

УДК 539.3:534.1

© 1997 г.

Н.Ф. Морозов, И.Л. Суровцова

ЗАДАЧА О ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ КОНТУРА

Рассматривается задача о динамическом нагружении плоских упругих областей с нерегулярной границей. Энергетическое решение задачи теории упругости строится при помощи модифицированного метода Б.В. Кострова [1] и идеи расширения симметричных операторов в гильбертовом пространстве. Получено решение задачи о нагружении клина и области, контур которой содержит m входящих углов.

1. В случае плоского гармонического движения упругой среды потенциалы продольных $\Phi(r, \theta)$ и поперечных $\Psi(r, \theta)$ волн удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\Phi + k_1^2\Phi = 0, \quad \Delta\Psi + k_2^2\Psi = 0; \quad k_h = \omega / c_h \quad (1.1)$$

где $c_1(c_2)$ – скорость распространения продольных (поперечных) волн.

Пусть упругая среда, характеризующаяся постоянными Ламе λ, μ и плотностью ρ , заполняет бесконечную клиновидную область $\Omega(-\alpha, \alpha) = \{r \geq 0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$. Смещения u_r, u_θ , соответствующие заданным потенциалам, в полярной системе координат определяются формулами

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad (1.2)$$

Существует два типа нагружений, при которых граничные условия устанавливаются независимо для продольного и поперечного потенциалов, и, следовательно, возможно их разделение. Это задача о нагружении клина, граничащего с жесткой средой, касательными напряжениями и случай действия поверхностных сил, нормальных к границе, которая по условиям закрепления не может иметь касательных перемещений.

Однако для корректной постановки задачи к уравнениям для потенциалов и краевым условиям необходимо добавить условия, регламентирующие поведение искомых полей в окрестностях сингулярных точек области, а именно вблизи ребра $r = 0$ и бесконечности $r \rightarrow \infty$.

Естественное энергетическое условие на ребре, эквивалентное требованию выполнения закона сохранения энергии, может быть сформулировано в виде

$$u = O(r^p), \quad p > 0, \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

На бесконечности должны выполняться условия излучения [2]. Было показано [1, 3], что требование выполнения условия на ребре не позволяет свести задачу, даже при граничных условиях, допускающих разделение потенциалов, полностью к двум акустическим случаям; рассматривалась [1, 3] задача о падении плоской волны на жесткий клин, вставленный без трения в безграничную упругую среду.

Ниже рассматривается задача о динамическом нагружении плоских областей с угловыми точками контура. Нагрузка выбирается таким образом, чтобы граничные условия устанавливались независимо для продольного и поперечного потенциалов.

Сначала рассмотрим задачу о динамическом нагружении клина. Клин, границы которого по условиям закрепления не могут иметь касательных перемещений, нагружен нормальными к граням поверхностными силами, осциллирующими по закону $\exp(i\omega t)$:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \pm\alpha) = h_{\pm}(r), \quad u_r(r, \pm\alpha) = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (1.4)$$

Таким образом, в области $\Omega(-\alpha, \alpha)$ возбуждается некоторое волновое движение.

В силу линейности задача расщепляется на две независимые задачи симметричную и антисимметричную:

$$\text{а) } \sigma_{\theta\theta}(r, \pm\alpha) = h(r), \quad \text{б) } \sigma_{\theta\theta}(r, \pm\alpha) = \pm h(r) \quad (1.5)$$

Будем рассматривать симметричную постановку. В терминах волновых потенциалов граничные условия (1.4), (1.5) будут выполнены, если потребовать, чтобы

$$\Phi|_{\theta=\pm\alpha} = \frac{1}{\omega^2 \rho} h(r), \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pm\alpha} = -\frac{1}{\omega^2 \rho} r h'(r) \quad (1.6)$$

Суммируя изложенное, приходим к следующей задаче.

Задача. Найти поля Φ и Ψ , удовлетворяющие в области $\Omega(-\alpha, \alpha)$ дифференциальным уравнениям (1.1), краевым условиям (1.6), условию на ребре (1.3) и условиям излучения.

