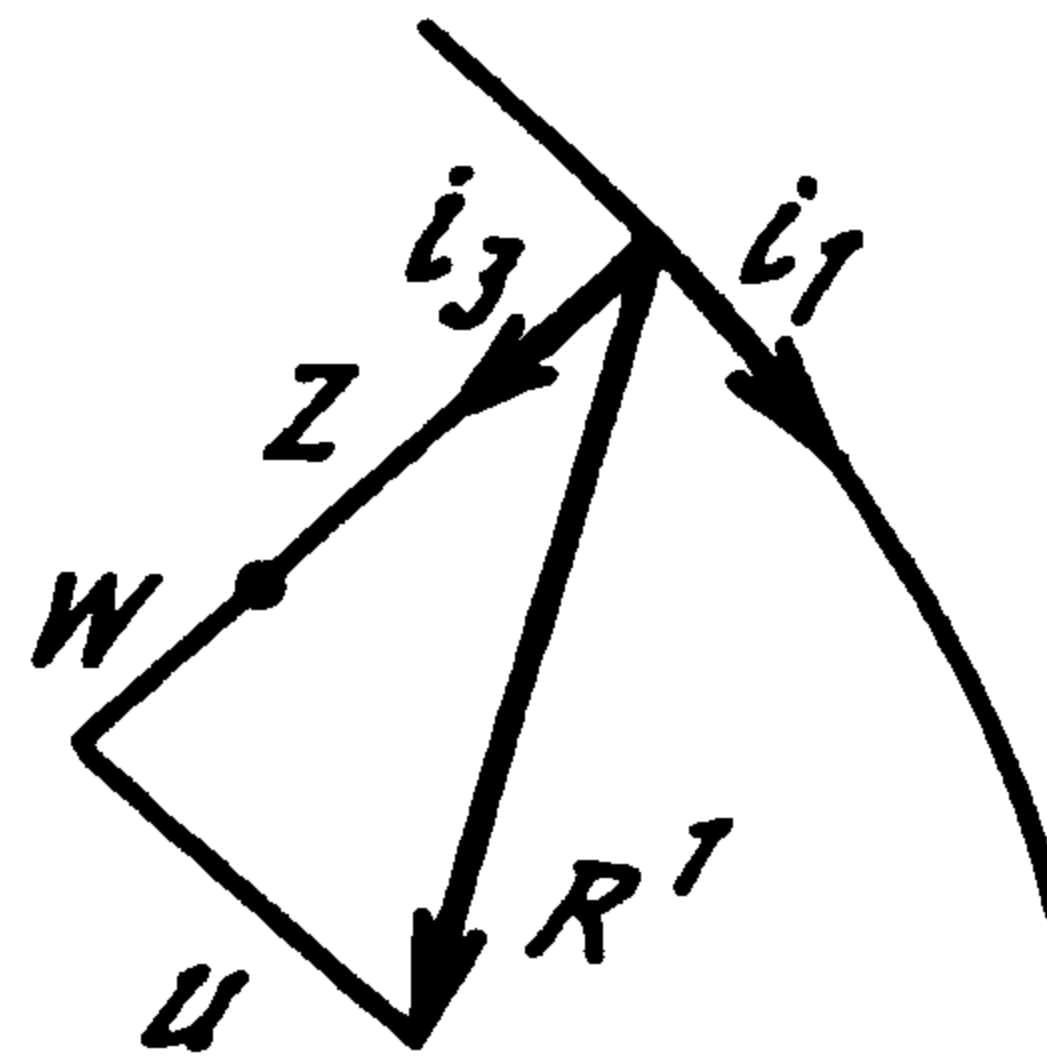
Деформации растяжения элемента срединной поверхности $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и изменения его кривизны κ_1, κ_2 имеют вид

$$\varepsilon_1 = s' - 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r}{r_0} - 1, \quad r' = (1 + \varepsilon_1) \cos \theta \quad (1.3)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_{10}} = \frac{\theta'}{1 + \varepsilon_1} - \theta'_0, \quad \kappa_2 = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_{20}} = \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\sin \theta_0}{r_0}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В оболочке до деформации введем (материальную) ортогональную систему криволинейных координат $q_1 = s_0$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, где φ – угол в окружном направлении, z – расстояние до срединной поверхности. Квадрат расстояния между бесконечно близкими точками равен

$$(d\mathbf{R}^0)^2 = H_i^2 dq_i^2 \equiv g_{ij}^0 dq_i dq_j, \quad H_1 = 1 - z\theta'_0, \quad H_2 = r_0 - z \sin \theta_0, \quad H_3 = 1 \quad (1.4)$$

где H_i – коэффициенты Ламе, g_{ij}^0 – ковариантные компоненты метрического тензора до деформации.

Для описания положения точки (s_0, φ, z) после деформации используем подвижную декартову систему координат с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, связанную с деформированной срединной поверхностью (фиг. 2). Точка $(s_0, \varphi, 0)$ после деформации переходит в начало координат, а положение точки (s_0, φ, z) после деформации описывается вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \mathbf{R}^1, \quad \mathbf{R}^1 = \mathbf{i}_1 u + \mathbf{i}_3 (z + w) \quad (1.5)$$

Функции $u(s_0, z)$ и $w(s_0, z)$ описывают соответственно деформацию сдвига и растяжение нормали к срединной поверхности. В случае принятия гипотез Кирхгофа – Лява $u(s_0, z) = w(s_0, z) \equiv 0$.

Ковариантные компоненты метрического тензора после деформации $g_{ij} = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j$, где $\mathbf{R}_i = \partial \mathbf{R} / \partial q_i$. Имеют место формулы $\partial \mathbf{R}_i / \partial q_j = \Gamma_{ij}^k \mathbf{R}_k$, которые удобно использовать для вычисления символов Кристоффеля Γ_{ij}^k .

Компоненты ϵ_{ij} тензора деформаций Коши – Грина $\mathbf{E}$ находим по формулам

$$g_{ij} - g_{ij}^0 = 2H_i H_j \epsilon_{ij} \quad (1.6)$$

Для осесимметричной деформации $\epsilon_{12} = \epsilon_{23} = 0$.

