

УДК 539.3:534.1

© 1997 г.

Г.Г. Денисов, В.В. Новиков

О ДЕФОРМИРОВАНИИ МЕМБРАНЫ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКОЙ

Изучаются установившиеся малые деформации (смещения) элементов однородной мембраны, обусловленные силовой нагрузкой, равномерно перемещающейся вдоль одной из осей со скоростью, превышающей скорость распространения упругих волн в мембране. Рассматриваются случаи как протяженной (по другой оси), так и сосредоточенных нагрузок. Изучаются деформации в предположении неограниченной мембраны, полуплоскости и неограниченной полосы. Применяется прием, позволяющий ввести новую независимую переменную и получить задачу, эквивалентную действию подвижной нагрузки или системы подвижных нагрузок на неограниченную или полуограниченную струну. Рассматриваются также задачи, обладающие свойством центральной симметрии. А именно, предполагается, что к неограниченной мембране жестко прикреплен недеформируемый диск, а по окружности, концентрической указанному диску, перемещается с постоянной тангенциальной скоростью силовая сосредоточенная нагрузка. Исследование задачи в полярных координатах позволяет привести ее к обобщенному виду задачи о деформировании струны. Применением соответствующих выводов, полученных ранее [1] для струны, устанавливается качественный результат: существуют такие значения скоростей движения нагрузки, при которых в установившемся режиме не совершается работа по преодолению сил волнового сопротивления, что эквивалентно их отсутствию.

Малые смещения мембраны $u(x, y, t)$, перпендикулярные ее плоскости (x, y) , удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad a^2 = \frac{T}{\rho} \quad (1)$$

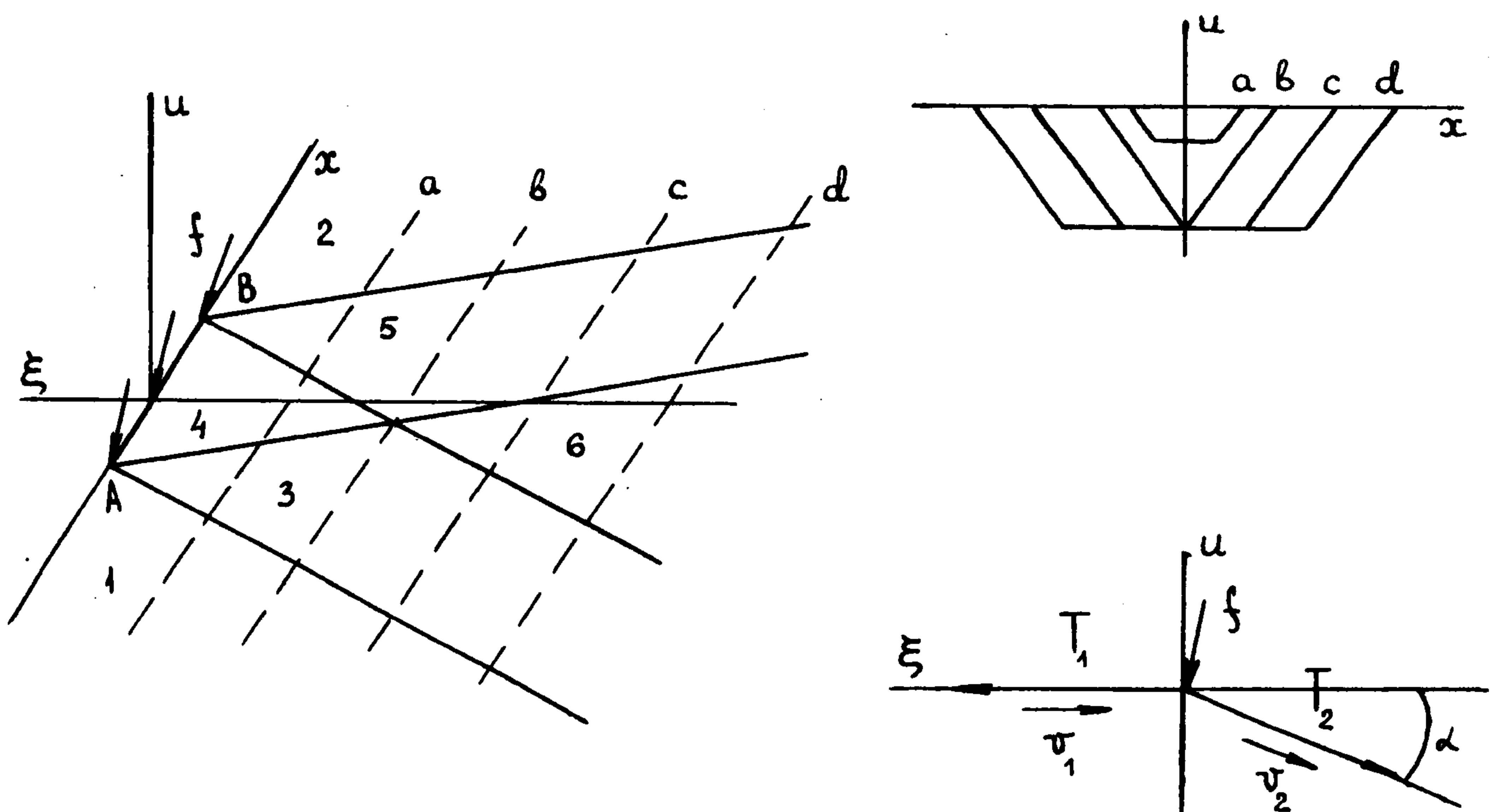
T – натяжение мембраны, ρ – ее поверхностная плотность.

Пусть вдоль оси y с постоянной скоростью v , превышающей скорость a распространения волн в мембране, движется нагрузка, распределенная с постоянной плотностью f по x на отрезке $|x| \leq \delta$. Под нагрузкой

$$T \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=vt-0}^{y=vt+0} = \begin{cases} -f, & |x| \leq \delta \\ 0, & |x| \geq \delta \end{cases} \quad (2)$$

где знак минус отвечает нажатию сверху на мембрану.

Будем интересоваться установившимся режимом деформирования мембраны. Поэтому задачу (1), (2) удобно рассматривать в новых переменных $x, \xi = y - vt$, т. е. в



Фиг. 1

подвижной системе координат, где картина деформирования мембраны не зависит от времени. Задача (1), (2) после этих преобразований принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad b^2 = \frac{a^2}{v^2 - a^2} \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}^{\xi=+0} = \psi(x, 0) = \begin{cases} -\varphi_0 = -f/T, & |x| \leq \delta \\ 0, & |x| > \delta \end{cases}$$

В такой постановке задача о деформировании мембраны совпадает с известной задачей о колебаниях безграничной струны (например, [2]), не деформированной в начальный момент времени, точкам которой $|x| \leq \delta$ сообщена одинаковая начальная скорость. Формальной заменой переменной at в задаче о струне на ξ приходим к задаче (3). Поэтому воспользуемся известным решением.

