

УДК 539.3

© 1997 г. А.О. Ватульян, С.А. Коренский

МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАТНЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Даются строгая и линеаризованная постановки гранично-геометрической обратной задачи (ГОЗ) теории упругости для упругого полупространства с дефектом, моделируемым упругим включением или полостью. При формулировке линеаризованной ГОЗ предполагается, что граница искомого дефекта может быть задана в локальной системе координат, связанной с границей известного дефекта. Цель решения линеаризованной задачи – поиск скалярной функции – вариации формы, которая есть расстояние по нормали к известной границе до точек искомой границы. Рассматриваются плоская и антиплоская задачи теории упругости. С использованием аппарата граничных интегральных уравнений строгая ГОЗ сведена к нелинейной системе интегро-дифференциальных уравнений, а линеаризованная ГОЗ – к линейной системе интегральных уравнений. Отмечается, что линеаризованные граничные интегральные уравнения сохраняют порядок особенности, присущий обычным граничным интегральным уравнениям. Для решения строгой обратной задачи предлагается итерационная процедура последовательного уточнения формы дефекта; при этом на каждом итерационном шаге достаточно решать линеаризованную ГОЗ.

Проблемы восстановления формы дефекта в упругой среде на основе информации о волновых полях, наблюдаемых на границе среды, относятся к гранично-геометрическим [1] обратным задачам (ГОЗ) теории упругости. Эти задачи с помощью аппарата граничных интегральных уравнений (ГИУ) сводятся [2–7] к решению некорректных задач [1–8] для сложных нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений.

Наибольшие успехи при решении этих обратных проблем связаны с использованием алгоритмов решения прямых задач. Такие методы, как правило, представляют собой итерационную процедуру. На каждом итерационном шаге решается прямая задача с известной формой дефекта, после чего сравниваются волновые поля при неизвестном и известном дефектах. Сравнение осуществляется в доступной для наблюдателя области на границе среды, причем целью такого сравнения является поиск новой формы, обеспечивающей близость рассеянного дефектом волнового поля и измеренного на границе тела (в равномерной или среднеквадратичной метрике).

Необходимость введения известного дефекта, граница которого в результате итерационного процесса "стягивается" к искомой границе, ослабляет постановку ГОЗ, однако дает возможность решить ее известными математическими средствами.

I. Постановка прямой и обратной задач. Рассмотрим следующую краевую задачу для упругого полупространства $V (x_3 \leq 0)$, содержащего цилиндрическое включение $V^{(1)} \subset V$, причем образующая цилиндра параллельна оси x_2 . Будем полагать, что включение $V^{(1)}$ и внешняя среда $V^{(0)} = V \setminus V^{(1)}$ однородны и анизотропны и для каждой из этих сред известны тензоры упругих постоянных $c^{(m)}$ и плотности $\rho^{(m)}$, $m = 0, 1$. Верхний индекс $m = 1$ указывает на принадлежность величины к среде включения, а

верхний индекс $m = 0$ – к внешней среде. На участке границы полупространства $\Lambda = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 \in [a, b], x_2 \in (-\infty, +\infty), x_3 = 0\}$ действует осциллирующий источник $\mathbf{p}^*(x_1)e^{-i\omega t}$, $x_1 \in [a, b]$, возбуждающий колебания в полупространстве. Оставшуюся часть границы полупространства $\partial V \setminus \Lambda$ будем считать свободной от напряжения. Замыкают постановку задачи условия излучения [9, 10], при формулировке которых использован принцип предельного поглощения.

Считая режим колебаний установившимся, после отделения временного множителя $e^{-i\omega t}$ основную краевую задачу запишем в виде уравнений движения

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(m)} + \rho^{(m)} \omega^2 \mathbf{u}^{(m)} = 0, \quad x \in V^{(m)}, \quad m = 0, 1 \quad (1.1)$$

определяющих соотношений

$$\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \mathbf{c}^{(m)} \odot \nabla \mathbf{u}^{(m)}, \quad x \in V^{(m)}, \quad m = 0, 1 \quad (1.2)$$

граничных условий

$$\mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(0)}|_{x_3=0} = \begin{cases} \mathbf{p}^*, & x \in \Lambda \\ 0, & x \in \partial V \setminus \Lambda \end{cases} \quad (1.3)$$

и условий сопряжения на границе включения $S = \partial V^{(1)}$

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{p}^{(1)}, \quad \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(1)}, \quad x \in S \quad (1.4)$$

($\mathbf{p}^{(0)} = 0, x \in S$, в случае полости).