2. Сначала попробуем искать решение поставленной задачи посредством решения двух акустических задач, для продольного и поперечного потенциалов независимо, не принимая во внимание условие на ребре.

Будем разыскивать решения уравнений Гельмгольца класса $W_{2loc}^1(\bar{\Omega})$ при выполнении условий излучения. Заметим, что в этом классе задачи однозначно разрешимы.

Таким образом, имеем краевую задачу Дирихле для потенциала Φ_a и задачу Неймана для Ψ_a . Точное решение поставленных задач можно получить, используя интегральное преобразование Конторовича–Лебедева [4].

При симметричном нагружении решения акустических задач выражаются через следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \Phi_a(r, \theta) &= \frac{1}{4i\omega^2 \rho} \int_0^\infty \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \frac{h(x)}{x} \kappa_1(r, x, \mu) dx d\mu \\ \Psi_a(r, \theta) &= \frac{1}{4i\omega^2 \rho} \int_0^\infty \int_{-i\infty}^{i\infty} h'(x) \kappa_2(r, x, \mu) dx d\mu \\ \kappa_n(r, x, \mu) &= \frac{\sin \pi \mu e^{-i\pi \mu} H_\mu^{(2)}(k_n r) H_\mu^{(2)}(k_h x)}{\cos \mu \alpha}, \quad n = 1, 2 \end{aligned}$$

Можно показать, что каждый из потенциалов Φ_a и Ψ_a удовлетворяет условию излучения.

Для нахождения асимптотики решений вблизи вершины клина ($x \gg r$) можно использовать модифицированную для функций Ганкеля формулу интегрального представления для произведения функций Макдональда [5]

$$H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(2)}(y) = -\frac{2e^{\nu \pi i}}{\pi \sin \pi \nu} \int_{|\ln y/x|}^\infty J_0(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{ch} t}) \operatorname{sh} \nu t dt$$

$$x > 0, \quad y > 0, \quad |\operatorname{Re} \nu| < 1/4$$

После вычислений получим

$$\Phi_a(r, \theta) = \eta_1(\alpha) r^\xi \cos \xi \theta \int_{\delta}^{\infty} \frac{h(x)}{x} K_\xi(ik_1 x) dx + o(1) = Ar^\xi \cos \xi \theta + o(1) \quad (2.1)$$

$$\Psi_a(r, \theta) = -\eta_2(\alpha) r^\xi \sin \xi \theta \int_{\delta}^{\infty} h'(x) K_\xi(ik_2 x) dx + o(1) = Br^\xi \sin \xi \theta + o(1)$$

$$\eta_n(\alpha) = \frac{2\pi(ik_n)^\xi}{\alpha \omega^2 2^\xi \Gamma(\xi + 1)}; \quad \xi = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Для простоты будем считать, что нагрузка $h(r)$ действует на некотором расстоянии от вершины клина, что обеспечит сходимость интегралов в (2.1).

Таким образом, если разыскивать потенциалы Φ и Ψ независимо друг от друга, то при $\alpha > \pi/2$ не будет выполняться условие на ребре, и, следовательно, перемещения становятся неограниченно большими вблизи вершины угла.

Заметим, что в случае кососимметричного нагружения каждый из потенциалов удовлетворяет условию на ребре, и, следовательно, задача может быть сведена к двум акустическим.

3. Для построения энергетического решения при $\alpha > \pi/2$ заменим требование $\Phi, \Psi \in W_{2loc}^1(\bar{\Omega})$ условием $\Phi, \Psi \in L_{2loc}(\bar{\Omega})$ и рассмотрим поведение искомых функций вблизи вершины клина. Решение задачи для потенциала $\Phi(r, \theta) \in L_{2loc}(\bar{\Omega})$ на малых расстояниях r имеет вид

$$\Phi(r, \theta) = Ar^\xi \cos(\xi \theta) + b\zeta(r, \theta) + o(1) \quad (3.1)$$