В системе, связанной с подвижной нагрузкой, прогиб мембраны определяется выражением

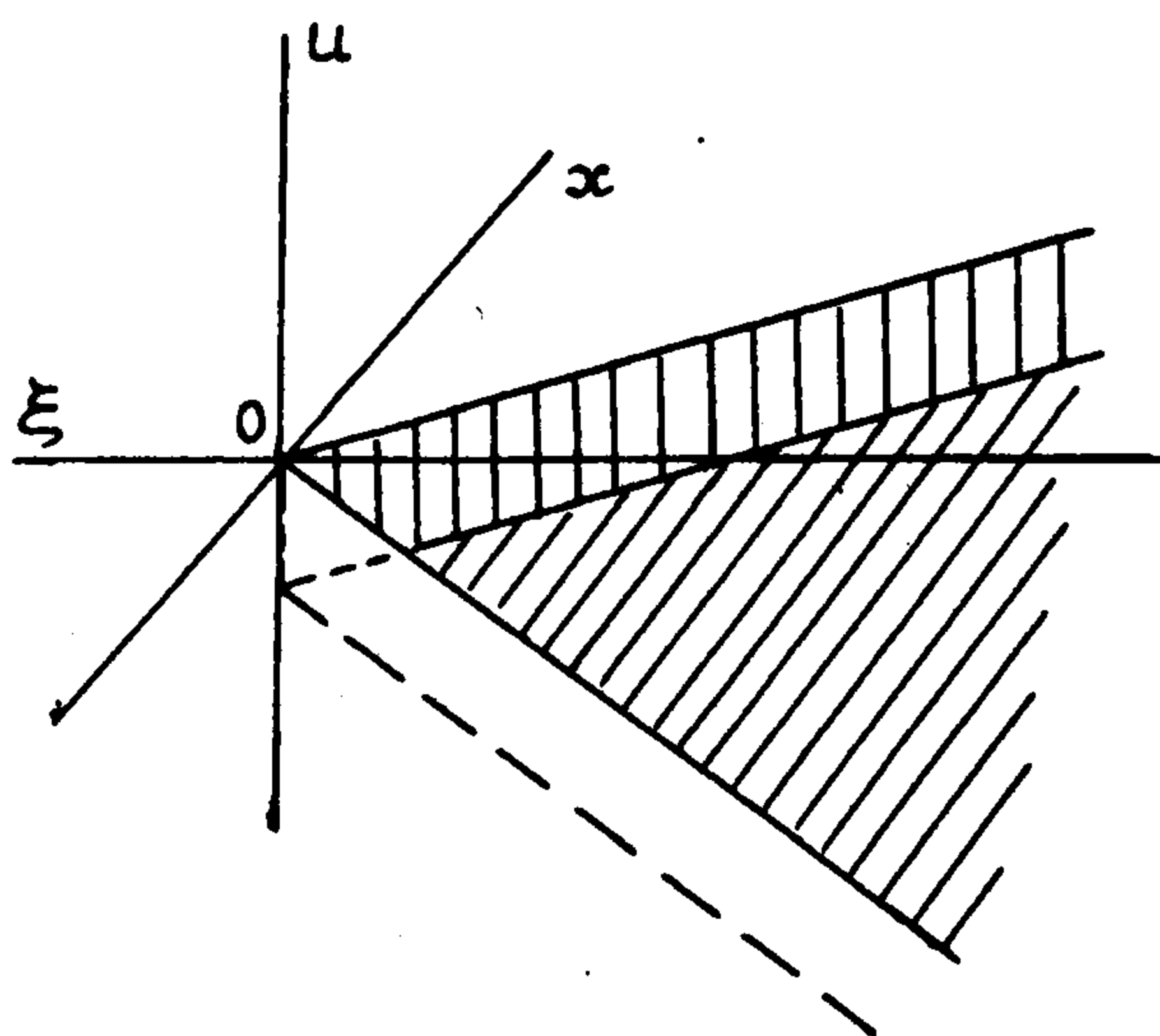
$$u(x, \xi) = \frac{1}{2b} \int_{x-b\xi}^{x+b\xi} \psi(\alpha) d\alpha$$

Отсюда следует, что $u(x, \xi)$ дается в виде двух "волн":

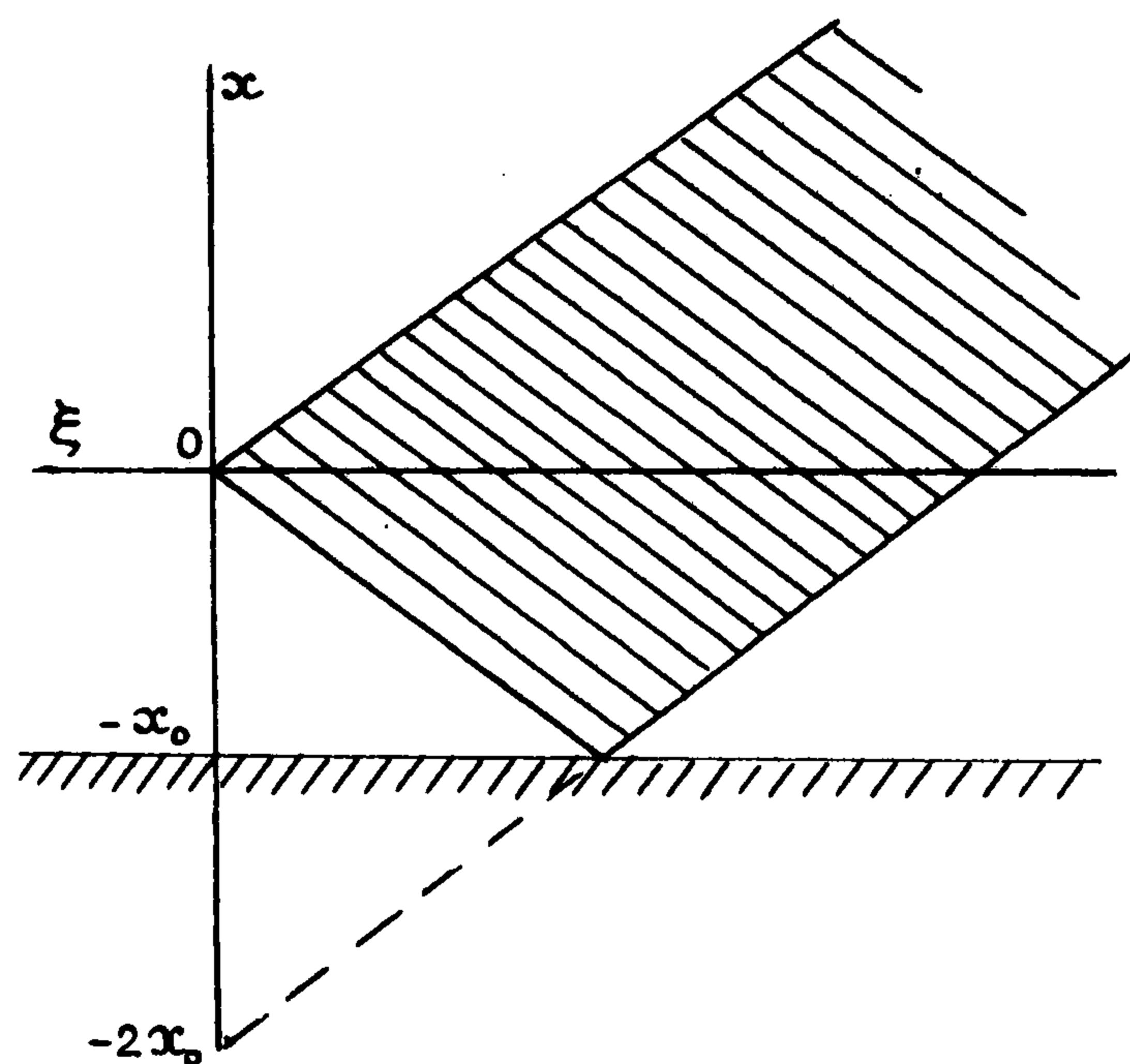
$$u(x, \xi) = \Phi(x + b\xi) - \Phi(x - b\xi)$$