Ниже понадобятся разложения величин ϵ_{ij} и Γ_{ij}^k в ряды по степеням малого параметра μ , пропорционального квадратному корню из относительной толщины оболочки. При этом будем считать, что для рассматриваемого деформированного состояния оболочки имеют место оценки

$$z \sim \mu^2, \quad \{\epsilon_i, \epsilon_{ii}\} \sim \mu, \quad \epsilon_{13} \sim \mu^2, \quad w \sim \mu^3, \quad u \sim \mu^4$$

$$\frac{\partial y}{\partial s_0} \sim \frac{y}{\mu}, \quad y = \{\epsilon_i, \epsilon_{ij}, \theta, u, w\} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} \sim \frac{y}{\mu^2}, \quad y = \{\epsilon_{ij}, u, w\}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2}$$

где h – толщина оболочки, R – ее характерный размер, ν – коэффициент Пуассона.

В приводимых ниже формулах вспомогательный параметр $\mu_0 = 1$ фиксирует порядок слагаемых – слагаемые с множителем μ_0^k имеют порядок μ^k (приводятся только отличные от нуля величины)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \mu_0(\varepsilon_1 + z\theta') + \mu_0^2 (\varepsilon_1 + z\theta')^2 / 2 + w\theta' - z\theta'_0 + O(\mu^3) \\ \varepsilon_{13} &= \mu_0^2(u_z + w') / 2 + O(\mu^3)\end{aligned}\quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \mu_0\varepsilon_2 + \mu_0^2(\varepsilon_2^2 / 2 + z\kappa_2^0) + O(\mu^3), \quad \kappa_2^0 = (\sin \theta - \sin \theta_0) / r_0 \\ \varepsilon_{33} &= \mu_0 w_z + \mu_0^2 w_z^2 / 2 + O(\mu^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \varepsilon_1' + z\theta'' + O(\mu), \quad \Gamma_{11}^3 = -\mu_0^{-1}\theta' + O(1) \\ \Gamma_{13}^1 &= \mu_0^{-1}\theta' + O(1), \quad \Gamma_{13}^3 = w_z' + O(\mu)\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r_0(r_0' + r_0\varepsilon_2') + O(\mu), \quad \Gamma_{22}^3 = -r_0 \sin \theta + O(\mu)$$

$$\Gamma_{33}^1 = u_{zz} + O(\mu), \quad \Gamma_{33}^3 = \mu_0^{-1}w_{zz} + O(1)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{k}_j = \frac{\mathbf{R}_j}{\sqrt{g_{jj}}}, \quad \gamma_{jn} = \mathbf{k}_j \mathbf{i}_n \quad (1.10)$$

Тогда

$$\gamma_{ii} = 1 + O(\mu^4), \quad \gamma_{13} = \mu_0^2 w' + O(\mu^3), \quad \gamma_{31} = \mu_0^2 u_z + O(\mu^3) \quad (1.11)$$

2. Уравнения равновесия и соотношения упругости. Уравнения равновесия запишем в виде [1, 2]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\circ}{\partial q_i} + \Gamma_{ik}^j \sigma_{ik}^\circ + F_j^\circ = 0, \quad \sigma_{ij}^\circ = V \frac{\sigma_{ij}^*}{H_i H_j}, \quad F_j^\circ = \frac{V F_j^*}{H_j (1 + E_j)} \quad (2.1)$$

$$(V = H_1 H_2 H_3, \quad E_j = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}} - 1)$$

где

$$\sigma_{ij} = \frac{S_i (1 + E_j)}{S_i^*} \sigma_{ij}^*, \quad \frac{S_1^*}{S_1} = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{22})(1 + 2\varepsilon_{33}) - \varepsilon_{23}^2} \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (2.2)$$

Здесь $\sigma_i = \sigma_{ij} \mathbf{k}_j$ – истинные напряжения в теле после деформации, σ_{ij}^* – компоненты энергетического тензора напряжений, $\mathbf{F} = F_j^* \mathbf{k}_j$ – интенсивность распределенной по объему внешней нагрузки, отнесенная к единице объема до деформации.

В случае осесимметричной деформации оболочки вращения одно из уравнений (2.1) удовлетворяется тождественно.

Граничные условия на боковых поверхностях имеют вид

$$\sigma_3 = \mathbf{p}^\pm \equiv p_1^\pm \mathbf{k}_1 + p_3^\pm \mathbf{k}_3, \quad \sigma_3 = \sigma_{31} \mathbf{k}_1 + \sigma_{33} \mathbf{k}_3 \quad \text{при} \quad z = \pm h_2 (h_2 = h / 2) \quad (2.3)$$

где $\mathbf{p}^\pm$ – давление на боковых поверхностях.

В силу формул (2.2) условия (2.3) дают

$$\sigma_{3j}^* = \frac{S_3^*}{S_3(1+E_j)} p_j^\pm, \quad j=1,3 \quad \text{при} \quad z = \pm h_2 \quad (2.4)$$

Материал оболочки считаем упругим и изотропным. Пусть известен потенциал $\Phi(I_1, I_2, I_3)$ как функция инвариантов тензора деформаций E , в качестве которых возьмем

$$I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki} \quad (2.5)$$

Тогда

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} = A_1 \delta_{ij} + A_2 \varepsilon_{ij} + A_3 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \quad (2.6)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $A_k = k \partial \Phi / \partial I_k$ ($k = 1, 2, 3$).

Для пятиконстантной теории упругости

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + G I_2 + \alpha_1 I_1^3 + \alpha_2 I_1 I_2 + \alpha_3 I_3 \quad (2.7)$$

получаем

$$A_1 = \lambda I_1 + 3\alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2, \quad A_2 = 2G + 2\alpha_2 I_1, \quad A_3 = 3\alpha_3 \quad (2.8)$$

Потенциал (2.7) дает общий вид квадратичной зависимости напряжений от деформаций. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ формулы (2.6) дают закон Гука.

Пусть упругие модули третьего порядка α_j в (2.7) не превосходят по порядку величины модуля Юнга E . Отнесем напряжения к E и найдем их разложения в ряды по степеням μ , удерживая члены порядка μ и μ^2 .