Здесь $\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$ и $\mathbf{u}^{(m)}$ – тензор напряжений и вектор перемещений в области $V^{(m)}$; $\mathbf{p}^{(m)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(m)}$ – вектор напряжений, $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности S , $\mathbf{e}_i$ – i -й вектор декартового базиса.

При постановке прямой задачи граница S известна, а подлежит определению поле перемещений на участке границы полупространства $\Phi = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 \in [c, d], x_2 \in (-\infty, +\infty), x_3 = 0\}$. При постановке ГОЗ, наоборот, будем считать границу S подлежащей определению на основе информации о поле перемещений на Φ . Таким образом, ГОЗ требует введения дополнительного граничного условия

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{f}, \quad x \in \Phi \quad (1.5)$$

где $\mathbf{f}$ – заданная вектор-функция, не зависящая от x_2 .

При описанных условиях прямая задача (1.1)–(1.4) и ГОЗ (1.1)–(1.5) для ортотропных материалов распадается на две несвязанные задачи: случай плоской деформации и антиплоскую задачу теории упругости. В уравнениях (1.1)–(1.5) в плоском случае $\mathbf{u} = (u_1, 0, u_3)$, $\mathbf{p} = (p_1, 0, p_3)$, $\mathbf{p}^* = (p_1^*, 0, p_3^*)$, $\mathbf{f} = (f_1, 0, f_3)$, а в антиплоском случае $\mathbf{u} = (0, u_2, 0)$, $\mathbf{p} = (0, p_2, 0)$, $\mathbf{p}^* = (0, p_2^*, 0)$, $\mathbf{f} = (0, f_2, 0)$. Для сечения границы S и областей $V^{(m)}$ плоскостью x_1x_3 введем обозначения, соответственно $l, \Omega^{(m)}$. Ограничимся случаем, когда l – простой гладкий контур.

2. Сведение прямых и обратных задач к системе ГИУ. Введем тензоры Грина $U_r^{(m)}(x, \xi)$ уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}_r^{(m)} + \rho^{(m)} \omega^2 U_r^{(m)} = -\mathbf{e}_r \delta(x, \xi), \quad \boldsymbol{\Sigma}_r^{(m)} = \mathbf{c}^{(m)} \nabla U_r^{(m)} \quad (2.1)$$

$x, \xi \in R^2$, при $m = 1$ и $x, \xi \in R^2_-$ при $m = 0$, причем при $m = 0$ еще и граничному условию

$$\mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_r^{(0)}|_{x_3=0} = 0 \quad (2.2)$$

а также условиям излучения. В (2.1) $\delta(x, \xi)$ – двумерная дельта-функция.

Замечание 1. В плоском случае для ортотропных материалов тензоры Грина уравнений (1.1), (1.2) с учетом граничного условия (2.2) были построены [5] в виде однократных интегралов Фурье. В антиплоском случае для изотропного полупространства соответствующие функции Грина выражаются аналитически [11] через функции Ганкеля.

С использованием функций Грина и теоремы взаимности [12] поле перемещений в любой точке областей $\Omega^{(0)}$ и $\Omega^{(1)}$ может быть выражено через граничные значения поля перемещений и вектора напряжений на l

$$u_r^{(0)}(\xi) = S_r^{(0)}[u^{(0)}, p^{(0)}, l, \xi] + u_r^*(\xi), \quad \xi \in \Omega^{(0)} \quad (2.3)$$

$$u_r^{(1)}(\xi) = -S_r^{(1)}[u^{(1)}, p^{(1)}, l, \xi], \quad \xi \in \Omega^{(1)} \quad (2.4)$$