$$\Phi(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta < -\delta \\ -\varphi_0(\beta + \delta)/(2b), & |\beta| \leq \delta \\ -\varphi_0\delta/b, & \beta > \delta \end{cases}$$

На плоскости (x, ξ) через концы отрезка AB (фиг. 1) проведем характеристики, которые в данной задаче имеют вид $x + b\xi = C_1$, $x - b\xi = C_2$, где C_1 и C_2 — постоянные. Показанные на фиг. 1 характеристики разбивают плоскость (x, ξ) на области 1, 2, где деформации отсутствуют, и на области 3–6, где отклонения имеют место. В области 6 они для всех точек одинаковы, а в областях 3–5 линейны по x . На фиг. 1 показаны также профили мембраны при различных $\xi = \text{const}$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Относительно неподвижной (связанной с мембраной) системы координат с течением времени будем наблюдать, что при движении нагрузки все большие области мембраны деформируются и нагрузка совершает работу. Это находит объяснение и в том, что распределенная по отрезку AB сила наклонена в сторону, противоположную движению, т. е. имеет горизонтальную составляющую f_1 , следовательно, существует равная ей по величине сила сопротивления движению нагрузки.

Для вычисления f_1 обратимся к фиг. 1. На единицу длины отрезка AB действуют силы

$$T_1 = T e_\xi, \quad T_2 = -T(\cos \alpha e_\xi + \sin \alpha e_u), \quad \mathbf{f} = f_1 e_\xi - f_2 e_u$$

где e_ξ, e_u — единичные векторы. За время dt эти силы вызовут изменение импульса элемента мембраны протяженностью $d\xi = v dt$:

$$(T_1 + T_2 + \mathbf{f})dt = \rho(v_2 - v_1)d\xi$$

$$v_1 = -v e_\xi, \quad v_2 = -v(\cos \alpha e_\xi + \sin \alpha e_u)$$

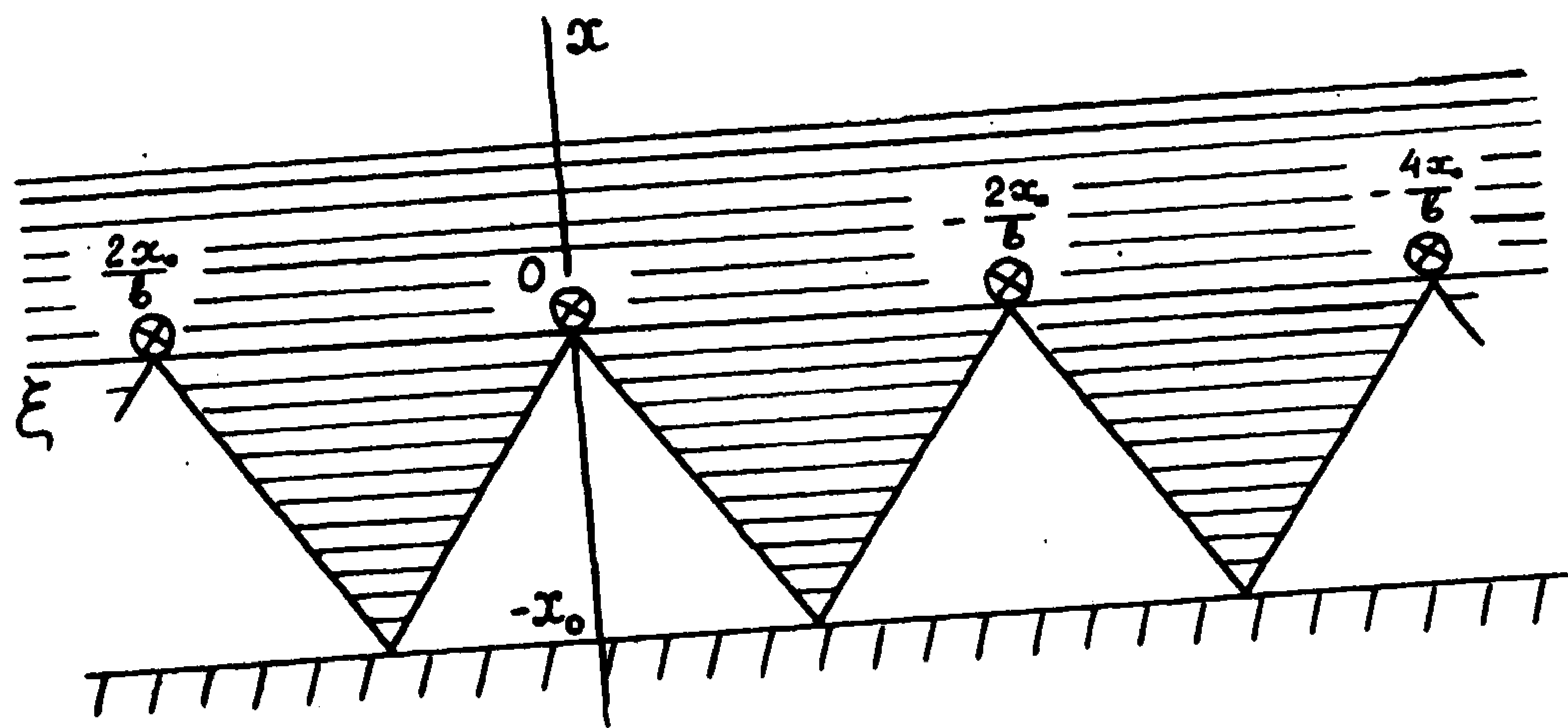
Отсюда находим, что $f_1 = T(1 - \cos \alpha)/b^2, f_2 = T \sin \alpha/b^2$. При $\alpha \ll 1$ имеем $f_1 = T\alpha^2/2b^2 = f^2 b^2/(2T)$.