Формулы (2.6) дают

$$\sigma_{jj}^* = A_1 + A_2 \varepsilon_{jj} + 3\alpha_3 (\varepsilon_{1j}^2 + \varepsilon_{j3}^2), \quad j=1,3 \quad (2.9)$$

$$\sigma_{13}^* = \varepsilon_{13} (A_2 + 3\alpha_3 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33})), \quad \sigma_{22}^* = A_1 + A_2 \varepsilon_{22} + 3\alpha_3 \varepsilon_{22}^2$$

В силу (1.8) и (2.8) находим

$$A_1 = \mu_0 \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + z\theta' + w_z) + \mu_0^2 [\lambda ((\varepsilon_1 + z\theta')^2 / 2 + w\theta' - z\theta_0' + \varepsilon_2^2 / 2 + z\kappa_2^0 + w_z^2 / 2) + 3\alpha_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - z\theta' + w_z)^2 + \alpha_2 ((\varepsilon_1 + z\theta')^2 + \varepsilon_2^2 + w_z^2)] + O(E\mu^3) \quad (2.10)$$

$$A_2 = 2G + 2\alpha_2 \mu_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + z\theta' + w_z) + O(E\mu^2)$$

Напряжения σ_{ij}^* находим в результате подстановки формул (2.10) и (1.8) в (2.9).

3. Асимптотическое интегрирование системы (2.1). Пусть сначала оболочка находится только под действием краевой нагрузки, а внешние силы, распределенные по объему и боковой поверхности отсутствуют, т.е.

$$F_j^\circ = p_j^\pm = 0, \quad j=1,3 \quad (3.1)$$

Проинтегрируем уравнения (2.1) по z от $-h_2$ до h_2 . Кроме того, первое из уравнений (2.1) умножим на z и проинтегрируем в тех же пределах. Тогда получим три "интегральных" уравнения равновесия

$$\langle \sigma_{ij}^\circ \rangle + \langle \Gamma_{11}^j \sigma_{11}^\circ \rangle + 2\langle \Gamma_{13}^j \sigma_{13}^\circ \rangle + \langle \Gamma_{22}^j \sigma_{22}^\circ \rangle + \langle \Gamma_{33}^j \sigma_{33}^\circ \rangle = 0, \quad j = 1, 3 \quad (3.2)$$

$$\langle z \sigma_{11}^\circ \rangle' - \langle \sigma_{13}^\circ \rangle + \langle z \Gamma_{11}^1 \sigma_{11}^\circ \rangle + 2\langle z \Gamma_{13}^1 \sigma_{13}^\circ \rangle + \langle z \Gamma_{22}^1 \sigma_{22}^\circ \rangle + \langle z \Gamma_{33}^1 \sigma_{33}^\circ \rangle = 0$$

$$\left(\langle Y \rangle \equiv \frac{1}{h} \int_{-h_2}^{h_2} Y dz \right)$$

В силу оценок (1.7) формулы (2.10) и (2.9) дают

$$A_1 \sim E\mu, \quad \{A_2, A_3\} \sim E \quad (3.3)$$

$$\{\sigma_{11}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{33}^*\} = O(E\mu), \quad \sigma_{13}^* = O(E\mu^2) \quad (3.4)$$

Напомним, что символ $\sim$ дает точную оценку порядка, а символ O – оценку порядка сверху.

Сравнение порядков слагаемых в уравнениях (2.1), (3.2) позволяет уточнить оценки (3.4) и получить оценки для интегральных величин в (3.2)

$$\langle \sigma_{22}^\circ \rangle \sim E\mu, \quad \{\langle \sigma_{11}^\circ \rangle, \langle \sigma_{13}^\circ \rangle\} \sim E\mu^2, \quad \langle z \sigma_{11}^\circ \rangle \sim E\mu^3 \quad (3.5)$$

Несоответствие порядков величин σ_{11}° и $\langle \sigma_{11}^\circ \rangle$ связано с тем, что среднее значение величины σ_{11}° близко к нулю.

Снижение порядка величины σ_{33}° по сравнению с оценкой (3.4) накладывает ограничения на деформации оболочки в силу формул (2.9).

Запишем приближенные выражения для σ_{ij}^*

$$\sigma_{11}^* = \mu_0 \{ \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + z\theta' + w_z) + 2G(\varepsilon_1 + z\theta') \} + O(E\mu^2)$$

$$\sigma_{13}^* = \mu_0^2 G(u_z + w') + O(E\mu^3)$$

$$\sigma_{22}^* = \mu_0 \{ \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + z\theta' + w_z) + 2G\varepsilon_2 \} + O(E\mu^2)$$

$$\sigma_{33}^* = \mu_0 \{ \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + z\theta' + w_z) + 2Gw_z \} + \mu_0^2 \{ \lambda((\varepsilon_1 + z\theta')^2 / 2 + w\theta' - z\theta_0' + \varepsilon_2^2 / 2 + \quad (3.6)$$

$$+ z\kappa_2^0 + w_z^2 / 2) + Gw_z^2 + 3\alpha_3 w_z^2 + 2\alpha_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + z\theta' + w_z)w_z + 3\alpha_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + z\theta' + w_z)^2 +$$

$$+ \alpha_2((\varepsilon_1 + z\theta')^2 + \varepsilon_2^2 + w_z^2) \} + O(E\mu^3)$$

В силу оценок $\sigma_{33}^\circ \sim E\mu^2$ и $\langle \sigma_{11}^\circ \rangle \sim E\mu^2$ получаем в нулевом приближении

$$\lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + z\theta' + w_z) + 2Gw_z = 0$$

$$\langle \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + z\theta' + w_z) + 2G(\varepsilon_1 + z\theta') \rangle = 0$$

откуда следуют соотношения

$$\varepsilon_1 = -v\varepsilon_2 + O(\mu^2), \quad \sigma_{11}^* = \frac{E}{1-v^2} z\theta' + O(E\mu^2) \quad (3.7)$$

$$w_z = -v\varepsilon_2 - \frac{v}{1-v} z\theta' + O(\mu^2), \quad w = -v\varepsilon_2 z - \frac{v}{2(1-v)} z^2\theta' + O(\mu^2)$$

Асимптотически главные слагаемые уравнений (2.1) дают

$$\frac{\partial(r_0\sigma_{11}^*)}{\partial s_0} + r_0 \frac{\partial\sigma_{13}^*}{\partial z} = O(E\mu), \quad \frac{\partial\sigma_{33}^*}{\partial z} - \theta'\sigma_{11}^* = O(E\mu) \quad (3.8)$$