Здесь введено обозначение для интегрального оператора Сомильяны

$$S_r^{(m)}[u, p, l, \xi] = \int_l (P_r^{(m)}(x, \xi) \cdot u(x) - U_r^{(m)}(x, \xi) \cdot p(x)) dl_x \quad (2.5)$$

$P_r^{(m)} = n \cdot \Sigma_r^{(m)}$, $n = (n_1, n_3)$ – вектор внешней нормали к l . В (2.3) u_r^* – поле перемещений в полупространстве при отсутствии дефекта

$$u_r^*(\xi) = \int_a^b U_r^{(0)}(\zeta, \xi) \cdot p^*(\zeta_1) d\zeta_1, \quad \zeta = (\zeta_1, 0)$$

Для получения ГИУ в интегральных представлениях (2.3), (2.4) необходимо осуществить предельный переход на границу l и удовлетворить граничным условиям (1.4).

Предельное значение интегрального оператора (2.5) можно представить в виде

$$\lim_{\xi \rightarrow y \in l} S_r^{(m)}[u, p, l, \xi] = S_r^{(m)}[u, p, l, y] + M[P_r^{(m)} \cdot u - U_r^{(m)} \cdot p, y], \quad \xi \in \Omega^{(m)} \quad (2.6)$$

Первое слагаемое в правой части (2.6) есть интеграл в смысле главного значения по Коши [13], а второе слагаемое – скачок особого интеграла. Для скачка выбрано обозначение, подчеркивающее его зависимость от подынтегрального выражения. Для расчета скачков достаточно воспользоваться следующими свойствами тензоров Грина.

Свойство 1. Тензор Грина $U_r^{(0)}$ представим двумя слагаемыми, где первое представляет собой тензор Грина для неограниченной среды, а второе представляет собой гладкую строго внутри $x_3 < 0$ добавку, которая не оказывает влияния на предельные свойства оператора Сомильяны.

Свойство 2. Предельные свойства оператора Сомильяны не зависят от величины $\rho\omega^2$, а следовательно, его скачки совпадают с известными в статике результатами [13].

Обобщением известных теорем теории потенциала [13] служит следующая теорема.

Теорема 1. Пусть l – замкнутый ляпуновский контур, а $u \in C^{(\gamma)}(l)$, $p \in C(l)$, где $C^{(\gamma)}(l)$ – пространство комплекснозначных на l функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем γ . Тогда существуют предельные значения оператора Сомильяны при $\xi \rightarrow y \in l$ ($\xi \in \Omega^{(m)}$, $m = 0, 1$), представимые в виде (2.6) и имеют место следующие формулы для скачков:

$$M[U_r^{(m)} \cdot p, y] = 0, \quad M[P_r^{(m)} \cdot u, y] = \frac{(-1)^m}{2} u_r(y) \quad (2.7)$$

Используя этот результат, приходим к следующей системе ГИУ:

$$\frac{1}{2} u_r(y) = S_r^{(0)}[u, p, l, y] + u_r^*(y), \quad \frac{1}{2} = -S_r^{(1)}[u, p, l, y], \quad y \in l \quad (2.8)$$

где в силу граничных условий (1.4) введены функции u и v ($u = u^{(0)} = u^{(1)}$, $p = p^{(0)} = p^{(1)}$, $x \in l$).

Система (2.8) является разрешающей для прямой задачи. Рассчитывая граничные поля u и p из решения этой системы, поле перемещений в любой точке полупространства можно находить согласно (2.3), (2.4). В частности, для точек границы полупространства будем иметь

$$u_r^{(0)}(\zeta) = S_r^{(m)}[u, p, l, \zeta] + u_r^*(\zeta), \quad \zeta = (\zeta_1, 0) \quad (2.9)$$