Силу сопротивления можно также вычислить по потоку энергии через линию $x = \text{const}$ и заданную скорость. При уменьшении длины отрезка AB , когда нагрузка приближается к точечной, положение силы $\mathbf{f}$, а следовательно, составляющую f_1 , определить указанным способом не представляется возможным. Тогда f_1 следует вычислять по потоку энергии.

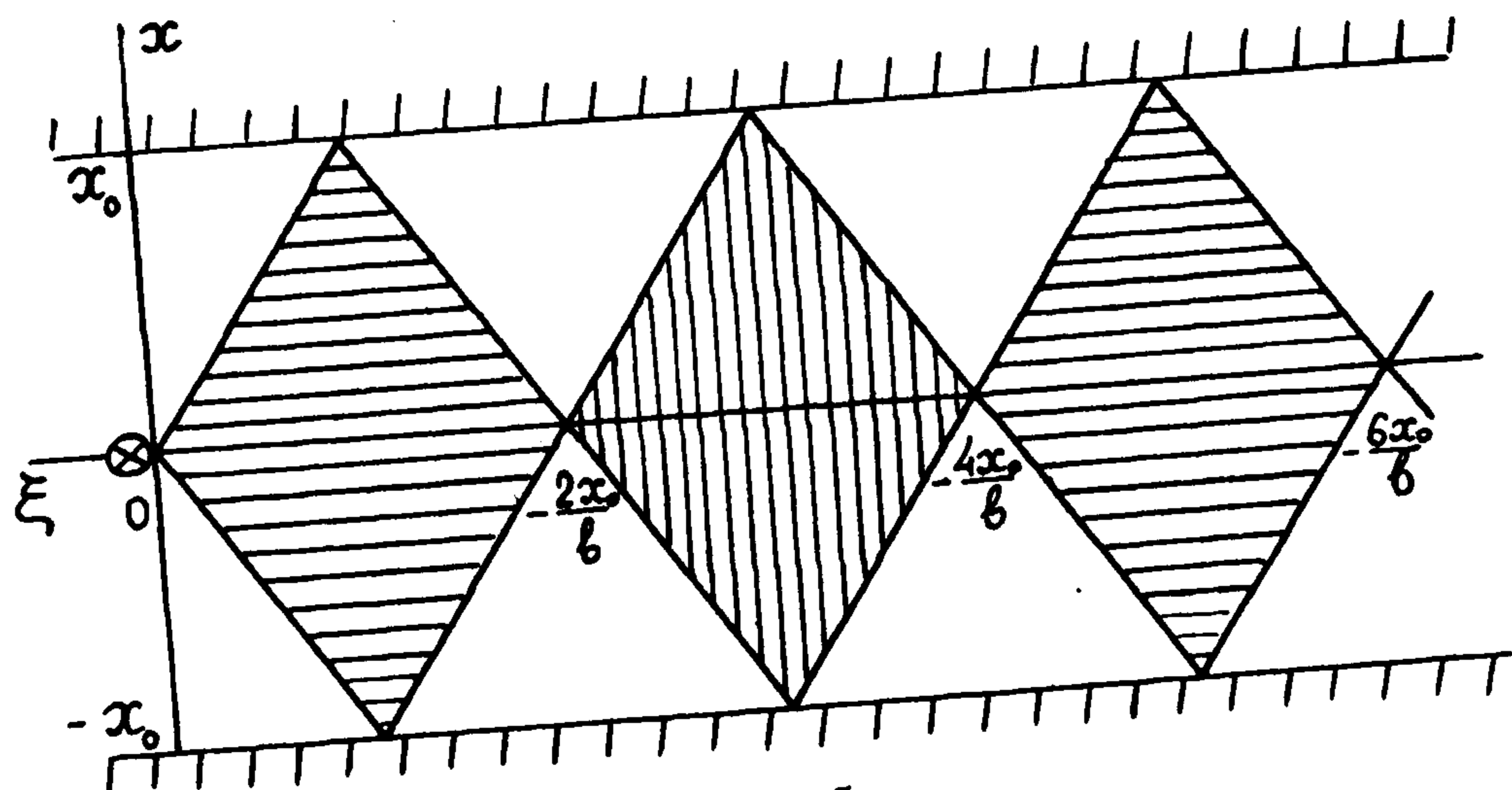
В частном случае сосредоточенной нагрузки, к которому будем обращаться в дальнейшем, $\Phi(\beta)$ имеет вид единичной функции, картина деформирования мембраны упрощается (фиг. 2). В заштрихованной области мембрана смещена и отклонения во всех точках одинаковы, вне — ее прогиб отсутствует.

Отметим, что в случае, когда мембрана находится на упругом основании, ее деформирование будет не столь простым, но граница возмущенной области мембраны (вид характеристик) не изменится.