Интегрируя по z уравнения (3.8) с учетом выражения (3.7) для σ_{11}^* и граничных условий $\sigma_{13}^* = \sigma_{33}^* = 0$ при $z = \pm h_2$, находим

$$\sigma_{13}^* = \frac{E(h_2^2 - z^2)}{2(1-v^2)r_0} (r_0\theta')' + O(E\mu^3), \quad \sigma_{33}^* = -\frac{E(h_2^2 - z^2)}{2(1-v^2)} \theta'^2 + O(E\mu^3) \quad (3.9)$$

Используя выражение (3.6) для σ_{33}^* , найдем более точное, чем (3.7), выражение для w_z . При этом при вычислении членов порядка μ^2 пользуемся приближенными формулами (3.7). Получаем

$$w_z = -\mu_0 \left(v\varepsilon_2 + \frac{v}{1-v} z\theta' \right) - \frac{\mu_0^2}{\lambda + 2G} \{ \lambda(\varepsilon_1 + v\varepsilon_2) + b_1\varepsilon_2^2 + \\ + z[\lambda(-\theta'_0 + \kappa_2^0) + b_2\varepsilon_2\theta'] + b_3z^2\theta'^2 - \sigma_{33}^* \} + O(E\mu^3) \\ b_1 = \frac{Ev}{2(1-2v)} + \alpha_1 3(1-2v)^2 + \alpha_2(1-2v+6v^2) + 3v^2\alpha_3 \quad (3.10)$$

$$b_2 = -\frac{Ev^2}{(1+v)(1-2v)} + \alpha_1 \frac{6(1-2v)^2}{1-v} - \alpha_2 \frac{6v(1-2v)}{1-v} + \alpha_3 \frac{6v^2}{1-v}$$

$$b_3 = \frac{Ev}{2(1+v)(1-2v)} + \alpha_1 \frac{3(1-2v)^2}{(1-v)^2} + \alpha_2 \frac{1-4v+6v^2}{(1-v)^2} + \alpha_3 \frac{3v^2}{(1-v)^2}$$

Напряжения σ_{11}^* и σ_{22}^* удобно находить из вытекающих из (2.9) соотношений

$$\sigma_{kk}^* = A_2(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{33}) + 3\alpha_3(\varepsilon_{kk}^2 - \varepsilon_{33}^2) + \sigma_{33}^*, \quad k = 1, 2 \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.11) формулы (1.8), (2.10), (3.7), (3.9) и (3.10), получаем

$$\frac{\sigma_{11}^*}{E} = \mu_0 \frac{z\theta'}{1-v^2} + \mu_0^2 \frac{1}{1-v^2} (\varepsilon_1 + v\varepsilon_2 + v z \kappa_2^0 - z\theta'_0) +$$

$$+\mu_0^2\{b_{11}\varepsilon_2^2+b_{12}\varepsilon_2z\theta'+b_{13}(z\theta')^2+b_{14}\theta'^2(h_2^2-z^2)\}+O(\mu^3) \quad (3.12)$$

$$\frac{\sigma_{22}^*}{E}=\mu_0\left(\varepsilon_2+\frac{vz\theta'}{1-v^2}\right)+\mu_0^2\frac{v}{1-v^2}(\varepsilon_1+v\varepsilon_2+z\kappa_2^0-vz\theta'_0)+$$

$$+\mu_0^2\{b_{21}\varepsilon_2^2+b_{22}\varepsilon_2z\theta'+b_{23}(z\theta')^2+b_{24}\theta'^2(h_2^2-z^2)\}+O(\mu^3)$$

где b_{ij} – линейные функции безразмерных величин $\alpha_j^0 = \alpha_j/E$ ($j = 1, 2, 3$) с коэффициентами, зависящими от v .

4. Двумерные уравнения равновесия. Уравнения равновесия криволинейного параллелепипеда, занимающего (до деформации) область $s_0, s_0 + ds_0$; $\varphi, \varphi + d\varphi$; $-h_2 \leq z \leq h_2$, в проекциях на касательную и нормаль к срединной поверхности после деформации имеют вид

$$(r_0 T_1)' - T_2 \cos \theta + r_0 \theta' Q_1 + r_0 p_1 = 0$$

$$(r_0 Q_1)' - T_2 \sin \theta - r_0 \theta' T_1 + r_0 p_3 = 0 \quad (4.1)$$

$$(r_0 M_1)' - M_2 \cos \theta - r_0 (1 + \varepsilon_1) Q_1 + r_0 m_1 = 0$$

где проекции усилий и моментов T_j, Q_1, M_j отнесены к единице длины срединной поверхности до деформации и определяются исходя из формул

$$T_1 \mathbf{i}_1 + Q_1 \mathbf{i}_3 = \left\langle H_2 \frac{S_1^*}{S_1} \boldsymbol{\sigma}_1 \right\rangle h, \quad M_1 \mathbf{i}_2 = \left\langle H_2 \frac{S_1^*}{S_1} \mathbf{R}^1 \times \boldsymbol{\sigma}_1 \right\rangle h \quad (4.2)$$

$$T_2 \mathbf{i}_2 = \left\langle H_1 \frac{S_2^*}{S_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \right\rangle h, \quad M_2 \mathbf{i}_1 = - \left\langle H_1 \frac{S_2^*}{S_2} \mathbf{R}^1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 \right\rangle h$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}_i = \sigma_{ij} \mathbf{k}_j$ – истинные напряжения в теле после деформации, вектор $\mathbf{R}^1$ задан формулой (1.5).

В (4.1) p_1, p_3, m_1 – проекции на орты $\mathbf{i}_j$ внешних усилий и моментов, отнесенные к единице площади срединной поверхности до деформации.

Система уравнений (4.1) при учете (4.2) является точной и эквивалентна системе (3.2) (если последнюю дополнить слагаемыми, учитывающими внешнюю нагрузку). Неточности возникают в результате замены точных соотношений упругости (4.2) и точных величин σ_{ij}^* приближенными.