Рассмотрим теперь ГОЗ (1.1)–(1.5) для неизвестного включения $\tilde{V}^{(1)} \subset V$. Все величины, относящиеся к этой задаче, будем помечать волной. Объединяя систему (2.8) и уравнение (2.9), записанные для искомого контура $\tilde{l}$, и используя граничное условие (1.5), сведем ГОЗ к следующей нелинейной системе интегро-дифференциальных уравнений относительно $\tilde{u}$, $\tilde{p}$ и уравнения контура l :

$$\begin{aligned} f_r(\zeta) &= S_r^{(0)}[\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{l}, \zeta] + u_r^*(\zeta), \quad \zeta \in \Phi \\ \frac{1}{2} \tilde{u}_r(\tilde{y}) &= S_r^{(0)}[\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{l}, \tilde{y}] + u_r^*(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in \tilde{l} \\ \frac{1}{2} \tilde{u}_r(\tilde{y}) &= -S_r^{(1)}[\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{l}, \tilde{y}], \quad \tilde{y} \in \tilde{l} \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Линеаризация ГИУ. Будем полагать, что при постановке ГОЗ известна априорная информация о форме и расположении неизвестного контура $\tilde{l}$, которая выражается заданием некоторого контура l , такого, что $\tilde{l}$ может быть задан в локальной системе координат, связанной с l , при помощи соотношения

$$\tilde{x}_i = x_i + v(x)n_i(x), \quad i = 1, 3, \quad x \in l, \quad \tilde{x} \in \tilde{l} \quad (3.1)$$

Будем говорить, что $\tilde{l}$ близок к l , если выполнены следующие условия:

- 1) $\|kv\|_{C(l)} \ll 1$, k – наибольшее волновое число ($m = 0, 1$);
- 2) $\|\kappa v\|_{C(l)} \ll 1$, κ – кривизна l ;
- 3) $\|v_{,s}\|_{C(l)} \ll 1$, $(\cdot)_{,s} = s \cdot \nabla(\cdot)$, – касательный вектор к l .

Функцию v , удовлетворяющую условиям 1–3, будем называть вариацией формы контура l . В предположении близости контуров $\tilde{l}$ и l линеаризуем интегральные представления (2.3), (2.4) в окрестности контура l

$$\tilde{u}_r^{(m)}(\xi) - u_r^{(m)}(\xi) = (-1)^m (S_r^{(m)}[\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{l}, \xi] - S_r^{(m)}[u, p, l, \xi]) \quad (3.2)$$

$$\xi \in \Omega^{(m)} \cap \tilde{\Omega}^{(m)}, \quad m = 0, 1$$

В дальнейшем для определенности области $\Omega^{(m)}$ и $\tilde{\Omega}^{(m)}$ будем считать открытыми, а для краткости аргументы $x \in l$, $\xi \in \Omega^{(m)} \cap \tilde{\Omega}^{(m)}$ будем опускать. Используя тождество

$$\tilde{n} d\tilde{l} = ((n - vs)_{,s}) dl$$

и разложения вида

$$\Sigma_r^{(m)}(x + vn) \cong \Sigma_r^{(m)} + n \cdot \nabla_x \Sigma_r^{(m)}(x + vn)|_{v=0} \quad v \cong \Sigma_r^{(m)} + \Sigma_{r,n}^{(m)} v$$

линеаризуем сингулярную часть оператора Сомильяны (2.5)

$$\begin{aligned} \int_l \mathbf{P}_r^{(m)}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) d\tilde{l}_x &\equiv \int_l (\mathbf{n} - (\mathbf{v}\mathbf{s})_{,s}) \cdot (\Sigma_r^{(m)} + \Sigma_{r,n}^{(m)}\mathbf{v}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) dl_x \equiv \\ &\equiv \int_l (\mathbf{n} \cdot \Sigma_r^{(m)} + \mathbf{v}\mathbf{n} \cdot \nabla \Sigma_r^{(m)} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{v}\mathbf{s} \cdot \Sigma_r^{(m)})_{,s} + \mathbf{v}\mathbf{s} \cdot \nabla \Sigma_r^{(m)} \cdot \mathbf{s}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) dl_x = \\ &= \int_l \mathbf{P}_r^{(m)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) dl_x + \int_l ((\nabla \cdot \Sigma_r^{(m)}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) + \mathbf{s} \cdot \Sigma_r^{(m)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{,s}(x + \mathbf{v}\mathbf{n})) \mathbf{v} dl_x \end{aligned} \quad (3.3)$$