где $\zeta(r, \theta)$ – функция, удовлетворяющая в области Ω уравнению Гельмгольца, однородному условию Дирихле на $\partial\Omega \setminus \mathcal{O}$ и допускающая представление

$$\zeta(r, \theta) = r^{-\xi} \chi(r) \cos \xi \theta + Z \quad (3.2)$$

Здесь $\chi(r)$ – гладкая функция типа "срезки", $\chi(0) = 1$, а $Z(r, \theta) \in W_{2loc}^1(\bar{\Omega})$ "снимает невязку":

$$\Gamma Z = g_1(r; \xi) \cos \xi \theta, \quad Z|_{\theta=\pm\alpha} = 0$$

$$g_h(r; \xi) = -r^{-\xi} [\chi''(r) + \frac{1}{r} \chi'(r)(1 - 2\xi) + k_j^2 r^2 \chi(r)]$$

Γ – оператор Гельмгольца.

Функция Z представима в виде [6]

$$Z(r, \theta) = cr^\xi \chi(r) \cos \xi \theta + R, \quad R \in W_{2loc}^2(\bar{\Omega}) \quad (3.3)$$

Для нахождения постоянной c воспользуемся приемом, аналогичным изложенному ранее [7].

Используя формулу Грина для оператора Гельмгольца для функций $\zeta(r, \theta)$ и $Z(r, \theta)$ в области $\Omega_\delta = \Omega \setminus B_\delta$, где B_δ – шар радиуса δ с центром $r = 0$, имеем

$$I_\delta = \int_{\Omega_\delta} g_1(r; \xi) \zeta(r, \theta) \cos \xi \theta d\Omega_\delta = \int_{\Omega_\delta} (\zeta \Gamma Z - Z \Gamma \zeta) d\Omega_\delta = \int_{\partial\Omega_\delta} \left(\frac{\partial Z}{\partial n} \zeta - Z \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right) d\partial\Omega_\delta$$

Подставляя в последний интеграл соотношение (3.3), получим

$$I_\delta = c \int_{-\alpha}^{\alpha} 2\xi \delta^{-1} \cos^2 \xi \theta d\theta \delta + \delta^\xi \times O(1) = \pi c + o(1), \quad \delta \rightarrow 0$$

И окончательно

$$c = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} g_1(r; \xi) \zeta(r, \theta) \cos \xi \theta d\Omega \quad (3.4)$$

Таким образом, множество решений задачи для потенциала Φ в пространстве $L_{2\text{loc}}(\bar{\Omega})$ имеет следующую асимптотику вблизи вершины:

$$\Phi(r, \theta) = Ar^{\xi} \cos \xi \theta + b(r^{-\xi} \cos \xi \theta + cr^{\xi} \cos \xi \theta) + o(1)$$

Аналогичное выражение получается для асимптотики всевозможных решений класса $L_{2\text{loc}}(\bar{\Omega})$ для потенциала Ψ

$$\Psi(r, \theta) = Br^{\xi} \sin \xi \theta + d(r^{-\xi} \sin \xi \theta + er^{\xi} \sin \xi \theta) + o(1)$$

$$e = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} g_2(r; \xi) \tilde{\zeta}(r, \theta) \sin \xi \theta d\Omega$$

где $\tilde{\zeta}(r, \theta)$ – функция, удовлетворяющая в области Ω уравнению Гельмгольца, однородному условию Неймана на $\partial\Omega \setminus O$ и допускающая представление

$$\tilde{\zeta}(r, \theta) = r^{-\xi} \chi(r) \sin \xi \theta + \tilde{Z}, \quad \tilde{Z}(r, \theta) \in W_{2\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$$

4. Для нахождения решения задачи теории упругости (определения постоянных b и d) используем условие на ребре (1.3).

Вблизи вершины составляющие вектора смещений представимы в виде

$$u_r = \xi[(A + cb + B + ed)r^{\xi-1} + (b - d)r^{-\xi-1}] \cos \xi \theta + o(1)$$

$$u_{\theta} = \xi[(-A - cb - B - ed)r^{\xi-1} + (d - b)r^{-\xi-1}] \sin \xi \theta + o(1)$$

Приравнявая коэффициенты при различных степенях r , найдем постоянные b и d .