Для вывода приближенных соотношений упругости проектируем соотношения (4.2) на орты $\mathbf{i}_j$, учитываем формулы (2.2), (1.10) и (3.12) и интегрируем по z согласно (3.2). Тогда

$$T_1 = \mu_0^2 \{K(\varepsilon_1 + v\varepsilon_2) + Eb_{11}h\varepsilon_2^2 + a_1\theta'^2\} + O(Eh\mu^3)$$

$$T_2 = \mu_0 Eh\varepsilon_2 + \mu_0^2 \{Kv(\varepsilon_1 + v\varepsilon_2) + (E + Eb_{21})h\varepsilon_2^2 + a_2\theta'^2\} + O(Eh\mu^3)$$

$$M_1 = \mu_0^3 D\theta' + \mu_0^4 \{D(-\theta'_0 + v\kappa_2^0) + a_3\varepsilon_2\theta'\} + O(Eh^2\mu^3)$$

$$M_2 = \mu_0^3 Dv\theta' + \mu_0^4 \{D(\kappa_2^0 - v\theta'_0) + a_4\varepsilon_2\theta'\} + O(Eh^2\mu^3) \quad (4.3)$$

где

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad a_1 = D + \frac{E(b_{13} + 2b_{14})h^3}{12} \quad (4.4)$$

$$a_2 = \frac{E(b_{23} + 2b_{24})h^3}{12}, \quad a_3 = \frac{Eb_{12}h^3}{12} - 2\nu D, \quad a_4 = \frac{Eb_{22}h^3}{12} + \frac{(\nu - 3\nu^2)D}{2}$$

Система уравнений (4.1) вместе с вытекающим из формул (1.3) геометрическим уравнением

$$(r_0 \varepsilon_2)' = (1 + \varepsilon_1) \cos \theta - \cos \theta_0 \quad (4.5)$$

и соотношениями (4.3) образует замкнутую систему относительно 8 неизвестных функций $T_j, M_j, \varepsilon_j, Q_1, \theta$. Эта система имеет пятый порядок, и основными неизвестными в ней являются $T_1, M_1, \varepsilon_2, Q_1, \theta$, а функции T_2, M_2, ε_1 выражаются через основные неизвестные по формулам (4.3). Дополним уравнения (4.1), (4.5) вытекающими из (4.3) уравнением

$$D\theta' = M_1 + D(\theta_0' - \nu \kappa_2^0) - 2Dc_2 \varepsilon_2 \theta' \quad (4.6)$$

и соотношениями

$$T_2 = \nu T_1 + Eh(\varepsilon_2 + c_1 \varepsilon_2^2) + Dc_2 \theta'^2, \quad \varepsilon_1 = -\nu \varepsilon_2, \quad M_2 = \nu M_1 \quad (4.7)$$

причем последние два приближенных соотношения обеспечивают нужную для дальнейшего точность.

Зависимость от нелинейно упругих свойств материала проявляется только через коэффициенты c_1 и c_2 , равные

$$c_1 = \frac{3}{2} + 3\alpha_1^0(1-2\nu)^3 + 3\alpha_2^0(1-2\nu)(1+2\nu^2) + 3\alpha_3^0(1-2\nu^3) \quad (4.8)$$

$$c_2 = -2\nu + \frac{1+\nu}{1-\nu} [3\alpha_1^0(1-2\nu)^3 + \alpha_2^0(1-2\nu)(1-4\nu+6\nu^2) - 3\alpha_3^0\nu(1-2\nu+2\nu^2)]$$

Эти же коэффициенты входят в приближенное выражение упругой потенциальной энергии

$$\Pi = \int_{s_1}^{s_2} 2\pi r_0 \left[Eh \left(\frac{1}{2} \varepsilon_2^2 + \frac{c_1}{3} \varepsilon_2^3 \right) + D \left(\frac{1}{2} \theta'^2 + \theta'(\nu \kappa_2^0 - \theta_0') + c_2 \varepsilon_2 \theta'^2 \right) \right] ds_0 \quad (4.9)$$

Относительная формальная погрешность полученной системы (4.1), (4.5)–(4.7), а также выражения (4.9) имеет порядок μ^2 или порядок безразмерной толщины оболочки. Здесь речь идет о погрешности построения внутреннего напряженного состояния, а вопрос о его взаимодействии с пограничным слоем (см. [3]) не рассматривается.

Замечание. Формулы (3.12) были получены в предположении (3.1), заключающемся в том, что нагрузка на оболочку отсутствует. Можно проверить, что порядок остаточных членов $O(\mu)$ и $O(\mu^3)$ соотношениях (3.8) и (3.9) сохраняется при

$$F_j^\circ = O(\mu), \quad p_j^\pm = O(\mu^3), \quad j=1,3 \quad (4.10)$$

Вместе с соотношениями (3.8) и (3.9) остаются без изменений и явно выписанные слагаемые в формулах (3.12). Оценки (4.10), как правило, выполняются, ибо потеря устойчивости в линейном приближении происходит при гораздо меньших нагрузках

$$F_j^\circ = O(\mu^2), \quad p_j^\pm = O(\mu^4), \quad j=1,3 \quad (4.11)$$

Оценки (4.10) нарушаются, если оболочка находится под действием очень большого внеш-

него давления $p_3^\pm \sim \mu^2$, одинакового с обеих сторон оболочки. При этом величина w_2 в (3.13) приобретает постоянное слагаемое и формулы (3.16) и (4.3) также меняются. Этот случай здесь не рассматривается.

5. Задача о сжатии осевой силой. Пусть оболочка находится под действием осевой силы P , приложенной к ее торцам. Пусть край $s_0 = s_1$ оболочки закреплен в радиальном направлении, а край $s_0 = s_2$ может свободно скользить по опорной плоскости, перпендикулярной оси вращения. Тогда в окрестности края $s_0 = s_2$ при $P \sim Eh^2$ реализуется напряженное состояние, удовлетворяющее оценкам (1.7).

В качестве характерного размера R оболочки возьмем $R = r_0(s_2)$ и перейдем к безразмерным переменным (с индексом $^\circ$) по формулам

$$\{s_0, r_0\} = R\{s_0^\circ, r_0^\circ\}, \quad \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \mu\{\varepsilon_1^\circ, \varepsilon_2^\circ\}, \quad \{p_1, p_3\} = Eh\mu^2 R^{-1}\{p_1^\circ, p_3^\circ\} \quad (5.1)$$

$$\{T_1, Q_1\} = Eh\mu^2\{T_1^\circ, Q_1^\circ\}, \quad T_2 = Eh\mu T_2^\circ, \quad \{M_1, M_2\} = EhR\mu^3\{M_1^\circ, M_2^\circ\}$$

Замены (5.1) введены таким образом, чтобы в окрестности края $s_0 = s_2$ безразмерные величины имели порядок единицы.