Введем вариацию граничного поля смещений

$$\delta \mathbf{u}(x) = \tilde{\mathbf{u}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) - \mathbf{u}(x), \quad x \in l$$

Используя (2.1), перепишем линеаризованное представление (3.3) в виде

$$\begin{aligned} \int_l \mathbf{P}_r^{(m)}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) d\tilde{l}_x &\equiv \int_l \mathbf{P}_r^{(m)} \cdot (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) dl_x + \\ &+ \int_l (-\rho^{(m)} \omega^2 \mathbf{U}_r^{(m)} \cdot (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) + \mathbf{H}_r^{(m)} \cdot (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u})_{,s}) \mathbf{v} dl_x \\ \mathbf{H}_r^{(m)} &= \mathbf{s} \cdot \Sigma_r^{(m)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Теперь линеаризуем регулярную часть оператора Сомильяны (2.5)

$$\begin{aligned} \int_l \mathbf{U}_r^{(m)}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{p}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) d\tilde{l}_x &\equiv \int_l (\mathbf{U}_r^{(m)} + \mathbf{U}_{r,n}^{(m)}\mathbf{v}) \cdot \tilde{\mathbf{p}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) J dl_x = \\ &= \int_l \mathbf{U}_r^{(m)} \cdot (\mathbf{p} + \delta \mathbf{p}) dl_x + \int_l \mathbf{U}_{r,n}^{(m)} \cdot (\mathbf{p} + \delta \mathbf{p}) \mathbf{v} dl_x \end{aligned} \quad (3.5)$$

где J – якобиан преобразования элемента длины дуги контура $\tilde{l}$ в элемент длины дуги контура l и введена вариация граничного поля напряжений

$$\delta \mathbf{p}(x) = \tilde{\mathbf{p}}(x + \mathbf{v}\mathbf{n}) J(x) - \mathbf{p}(x), \quad x \in l$$

Подставляя (3.4), (3.5) в (3.2), будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^{(m)}(\xi) - u_r^{(m)}(\xi) &\equiv (-1)^m (S_r^{(m)}) \\ [\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}, l, \xi] + W_r^{(m)}[\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}, \mathbf{v}, l, \xi] \\ \xi &\in \Omega^{(m)} \cap \tilde{\Omega}^{(m)}, \quad m = 0, 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь

$$W_r^{(m)}[\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, l, \xi] = \int_l G_r^{(m)}(x, \xi) \mathbf{v}(x) dl_x \quad (3.7)$$

$$G_r^{(m)} = -\rho^{(m)} \omega^2 \mathbf{U}_r^{(m)}(x, \xi) \cdot \mathbf{u}(x) + \mathbf{H}_r^{(m)}(x, \xi) \mathbf{u}_{,s}(x) - \mathbf{U}_{r,n}^{(m)}(x, \xi) \cdot \mathbf{p}(x)$$

Замечание 2. Как видно из (3.6), (3.7), процедура линеаризации не приводит к появлению интегральных операторов с гиперсингулярной особенностью при $\xi \rightarrow y \in l$.

Аналитически продолжим левые и правые части в (3.6) на области $\Omega^{(0)} \cap \tilde{\Omega}^{(1)}$ ($m = 0$) и $\Omega^{(1)} \cap \tilde{\Omega}^{(0)}$ ($m = 1$). Тогда их предельные значения на l связаны приближенным равенством

$$\begin{aligned} \delta u_r(y) - (u_r^{(m)}(y) + \delta u_r^{(m)}(y))_{,n} v(y) &\equiv \\ &\equiv (-1)^m \lim_{\xi \rightarrow y} (S_r^{(m)}[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}, l, \xi] + W_r^{(m)}[\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}, \mathbf{v}, l, \xi]) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$y \in l, \quad \xi \in \Omega^{(m)}$$