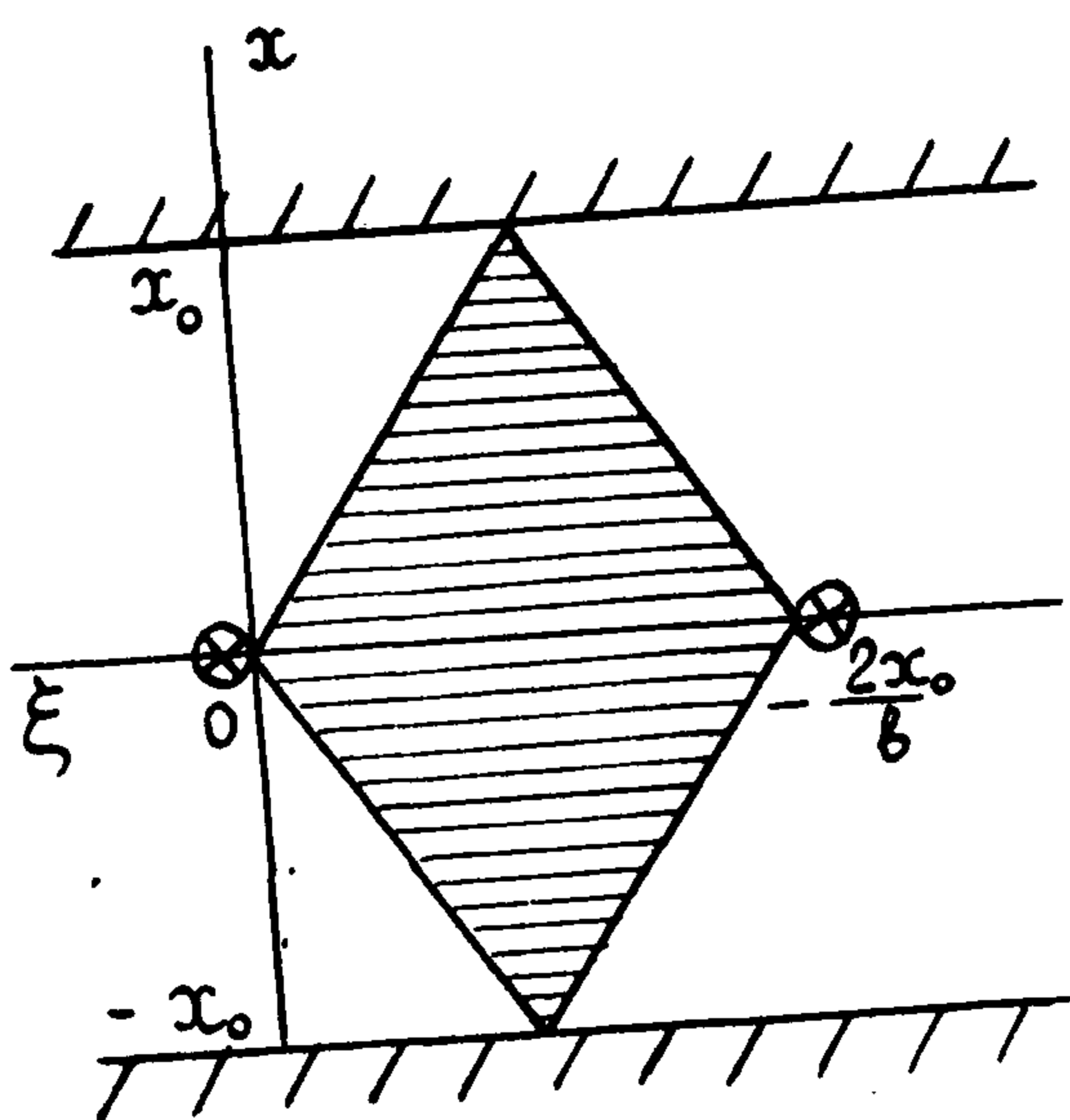
Результаты изучения распространения волн на полуограниченной струне [1] также можно применить к задаче о деформировании мембраны. Пусть мембрана ограничена прямой $x = -x_0 (x_0 > 0)$, помеченной штриховкой. В этом случае задачу (3) необходимо дополнить условием отсутствия смещений мембраны на границе: $u(-x_0, y, t) = 0$.



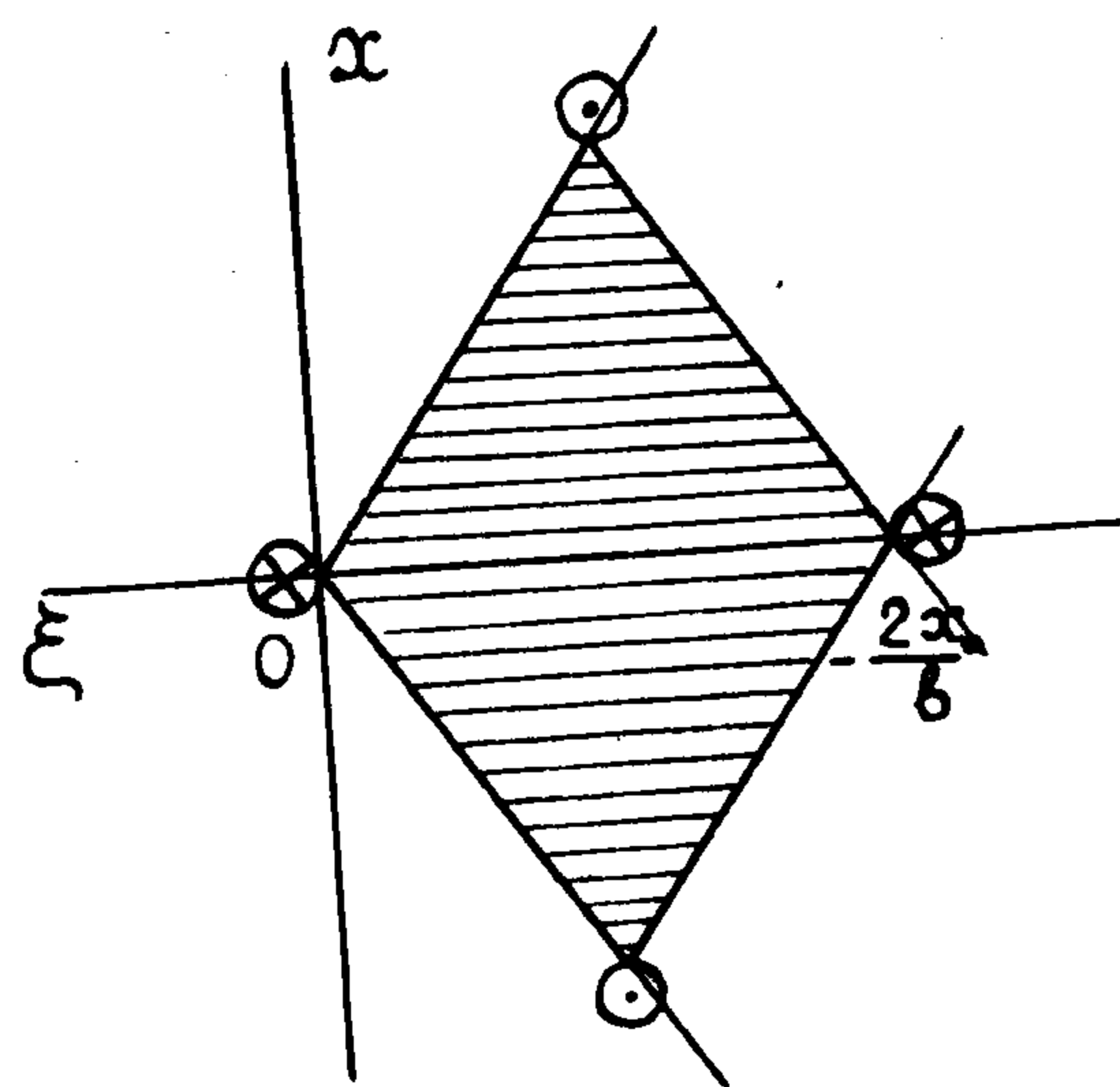
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Математический прием, позволяющий решить задачу, состоит в том, что от ограниченной мембраны переходят к безграничной, продолжая условие под нагрузкой симметрично относительно прямой $x = -x_0$ на всю прямую $\xi = 0$ нечетно.

В случае сосредоточенной нагрузки деформации органиченной мембраны б такими же, как деформации безграничной мембраны в области $x \geq -x_0$ под действием заданной нагрузки в точке $x = 0, \xi = 0$ и нагрузки противоположного знака отраженной относительно $x = -x_0$ точке $x = -2x_0, \xi = 0$. Картина деформированной мембраны показана на фиг. 3. В заштрихованной области мембрана испытывает отрицательный постоянный по величине прогиб и не возмущена в других областях.