Перейдем к проекциям V и U внутренних усилий соответственно на осевое и перпендикулярное к нему направления

$$T_1^\circ = U \cos \theta + V \sin \theta, \quad Q_1^\circ = U \sin \theta - V \cos \theta \quad (5.2)$$

В дальнейшем индекс $^\circ$ опускаем.

Тогда система уравнений относительно неизвестных

$$V, U, \varepsilon_2, M_1, \theta \quad (5.3)$$

принимает вид

$$(r_0 V)' = 0$$

$$\mu(r_0 U)' = \varepsilon_2 + \mu v(U \cos \theta + V \sin \theta) + \mu c_1 \varepsilon_2^2 + \mu^3 c_2 \theta'^2$$

$$\mu(r_0 \varepsilon_2)' = (1 - \mu v \varepsilon_2) \cos \theta - \cos \theta_0 \quad (5.4)$$

$$\mu(r_0 M_1)' = r_0(1 - \mu v \varepsilon_2)(U \sin \theta - V \cos \theta) + \mu v M_1 \cos \theta$$

$$\mu \theta' = M_1 + \mu(\theta'_0 - v \varepsilon_2^0) - 2\mu^2 c_2 \varepsilon_2 \theta'$$

Граничные условия имеют вид

$$\varepsilon_2 = 0, \quad (\theta = \theta_0 \text{ или } M_1 = 0) \text{ при } s_0 = s_1 \quad (5.5)$$

$$U = M_1 = 0 \text{ при } s_0 = s_2$$

Первое из уравнений (5.4) дает

$$V = \frac{C}{r_0}, \quad P = 2\pi EhR\mu^2 C = \frac{2\pi Eh^2}{\sqrt{12(1-v^2)}} C \quad (5.6)$$

Далее будем искать предельное значение силы P .

6. Асимптотическое интегрирование системы (5.4). Вдали от краев оболочка деформируется, как безмоментная

$$\theta = \theta_0 + O(C\mu^2), \quad M_1 = O(C\mu^3), \quad U = \frac{C \cos \theta_0}{r_0 \sin \theta_0}, \quad \varepsilon_2 = O(C\mu) \quad (6.1)$$

и основные деформации сосредоточены в окрестности края $s_0 = s_2$.

Запишем систему (5.4) в векторном виде

$$\mu \dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, s_0, C, \mu), \quad \mathbf{x} = \{U, \varepsilon_2, M_1, \theta\} \quad (6.2)$$

проведем растяжение масштаба $\xi = (s_0 - s_2)/\mu$ и будем искать ее решение в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(\xi) + \mu \mathbf{x}^1(\xi) + O(\mu^2), \quad C = C^0 + \mu C^1 + O(\mu^2) \quad (6.3)$$

Точность системы (5.4) позволяет построить два первых члена рядов (6.3).

Учитывая, что

$$r_0(s_0) = 1 + \mu \xi \cos \gamma + O(\mu^2), \quad \gamma = \theta(s_2); \quad \theta_0(s_0) = \gamma + \mu \xi k_1 + O(\mu^2), \quad k_1 = \theta'_0(s_2)$$

и приравнявая в системе (5.4) коэффициенты при μ^0 и при μ^1 , получим в нулевом приближении

$$\dot{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{F}^0 \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}^0, s_2, C^0, 0) \quad (6.4)$$

или (см. также [4, 5])

$$\begin{aligned} \dot{U}^0 &= \varepsilon_2^0, \quad \dot{\varepsilon}_2^0 = \cos \theta^0 - \cos \gamma \\ \dot{M}_1^0 &= U^0 \sin \theta^0 - C^0 \cos \theta^0, \quad \dot{\theta}^0 = M_1^0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

(точка означает производную по ξ) и в первом приближении

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{L}(\xi) \mathbf{x}^1 + \mathbf{g}, \quad \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{F}^0}{\partial \mathbf{x}^0}, \quad \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{F}^0}{\partial s_0} \xi + \frac{\partial \mathbf{F}^0}{\partial C_0} C^1 + \frac{\partial \mathbf{F}^0}{\partial \mu} \mu \quad (6.6)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{U}^1 &= \varepsilon_2^1 + g_1, \quad \dot{\varepsilon}_2^1 = -\theta^1 \sin \theta^0 + g_2 \\ \dot{M}_1^1 &= U^1 \sin \theta^0 + (U^0 \cos \theta^0 + C^0 \sin \theta^0) \theta^1 + g_3, \quad \dot{\theta}^1 = M_1^1 + g_4 \end{aligned} \quad (6.7)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= -\xi \dot{U}^0 \cos \gamma + U^0 (v \cos \theta^0 - \cos \gamma) + v C^0 \sin \theta^0 + c_1 \varepsilon_2^{0^2} + c_2 M_1^{0^2} \\ g_2 &= -\xi \dot{\varepsilon}_2^0 \cos \gamma - \varepsilon_2^0 (v \cos \theta^0 + \cos \gamma) + k_1 \xi \sin \gamma \\ g_3 &= -v \varepsilon_2^0 (U^0 \sin \theta^0 - C^0 \cos \theta^0) - C^1 \cos \theta^0 + \xi C^0 \cos \theta^0 \cos \gamma + M_1^0 (v \cos \theta^0 - \cos \gamma) \\ g_4 &= k_1 - v (\sin \theta^0 - \sin \gamma) - 2c_2 \varepsilon_2^0 M_1^0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Частные производные в выражении (6.6) для $\mathbf{g} = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ вычисляются при тех же значениях аргументов, что и в (6.4).