Интегралы в (3.8) будем понимать в силу замечания 2 в смысле главного значения по Коши [13]. Рассчитаем скачки, которые испытывают интегральные операторы в правой части (3.8). Для первого слагаемого с использованием (2.7) будем иметь

$$M[\mathbf{P}_r^{(m)} \cdot \delta \mathbf{u} - \mathbf{U}_r^{(m)} \cdot \delta \mathbf{p}, y] = \frac{(-1)^m}{2} \delta u_r(y) \quad (3.9)$$

Формулы для расчета скачка оператора $W_r^{(m)}$ дает следующая

Теорема 2. Пусть l – ляпуновский контур, $\mathbf{u}^{(m)}$ – гладкие в окрестности l ($\xi \in \Omega^{(m)}$, $m = 0, 1$) комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения на l (1.4), v – гладкая на l скалярная функция. Тогда существуют предельные значения оператора $W_r^{(m)}$ (3.7), при этом имеет место следующая формула для скачка:

$$M[\mathbf{G}_r^{(m)} v, y] = \frac{(-1)^m}{2} u_{r,n}^{(m)}(y) v(y) \quad (3.10)$$

Доказательство. Рассмотрим следующую скалярную функцию на l :

$$C(\mathbf{U}_r^{(m)}(x, \xi), \mathbf{u}^{(m)}(x)) = \mathbf{H}_r^{(m)}(x, \xi) \cdot \mathbf{u}_{,s}^{(m)}(x) + \mathbf{P}_r^{(m)}(x, \xi) \cdot \mathbf{u}_{,n}^{(m)}(x)$$

$$x \in l, \quad \xi \in \Omega^{(m)}$$

Можно убедиться, что

$$C(\mathbf{U}_r^{(m)}(x, \xi), \mathbf{u}^{(m)}(x)) = C(\mathbf{u}^{(m)}(x), \mathbf{U}_r^{(m)}(x, \xi))$$

Тогда

$$\begin{aligned} M[\mathbf{G}_r^{(m)} v, y] &= M[(-\rho^{(m)} \omega^2 \mathbf{U}_r^{(m)} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{H}_r^{(m)} \cdot \mathbf{u}_{,s} - \mathbf{U}_r^{(m)} \cdot \mathbf{p}) v, y] = \\ &= M[(-\rho^{(m)} \omega^2 \mathbf{U}_r^{(m)} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{U}_{r,s}^{(m)} \cdot \mathbf{h}^{(m)} - \mathbf{P}_r^{(m)} \cdot \mathbf{u}_{,n}^{(m)}) v, y] = \\ &= -M[\mathbf{U}_r^{(m)} \cdot (\rho^{(m)} \omega^2 \mathbf{u} v + (\mathbf{h}^{(m)} v)_{,s}), y] - M[\mathbf{P}_r^{(m)} \cdot \mathbf{u}_{,n}^{(m)} v, y] \\ \mathbf{h}^{(m)} &= \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(m)} \end{aligned}$$

Применяя формулы (2.7), получим (3.10).

С использованием (3.9), (3.10) приближенное равенство (3.8) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\delta u_r(y) - (u_r^{(m)}(y) + \delta u_r^{(m)}(y))_{,n} v(y)) &\equiv \\ &\equiv (-1)^m (S_r^{(m)}[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}, l, y] + W_r^{(m)}[\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}, v, l, y]), \quad y \in l \end{aligned} \quad (3.11)$$

Замечание 3. При получении (3.6) или (3.11) малости вариации граничных полей не требовалось. При $v \rightarrow 0$ соотношение (3.11) переходит в систему ГИУ относительно $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \mathbf{p}$, аналогичную системе (2.8) относительно $\mathbf{u}$ и $\mathbf{p}$ при отсутствии внешней нагрузки. Отсюда следует, что $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \mathbf{p}$ стремятся к нулевым векторам при $v \rightarrow 0$.