При движении вдоль границы мембраны $x = -x_0$ системы нагрузок картина деформирования получается сложением деформаций от каждой из нагрузок, имеющих вид, показанный на фиг. 3. В случае, когда имеется бесконечная система одинаковых нагрузок, расположенных с периодом $2x_0/b$ (фиг. 4, крестиками в кружках помечены нагрузки), при $x > 0$ во всех точках мембраны деформации одинаковы. Относительно неподвижной системы (x, y) картина деформирования мембраны при $x > 0$ также будет неизменной. Поэтому поток энергии через любую линию $x = \text{const} > 0$ отсутствует, т. е. движущаяся система нагрузок не совершает работы. Иначе, в этом случае, перемещаясь параллельно "стенке" $x = -x_0$, система нагрузок не испытывает сопротивления.

Наконец, рассмотрим мембрану в виде полосы $\{x\} \leq x_0$, по которой на одинаковом расстоянии от границ движется точечная нагрузка. И эта задача сводится к задаче о деформировании безграничной мембраны под действием системы нагрузок, располагающихся вдоль прямой $\xi = 0$. В точке $x = 0$ приложена нагрузка, а остальные "нагрузки" появляются в результате нечетного отражения условий в точке $x = 0$ относительно границ мембраны и последующих двойных, тройных и т. д. нечетных отражений. Так приходим к картине распределения деформаций полосы, представленной на фиг. 5. Мембрана разбивается на ромбовидные области. Вне этих областей деформации отсутствуют, а внутри них u — постоянная величина, причем знаки отклонений чередуются.

Пусть теперь вдоль центральной линии мембраны движутся с постоянной скоростью две идентичные нагрузки, отстоящие одна от другой на $2x_0/b$. Каждая из нагрузок в отдельности вызывает деформации, показанные на фиг. 5. В силу линейности системы имеет место принцип суперпозиции и при совместном действии обеих нагрузок возмущения будут испытывать лишь ромбовидная область мембраны между нагрузками (фиг. 6). Вне этой области отклонения u отсутствуют. В соответствии с приведенными ранее физическими соображениями заключаем, что при таком расположении нагрузок они в сумме не совершают работы при движении вдоль полосы и перемещаются без сопротивления. Аналогичная ситуация имеет место при расположении двух нагрузок на расстояниях, равных нечетному числу длин диагоналей ромба: $(2n + 1)2x_0/b$, с тем отличием, что между нагрузками будут $2n + 1$ -ромбовидные области возмущенной мембраны.

Показанная на фиг. 6 деформация полосы достигается и на неограниченной мембране с помощью системы четырех одинаковых нагрузок различных направлений. Ромб образуют характеристики, отвечающие располагающимся в его вершинах нагрузкам (фиг. 7), где темными точками в кружках и крестиками в кружках помечены направления нагрузок.

Рассмотрим теперь мембрану, соединенную с недеформируемым диском радиуса r_0 , и безграничную в радиальном направлении. По мембране с постоянной скоростью v по окружности, концентричной диску, на расстоянии R_* от его центра движется сосредоточенная нагрузка.

Уравнение для прогиба мембраны u в полярных координатах r, φ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) \quad (4)$$

Поскольку интерес представляет установившийся режим деформирования мембраны, удобно рассмотрение проводить во вращающейся вокруг оси, проходящей через центр диска, системе координат, в которой нагрузка неподвижна (угловая скорость системы $\omega = v/R_*$), а прогиб $u = u(r, \theta = \varphi - \omega t)$.

Уравнение (4) преобразуется к виду

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + (1 - k^2 r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5)$$

Здесь, сохраняя обозначения для прогиба и переменной r , произведен переход к масштабу длины r_0 , т. е. $1 \leq r < \infty$, $k = \omega r_0 / a$.

В точке под нагрузкой $r = r_* = R_*/r_0$, $\theta = 0$

$$u_{\theta}|_{\theta=0} = \begin{cases} 0, & |x| > 0 \\ -\varphi_0, & x = 0 \end{cases} \quad (6)$$

На контуре диска решение должно удовлетворять условию $u(1, \theta) = 0$.

Считаем, что параметр $k \geq 1$, т. е. уравнение (5) для всех точек мембраны является гиперболическим. При решении задачи (5), (6) обратимся к методу характеристик (например, [3]). В отличие от ранее рассмотренных задач, где линии распространения возмущений (характеристики) были прямыми, здесь два семейства характеристик являются криволинейными и имеют вид

$$\eta_1 = -\theta + \zeta(kr) = \text{const}, \quad \eta_2 = \theta + \zeta(kr) = \text{const}$$

$$(\zeta(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \arccos(1/x))$$

В уравнении (5) перейдем к переменным η_1 и η_2 . Исходя из решения задачи (3), находим, что вне границы области возмущений это уравнение удовлетворяется функцией

$$u(r, \theta) = \Phi(\eta_1) - \Phi(\eta_2), \quad \Phi(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < 0 \\ -\varphi_0, & \zeta > 0 \end{cases}$$

В идеализированном случае точечной нагрузки деформация мембраны на границе области возмущений испытывает разрыв. Этот изъян устраняется учетом конечной протяженности отрезка приложения нагрузки, который обеспечивает плавный переход между областями мембраны с различным характером деформирования, как и в случае прямолинейного движения нагрузки.

Область возмущения мембраны ограничена двумя характеристиками, исходящими из точки $(r_*, 0)$ и имеющими вид раскручивающейся ($\eta_1 = \text{const}$) и скручивающейся ($\eta_2 = \text{const}$) кривых, вплоть до