5. Рассмотрим задачу в многоугольной области Q , содержащей m входящих углов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, при этом предполагается, что вне сферы большого радиуса область совпадает с углом. Как и ранее, будем полагать, что контур нагружен нормальными поверхностными силами, осциллирующими по закону $\exp(i\omega t)$, касательные перемещения на границе равны нулю:

$$\sigma_{\theta\theta}|_{\partial Q} = h(r), \quad u_r|_{\partial Q} = 0$$

На бесконечности выполняются условия излучения. Используя полученные ранее результаты [6], можно показать, что вблизи i -го входящего угла главные члены асимптотик акустических решений имеют вид

$$\Phi_a = A_i r_i^{\xi_i} \cos \xi_i \theta_i + o(1), \quad \Psi_a = B_i r_i^{\xi_i} \sin \xi_i \theta_i + o(1); \quad \xi_i = \frac{\pi}{2\alpha_i} \quad (5.1)$$

r_i, θ_i – полярные координаты с центром в вершине i -го входящего угла (здесь и далее по повторяющимся индексам не суммировать). Для нахождения постоянных A_i воспользуемся формулой Грина для функций ζ_i и Φ_a в области $Q_{\delta} = Q \setminus \bigcup_{k=1}^m B_{\delta_k}$. Имеем

$$\begin{aligned} \zeta_i(r) &= r_i^{-\xi_i} \chi(r_i) \cos \xi_i \theta_i + Z_i = \\ &= r_i^{-\xi_i} \chi(r_i) \cos \xi_i \theta_i + \sum_{j=1}^m c_{ij} r_j^{\xi_j} \chi(r_j) \cos \xi_j \theta_j + R_i, \quad R_i \in W_{2\text{loc}}^2(\bar{Q}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

С учетом (5.2) и граничных условий для Φ_a и ζ , получим

$$0 = \int_{\partial Q_\delta} \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial n} \zeta_i - \Phi_a \frac{\partial \zeta_i}{\partial n} \right) d\partial Q_\delta =$$

$$= A_i 2\xi_i \int_{-\alpha_i}^{\alpha_i} \cos^2 \xi_i \theta_i d\theta_i - \frac{1}{\omega^2 \rho} \int_{\partial Q_\delta} \frac{\partial \zeta_i}{\partial n} h(x) dx + o(1), \quad \delta \rightarrow 0$$

И окончательно, переходя к пределу, имеем

$$A_i = \frac{1}{\pi \omega^2 \rho} \int_Q \frac{\partial \zeta_i}{\partial n} h(x) dx$$

Как и ранее, для построения энергетического решения задачи теории упругости заменим требование $\Phi, \Psi \in W_{2\text{loc}}^1(\bar{Q})$ условием $\Phi, \Psi \in L_{2\text{loc}}(\bar{Q})$. Тогда решение задачи для потенциала Φ имеет вид [7]

$$\Phi = \Phi_a + \sum_{i=1}^m b_i \zeta_i(x) \quad (5.3)$$

Аналогично проделанному выше, для определения постоянных c_{ij} будем использовать формулы Грина для функций ζ_i и Z_j в области Q_δ . Получим

$$I_\delta = \int_{Q_\delta} \zeta_i \Gamma Z_j - Z_j \Gamma \zeta_i dQ_\delta = \int_{\partial Q_\delta} \left(\frac{\partial Z_j}{\partial n} \zeta_i - Z_j \frac{\partial \zeta_i}{\partial n} \right) d\partial Q_\delta$$

Напомним, что Z_j удовлетворяет уравнению

$$\Gamma Z_j = -g_1(r_j; \xi_j) \cos \xi_j \theta_j$$

В силу граничных условий в выражениях для I_δ останутся лишь интегралы по дугам окружностей малых радиусов δ вблизи входящих углов. Учитывая (5.2), получаем, что основной вклад в I_δ вносит интеграл вблизи i -го входящего угла, следовательно

$$I_\delta = \int_{Q_\delta} \Gamma Z_j \zeta_i(r) dQ_\delta =$$

$$= c_{ji} \left[\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} \delta \xi_j \delta^{-\xi_j} \delta^{\xi_j-1} \cos^2 \xi_j d\theta_j + \delta^{\xi_i+2} \times O(1) \right] = \pi c_{ji} + o(1)$$

где α_i – наибольший входящий угол, отличный от α_j .