Устремим точку ξ в (3.6) при $m = 0$ к точке $\zeta \in \Phi$ на границе полупространства и используем граничное условие (1.5). Заменяя приближенное равенство на строгое в полученном выражении и в (3.11), объединим их в общую систему. С точностью до малых высших порядков будем иметь

$$\begin{aligned} f_r(\zeta) - u_r^{(0)}(\zeta) &= S_r^{(0)}[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}, l, \zeta] + W_r^{(0)}[\mathbf{u}, \mathbf{p}, v, l, \zeta] \\ \frac{1}{2} (\delta u_r(y) - u_{r,n}^{(0)}(y) v(y)) &= S_r^{(0)}[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}, l, y] + W_r^{(0)}[\mathbf{u}, \mathbf{p}, v, l, y] \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{2}(\delta u_r(y) - u_{r,n}^{(0)}(y)v(y)) = -S_r^{(1)}[\delta u, \delta p, l, y] - W_r^{(1)}[u, p, v, l, y]$$

$$\xi \in \Phi, \quad y \in l$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. Вариация формы контура l и вариации граничных полей на l и на границе полупространства связаны между собой системой специальных ГИУ (3.12).

Замечание 4. В случае дефекта типа полость в системах ГИУ (2.8) и (3.12) достаточно положить $p \equiv \delta p \equiv 0$. При этом последние уравнения этих систем использовать нет необходимости.

4. Применение линеаризованных ГИУ при решениях геометрических обратных задач. Обратную задачу отыскания вариации формы v будем называть линеаризованной ГОЗ. Для ее решения необходимо решить прямую задачу для известного контура l и рассчитать граничные поля на l : u , u_s , p , $u_{,n}^{(0)}$, $u_{,n}^{(1)}$ и на границе полупространства – $u^{(0)}$, $\xi \in \Phi$. Это дает возможность построить интегральные ядра в (3.12). При этом (3.12) представляет собой линейную систему интегральных уравнений относительно δu , δp и v . Верхние уравнения системы (3.12) – интегральные уравнения с гладкими ядрами, и в силу этого решение (3.12) представляет собой некорректную задачу, остальные уравнения в (3.12) – сингулярные.

В случае, если требования, обеспечивающие малость v , нарушаются, для решения нелинейной проблемы предлагается организовать итерационный процесс последовательных приближений. Сначала решается линеаризованная ГОЗ для некоторого начального приближения $l_0 = l$ и рассчитывается функция v_0 , которая дает возможность перейти к следующему приближению l_1 , и т.д.

Замечание 5. В случае антиплоской задачи для изотропного полупространства с дефектом система ГИУ (3.12) переходит в систему ГИУ, полученную в работе [7], где проведен численный анализ работоспособности предлагаемого метода решения ГОЗ.

Замечание 6. Система (3.12) представляет интерес в прямой постановке при исследовании влияния малых изменений в форме дефекта на изменение волнового поля в полупространстве.

Замечание 7. Предложенный метод линеаризации может быть обобщен на трехмерные задачи для анизотропных полуограниченных и ограниченных сред. Основным препятствием на пути применения этого подхода является проблема построения удобных с точки зрения численной реализации функции Грина.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00240а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов: (Введение в теорию обратных задач теплообмена). М.: Машиностроение, 1979. 216 с.
2. Colton D. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves // SIAM Review. 1984. V. 26. P. 232–350.
3. Ворович И.И., Сумбатьян М.А. Восстановление образа дефекта по рассеянному волновому полю в акустическом приближении // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 79–84.
4. Tanaka M., Nakamura M., Yamagiwa K. Application of boundary element method for elastodynamics to defect shape identification // Math. Comput. Modeling. 1991. V. 15. № 3–5. P. 295–302.
5. Ватульян А.О., Гусева И.А. О восстановлении формы полости в ортотропной полуплоскости по заданному на границе волновому полю // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 149–152.

6. Ватульян А.О., Коренский С.А. Об определении формы включения в упругом полупространстве по известному волновому полю на его границе // Дефектоскопия. 1994. № 2. С. 64–70.
7. Ватульян А.О., Коренский С.А. Метод линеаризации в обратной задаче рассеяния для среды со свободной границей // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 3. С. 395–398.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
9. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
10. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформированного твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.
11. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
12. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975, 872 с.
13. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
26.IV.1996