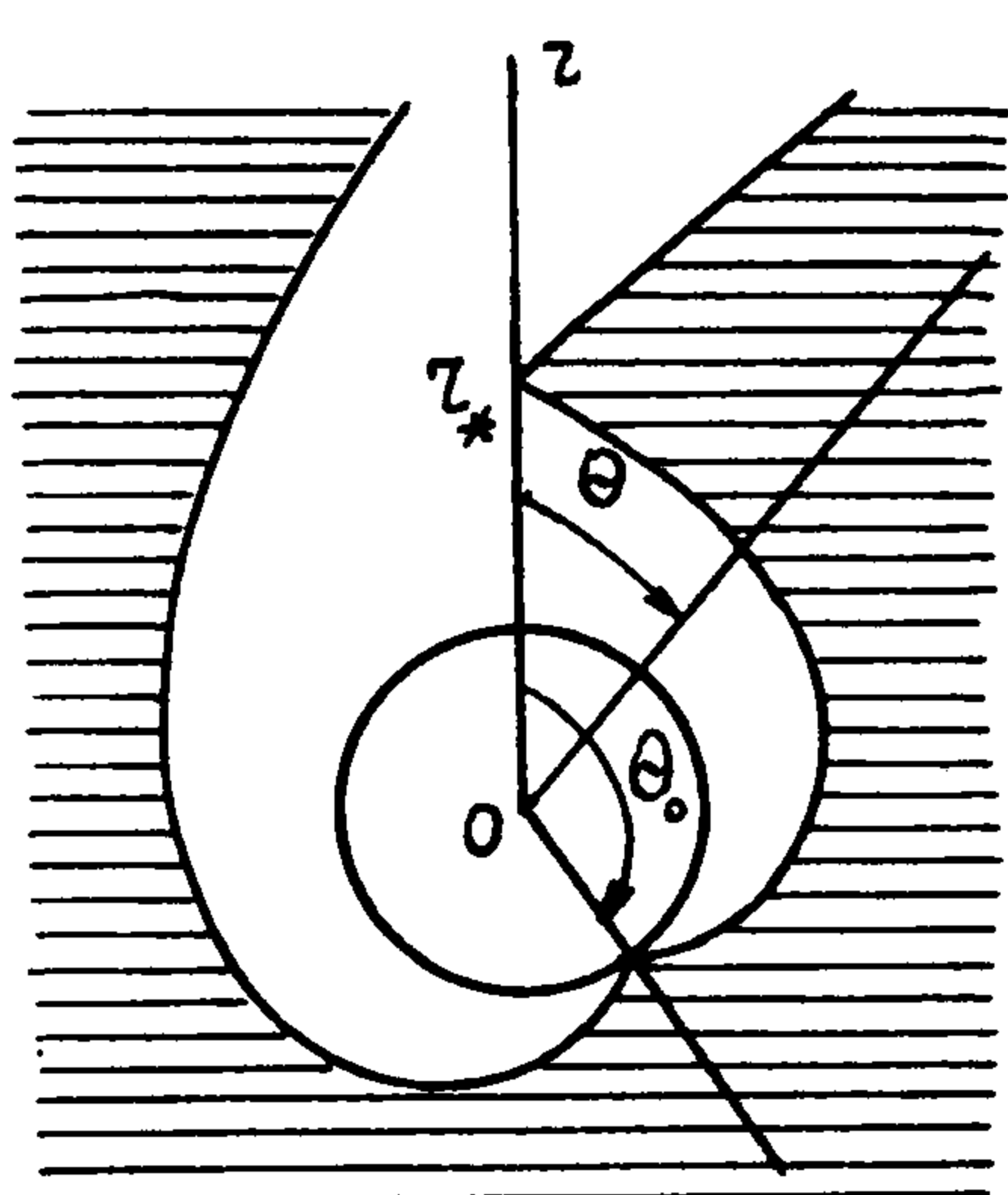
$$\theta = \theta_0 = \zeta(kr_*) - \zeta(k)$$

когда характеристика $\eta_2 = \text{const}$ достигает диска $r = 1$ (фиг. 8).

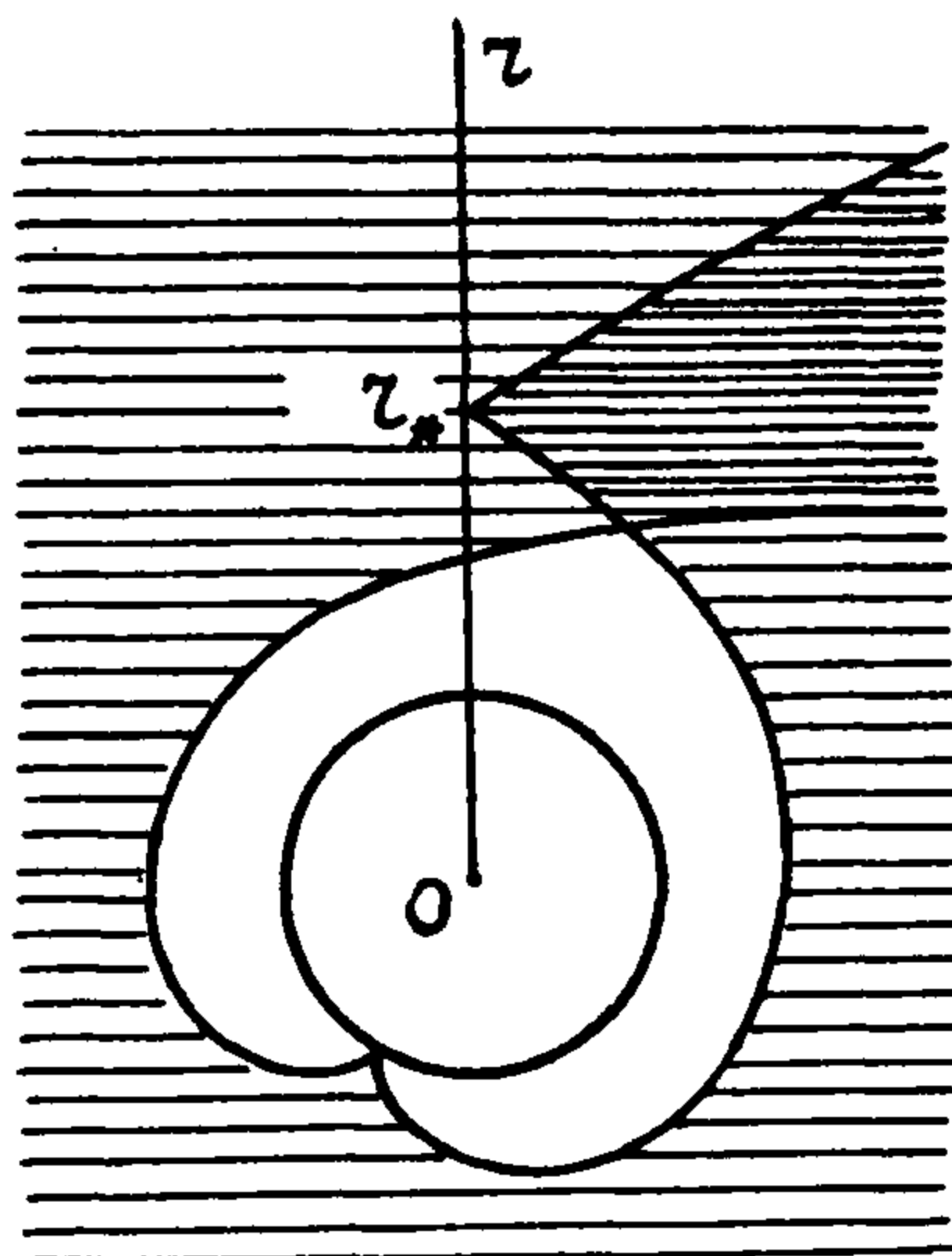
Для получения полной картины деформирования мембраны следует использовать явление отражения. При $\theta > \theta_0$ выражение для характеристики имеет вид