При $s_0 < s_2$ решение системы (5.4) переходит в безмоментное решение (6.1), что дает граничные условия при $\xi \rightarrow -\infty$

$$U^0 = \frac{C^0 \cos \gamma}{\sin \gamma}, \quad \varepsilon_2^0 = M_1^0 = 0, \quad \theta^0 = \gamma \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty \quad (6.9)$$

$$U^1 = \frac{C^1 \cos \gamma}{\sin \gamma} - \frac{C^0 (k_1 \xi \sin \gamma + \cos^2 \gamma)}{\sin^2 \gamma}, \quad \varepsilon_2^1 = M_1^1 = 0, \quad \theta^1 = k_1 \xi \quad (6.10)$$

Граничные условия (5.5) дают

$$U^0 = M_1^0 = 0, \quad U^1 = M_1^1 = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \quad (6.11)$$

7. Вычисление осевой силы. Система (6.5) имеет интеграл [4]

$$\varepsilon_2^{0^2} - M_1^{0^2} - 2U^0(\cos \theta^0 - \cos \gamma) - 2C^0(\sin \theta^0 - \sin \gamma) = 0 \quad (7.1)$$

в котором произвольная постоянная найдена в силу условий (6.9). При численном решении краевой задачи нулевого приближения (6.5), (6.9), (6.11) воспользуемся методом "пристрелки". Зададим начальные условия

$$U^0 = M_1^0 = 0, \quad \theta^0 = \tau, \quad \varepsilon_2^0 = \tau_1 \quad \text{при } \xi = 0 \quad (7.2)$$

Параметр τ считаем заданным, а τ_1 находим из соотношения (7.1)

$$\tau_1 = \sqrt{2C^0(\sin \tau - \sin \gamma) \operatorname{sign}(\pi/2 - \gamma)} \quad (7.3)$$

Постоянную C^0 подбираем из условий (6.9), для выполнения которых достаточно потребовать, чтобы

$$\|x^0(\xi) - x^0(-\infty)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \quad \|x\| \equiv (x_1^2 + \dots + x_4^2)^{1/2} \quad (7.4)$$

Если соотношение (7.4) выполнено, то $C^0 = C^0(\tau)$, $x^0 = x^0(\xi, \tau)$. Величину C^0 , соответствующую предельной точке в нулевом приближении, находим из условия

$$dC^0/d\tau = 0 \quad (7.5)$$

Величину C^1 находим из условия

$$\int_{-\infty}^0 (g_1 \varepsilon_2^* - g_2 U^* + g_3 \theta^* - g_4 M_1^*) d\xi = 0 \quad (7.6)$$

существования решения x^1 системы (6.7), удовлетворяющего граничным условиям (6.10), (6.11). Здесь $x^* = \{U^*, \varepsilon_2^*, M_1^*, \theta^*\}$ удовлетворяет системе $\dot{x}^* = L(\xi)x^*$ и нулевым граничным условиям ($x^*(-\infty) = U^*(0) = M_1^*(0) = 0$).

При выполнении условия (7.4) имеем

$$x^* = \partial x^0 / \partial \tau \quad (7.7)$$

что дает возможность выразить C^1 из (7.6) только через нулевое приближение x^0 .

После преобразований получаем

$$C^1 = f_0 + f_k k_1 + f_v v + f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 \quad (7.8)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{j_1 + j_2}{2}, \quad f_k = j_3, \quad f_v = \frac{j_2 - 5j_4 + 2j_5}{2} \\ f_1 &= (1 - 2v)^3 j_2 + \frac{3(1+v)(1-2v)^3}{1-v} j_4 \\ f_2 &= (1 - 2v)(1 + 2v^2) j_2 + \frac{(1+v)(1-2v)(1-4v+6v^2)}{1-v} j_4 \\ f_3 &= (1 - 2v^3) j_2 - \frac{3v(1+v)(1-2v+2v^2)}{1-v} j_4 \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$j_i = J_i / J_0, \quad i = 1, \dots, 5$$

а величины J_i зависят только от угла γ и определяются при численном интегрировании системы (6.5) по формулам

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^0 (\sin \theta^0 - \sin \gamma) d\xi, \quad J_1 = \cos \gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^0 \xi ((M_1^0)^2 - (\epsilon_2^0)^2) d\xi \\ J_2 &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^0 (\epsilon_2^0)^3 d\xi, \quad J_3 = -1 - \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^0 (U^0(\xi) - U^0(-\infty)) \xi d\xi \\ J_4 &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^0 \epsilon_2^0 (M_1^0)^2 d\xi, \quad J_5 = \sin \tau - \sin \gamma \end{aligned} \quad (7.10)$$

Для разных γ величина C^0 и коэффициенты, входящие в формулы (7.8) и (7.9), приведены ниже

γ , град	5	10	20	30	45	60	70	80	85
$C^0 \times 10^4$	-30	-121	-481	-1078	-2402	-4221	-5704	-7439	-8460
$f_0 \times 10^4$	45	124	307	439	336	-323	-1070	-1868	-2069
$f_k \times 10^4$	4330	6104	8554	10362	12330	13637	14192	14741	15654
$f_v \times 10^4$	131	366	1007	1751	2807	3430	3376	2718	2024
$j_2 \times 10^4$	0	-6	-65	-260	-989	-2374	-3563	-4562	4570
$j_4 \times 10^4$	0	-1	-6	-24	-85	-172	-211	-183	-119

Случай $\gamma > \pi/2$ сводится к рассмотренному заменой $\gamma^0 = \pi - \gamma$, причем оказывается, что

$$C^0(\pi - \gamma) = C^0(0), \quad C^1(\pi - \gamma) = -C^1(\gamma) \quad (7.11)$$

При $\gamma \ll 1$ замены

$$\{U^0, \theta^0\} = \gamma \{U^*, \theta^*\}, \quad \{M_1^0, \epsilon_2^0\} = \gamma^{3/2} \{M_1^*, \epsilon_2^*\}, \quad \xi = \gamma^{-1/2} \xi^*, \quad C^0 = \gamma^2 C^* \quad (7.12)$$

приводят систему (6.4) к виду, не содержащему γ (см. [5])

$$\frac{t^2 U^*}{d\xi^{*2}} = \frac{1}{2}(1 - \theta^{*2}), \quad \frac{d^2 \theta^*}{d\xi^{*2}} = \theta^* U^* - C^* \quad (7.13)$$

$$\theta^* \rightarrow 1, \quad U^* \rightarrow C^* \quad \text{при} \quad \xi^* \rightarrow -\infty$$

$$U^* = 0, \quad M_1^* = 0 \quad \text{при} \quad \xi^* = 0$$

При $\gamma \ll 1$ для приведенных выше коэффициентов имеем приближенные равенства

$$\{f_0, f_v\} = \gamma^{3/2} \{f_0^*, f_v^*\}, \quad f_k = \gamma^{1/2} f_k^*, \quad \{j_2, j_4\} = \gamma^{7/2} \{j_2^*, j_4^*\} \quad (7.14)$$

Приведем предельное значение величины C^* и численные значения коэффициентов со звездочкой: $C^* = -0,3963$, $f_0^* = 0,1768$, $f_k^* = 1,4602$, $f_v^* = 0,5092$, $j_2^* = -0,2652$, $j_4^* = -0,0268$.