Таким образом,

$$c_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_Q \zeta_j(r) \Gamma Z_i dQ$$

Матрица $\{c_{ij}\}$ – симметрическая.

Для доказательства воспользуемся формулой Грина для оператора Гельмгольца для функций ζ_i и ζ_j при фиксированных $i \neq j$. С учетом (5.2) и граничных условий получаем, что основной вклад в интеграл по контуру вносят интегралы по дугам малого радиуса δ вблизи i -го и j -го входящих углов. Имеем

$$0 = \int_{\partial Q_\delta} \left(\frac{\partial \zeta_j}{\partial n} \zeta_i - \zeta_j \frac{\partial \zeta_i}{\partial n} \right) d\partial Q_\delta = \pi(c_{ji} - c_{ij}) + o(1), \quad \delta \rightarrow 0$$

Переходя к пределу, получим требуемое равенство.

Аналогично, можно получить множество решений класса $L_{2\text{loc}}(\bar{Q})$ для потенциала Ψ :

$$\Psi = \Psi_a + \sum_{i=1}^m d_i \tilde{\zeta}_i(x) \quad (5.4)$$

Здесь $\tilde{\zeta}_i$ – функции, удовлетворяющие в области Q уравнению Гельмгольца, однородному условию Неймана на $\partial Q \setminus O_i$ и допускающие представление

$$\tilde{\zeta}_i(r) = r_i^{-\xi_i} \chi(r_i) \sin \xi_i \theta_i + \sum_{j=1}^m e_{ij} r_j^{\xi_j} \chi(r_j) \sin \xi_j \theta_j + \tilde{R}_i, \quad e_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_Q \tilde{\zeta}_j(r) \Gamma \tilde{Z}_i dQ$$

($\{e_{ij}\}$ – симметрическая матрица).

Коэффициенты B_i асимптотического представления (5.1) вычисляются по формулам

$$B_i = -\frac{1}{\pi \omega^2 \rho} \int_{\partial Q} \tilde{\zeta}_i h'(r) r dr$$

6. Для нахождения решения, обладающего конечной энергией, имеем m соотношений вблизи входящих углов

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_i} = Q(r_i^p), \quad p > 0, \quad \text{при } r_i \rightarrow 0$$

Подставляя выражения (5.3), (5.4) в условия вблизи входящих углов, получим $2m$ соотношений для определения постоянных b_i, d_i

$$b_i = d_i, \quad A_i + B_i + \sum_{j=1}^m (c_{ji} b_j + e_{ji} d_j) = 0, \quad i = 1 \dots m$$

или

$$b = -(C + E)^{-1}(A + B)$$

где b, A и B – m -мерные векторы, C, E – симметрические $(m \times m)$ -матрицы.

Отметим, что в случае отсутствия входящих углов на контуре каждый из потенциалов удовлетворяет условиям на ребре, и следовательно, задача может быть полностью сведена к двум акустическим.

Авторы благодарят С.А. Назарова за стимулирующие беседы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00644а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б.В. Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду // ПММ. 1966. Т. 30. вып. 1. С. 198–203.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. М.: Физматгиз, 1958. 812 с.
3. Zmell S.H. Diffraction of elastic waves by a rigid-smooth wedge // SIAM. J. Appl. Math. 1975. V. 29. № 4. P. 582–596.
4. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 10–11. С. 1192–1206.
5. Dixon A., Ferrar W. Integrals for the product of two Bessel functions // Quart. J. Math. Pt I; II. 1933. V. 4. P. 193–208; P. 297–304.
6. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Мос. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
7. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd 76. S. 29–60.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
20.III.1996