$$-\theta + \zeta(kr) = -2\theta_0 + \zeta(kr_*)$$

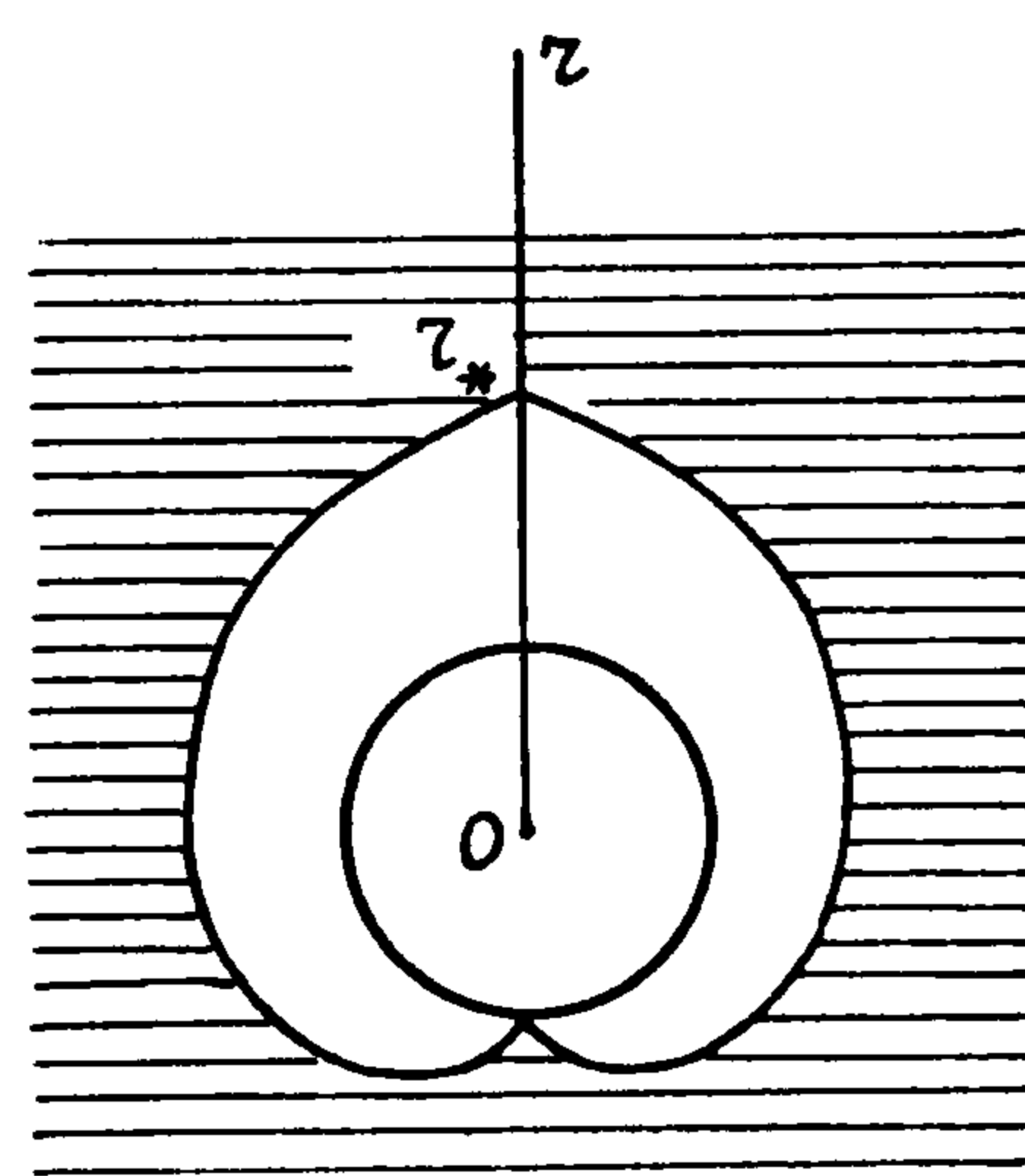
При $\theta_0 < \pi$ деформация мембраны показана на фиг. 8. Она во всех точках заштрихованной области отрицательна и имеет одинаковую величину. В случае $\pi < \theta_0 < 2\pi$ картина деформации представлена на фиг. 9. В области, прилегающей к диску, деформация отсутствует. В других областях она отрицательна; причем в секторе, включающем точку приложения нагрузки, деформация в два раза больше, чем вне его (более плотная штриховка на фиг. 9). Кроме рассмотренных возможны другие ситуации, когда характеристика $\eta_2 = \text{const}$, выходящая из точки $(r_*, 0)$, достигает диска после одного, двух и т. д. оборотов вокруг него ($\theta_0 > 2\pi$). Общим для всех случаев (в том числе, показанных на фиг. 8 и 9) является наличие при любом фиксированном r областей по θ с различным характером деформирования.



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Отдельного рассмотрения заслуживает случай отражения в точке $\theta_0 = \pi$, когда отраженная характеристика и характеристика $\eta_1 = \zeta(kr_*)$, выходящая из точки $(r_*, 0)$, совпадают. Это приводит к картине деформирования мембраны, показанной на фиг. 10. При $r > r_*$ для любых θ прогиб мембраны постоянен во всех точках. Физически это означает, что отсутствует поток энергии через любую кривую, охватывающую невозмущенную область, т. е. нагрузка не совершает работы.

Подобное положение имеет место также при $\theta_0 = 3\pi, \dots, (2n+1)\pi, \dots$, что отвечает одному, двум и т. д. виткам характеристики вокруг диска, прежде чем она достигает окружности $r = 1$. Из условия $\theta_0 = (2n+1)\pi$ для оценок величины ν_n находим, что

$$\nu_n \approx \pi(2n+1)/(r_* - 1)$$

Таким образом, при заданном положении нагрузки r_* имеется дискретный спектр скоростей, при которых движущаяся нагрузка не совершает работы, т. е. не испытывает сопротивления при движении. Другая интерпретация выражения для ν_n состоит в том, что при заданном ω имеется счетное множество окружностей $r_{*n} = 2\pi n a / \omega r_0$, двигаясь по которым нагрузка не совершает работы. Здесь напрашивается аналогия со стационарными орбитами электрона в квантовой теории строения атома, при движении по которым также отсутствует излучение энергии.

Полученный эффект является результатом взаимодействия между возмущением, создаваемым нагрузкой, и возмущением, отраженным от границы. Для этого при прямолинейном движении необходимы минимум две нагрузки, а в случае движения по окружности достаточно одной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00927).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. Крысов С.В., Филатов Л.В. О движении тел вдоль упругих направляющих с закритическими скоростями // Прикладные проблемы теории колебаний. Нижний Новгород: ННГУ, Изд-во Нижегород. ун-та. 1991. С. 40–51.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 383 с.