Из (7.14), следует, что для пологих оболочек вклад физически нелинейных слагаемых (с множителями c_1 и c_2 в (5.4)) уменьшается.

8. Обсуждение результатов. Вопросы построения линейной двумерной теории тонких оболочек исходя из трехмерной теории упругости рассмотрены во многих работах (см. [3, 6]).

Здесь на основании трехмерной теории получены приближенные соотношения упругости (4.3) для осесимметричной деформации нелинейно упругой оболочки вращения. В основу вывода положены соотношения (1.7), основным из которых является предположение о порядке деформаций $\epsilon_{ij} = O(\mu)$. Для больших закритических

перемещений оболочек вращения соотношения (1.7) были получены ранее [4, 5]. Деформации $\varepsilon_{ij} = O(\mu)$ являются относительно большими, ибо, например, докритические деформации при потере устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии имеют существенно меньший порядок $\varepsilon_{ij} = O(\mu^2)$. Поэтому, если для рассматриваемых деформаций хотим получить двумерные уравнения с погрешностью порядка μ^2 или порядка h/R , следует учитывать нелинейную зависимость напряжений от деформаций.

Выше для пяти-константного упругого материала (2.7) в предположении, что $\alpha_j = O(E)$, получены нелинейные соотношения упругости (4.3), которые при $\varepsilon_{ij} = O(\mu)$ имеют погрешность порядка μ^2 . При деформациях того же порядка μ соотношения (4.3) имеют место и для произвольного нелинейно упругого материала в предположении, что коэффициенты четвертого и последующих порядков в разложении (2.7) упругого потенциала Φ в ряд по инвариантам I_k существенно не превосходят E .

Для больших деформаций (порядка единицы) строгий вывод из трехмерных уравнений теории упругости соотношений упругости для оболочек в литературе отсутствует. Имеются соотношения упругости (см. [7, 8] и др.), полученные в результате применения гипотез типа Кирхгофа – Лява. В случае малых (порядка μ) деформаций сравнение с формулами (4.3) дает различие в нелинейных слагаемых.

Система (5.4) при $c_1 = c_2 = 0$ методом асимптотического интегрирования исследовалась в [4, 5, 9]. Рассматривалась [4, 5] задача о больших осесимметричных закритических деформациях оболочки под действием внешнего давления. При этом форма части срединной поверхности близка к исходной, а другая часть близка к получающейся при зеркальном отражении от плоскости, перпендикулярной оси вращения. В нулевом приближении получена [4, 5] система, эквивалентная (6.5) при $C^0 = 0$, что соответствует резкому уменьшению нагрузки при закритических деформациях. В [4] зависимость между нагрузкой и прогибом была найдена при рассмотрении первого приближения, а в [5] – вариационным методом с использованием решения нулевого приближения в качестве координатной функции. Те же результаты были получены ранее [10] геометрическим методом, который, как оказалось, эквивалентен методу асимптотического интегрирования системы (5.4) при построении внутреннего пограничного слоя. Зависимость $C^0(\gamma)$, приведенная в конце разд. 7, получена в [9].

Системы нелинейных уравнений типа (4.1) осесимметричной деформации оболочек вращения рассматривались во многих работах ([11–13] и др.). В работах [12, 13] и ряде других рекомендуется "с целью уточнения" относить усилия и моменты к единице длины срединной поверхности после деформации. Это вполне возможно, если одновременно менять соотношения упругости. Если же использовать те же соотношения упругости, то, как показано в [7], получается система, которой не соответствует какая-либо упругая энергия. Для рассматриваемой здесь задачи о предельной нагрузке при осевом сжатии уравнения из упомянутых работ позволяют правильно определить величину C^0 в (6.3) и дали бы ошибочное значение поправки C^1 . Интересно отметить, что рассмотренная в [4, 5] задача о закритических деформациях, связанных с зеркальным отражением, предъявляет повышенные требования к исходной системе. Проведенные расчеты показали, что использование системы из [12, 13] не позволяет правильно определить даже главный член в выражении для осевой силы.

Выше найдено предельное значение силы P . Бифуркация в неосесимметричную форму равновесия может предшествовать предельной нагрузке. В частности, это всегда будет так для оболочек, имеющих участки с отрицательной гауссовой кривизной, ибо для таких оболочек при бифуркации $P = O(Eh^2\mu^{2/3})$ (см. [14]). Решение системы (5.4) может быть использовано для решения задачи о бифуркации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00411), Международного научного фонда и Российского Правительства (NW5300).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
2. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
3. Гольденвейзер А.Л. Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.
4. *Kriegsmann G.A., Lange C.G.* On large axisymmetrical deflection states of spherical shells // *J. Elasticity*. 1980. V. 10. N 2. P. 179–192.
5. Евкин А.Ю., Коровайцев А.В. Асимптотический анализ закритического осесимметричного напряженно-деформированного состояния оболочек вращения при сильном изгибе // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 125–133.
6. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко–Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 124–138.
7. Юдин А.С. О некоторых нелинейных уравнениях осесимметричной деформации оболочек вращения // Изв. Сев.-Кавказ. НЦВШ. Серия естеств. наук. 1973. № 4. С. 93–98.
8. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
9. Коротеева П.В., Товстик П.Е., Шувалкин С.П. О величине осевой силы при закритических осесимметричных деформациях оболочки вращения // Вестн. С.-Пб. ун-та. Сер. 1. 1995. Вып. 2. С. 58–61.
10. Погорелов А.В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М.: Наука, 1967. 280 с.
11. *Reissner E.* On axisymmetrical deformation of thin shells of revolution // *Proc. Symp. in Appl. Math.* V. 3. N.Y.: McGraw-Hill, 1950. P. 27–52.
12. Аксельрад Э.Л. Гибкие оболочки. М.: Наука, 1976. 376 с.
13. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 231 с.
14. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 319 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
19.IX.1995