

УДК 532.5:534.1

© 1997 г.

В.Д. Лукьянов

ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ПОРШНЕВЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ В ЖЕСТКОМ ЭКРАНЕ, ЧАСТИЧНО ПЕРЕГОРАЖИВАЮЩЕМ ВОЛНОВОД

Исследуется стационарное возбуждение поршневым излучателем нормальных волн в плоском акустическом волноводе с абсолютно жесткими боковыми стенками. Излучатель, имеющий массу, упруго связан с жестким экраном и размещен в его центре, экран расположен по центру абсолютно мягкой торцевой стенки полубесконечного волновода. Методом Винера – Хопфа – Фока строится решение задачи для случая, когда экран перекрывает торцевую стенку волновода наполовину, а размер излучателя произвольный. Аналитически и численно исследуются амплитуды нормальных волн и акустических полей, возбуждаемых излучателем в волноводе.

Ранее [1–4] были решены задачи дифракции электромагнитных нормальных волн на поперечной полосе, представляющей собой неподвижный абсолютно мягкий или жесткий экран, занимающий половину сечения волновода.

1. Постановка задачи. Схема размещения в полубесконечном плоском волноводе поршневого излучателя и выбор системы координат показаны на фиг. 1. Утолщенная линия выделяет стенки волновода и участки торцевой стенки, представляющие собой жесткий экран S . Горизонтальной штриховкой выделен абсолютно мягкий участок торцевой стенки волновода. Поршневой излучатель P выделен наклонной штриховкой, размещен в жестком экране на отрезке $x = 0, -h \leq y \leq h$. Экран занимает отрезок $x = 0, h \leq |y| \leq H/2$.

Комплексная амплитуда $P(x, y)$ акустического давления в идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей волновод, удовлетворяет в области $0 < x < +\infty, -H < y < H$ однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)P(x, y) = 0, \quad k = \omega / c \quad (1.1)$$

где k – волновое число, c – скорость звука в акустической среде, ω – круговая частота. Множитель $\exp(-i\omega t)$, задающий гармоническую зависимость волновых и колебательных процессов от времени, всюду опущен.

На боковых стенках волновода выполнено однородное граничное условие Неймана

$$\partial P / \partial y(x, \pm H) = 0 \quad (1.2)$$

Колебания в среде возбуждаются гармонической во времени силой с амплитудой F , действующей на поршневой излучатель. Обозначим через A величину эквивалентного давления, оказываемого на излучатель этой силой, $A = F/2h$.

Излучатель имеет массу M и подкреплён упругой пружиной, жесткость которой N . Уравнение движения поршня при учете контакта с акустической средой запишем в виде

$$(N - M\omega^2)U = - \int_{-h}^h P(0, y) dy + F \quad (1.3)$$

где U – амплитуда смещения излучателя от положения равновесия.

Условие равенства смещения излучателя и нормальной составляющей вектора смещения жидкости вблизи него имеет вид

$$\rho\omega^2 U = \frac{\partial P}{\partial x}(0, y), \quad -h \leq y \leq h \quad (1.4)$$

где ρ – плотность акустической среды.

На участке торцевой стенки волновода, свободной от излучателя, выполнено для жесткого неподвижного экрана однородное граничное условие Неймана, а для мягкого участка торцевой стенки однородное граничное условие Дирихле.

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, y) = 0, \quad h \leq |y| \leq \frac{H}{2}; \quad P(0, y) = 0, \quad \frac{H}{2} \leq |y| \leq H \quad (1.5)$$

Акустическое поле удовлетворяет принципу предельного поглощения. В окрестности точек сочленения поршня с жестким экраном, а также концов жесткого экрана и точек соединения торца волновода с его боковыми стенками выполняется условие Майкснера.

2. Интегральные уравнения. Сведем задачу к системе интегральных уравнений.

Учтем, что от излучателя в волноводе с боковыми жесткими стенками распространяются симметричные нормальные волны вида (учитывается симметрия относительно оси волновода)

$$Q_n(x, y) = A \sqrt{\frac{k}{\epsilon_n \gamma_n}} \varphi_n(y) \exp(i\gamma_n x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

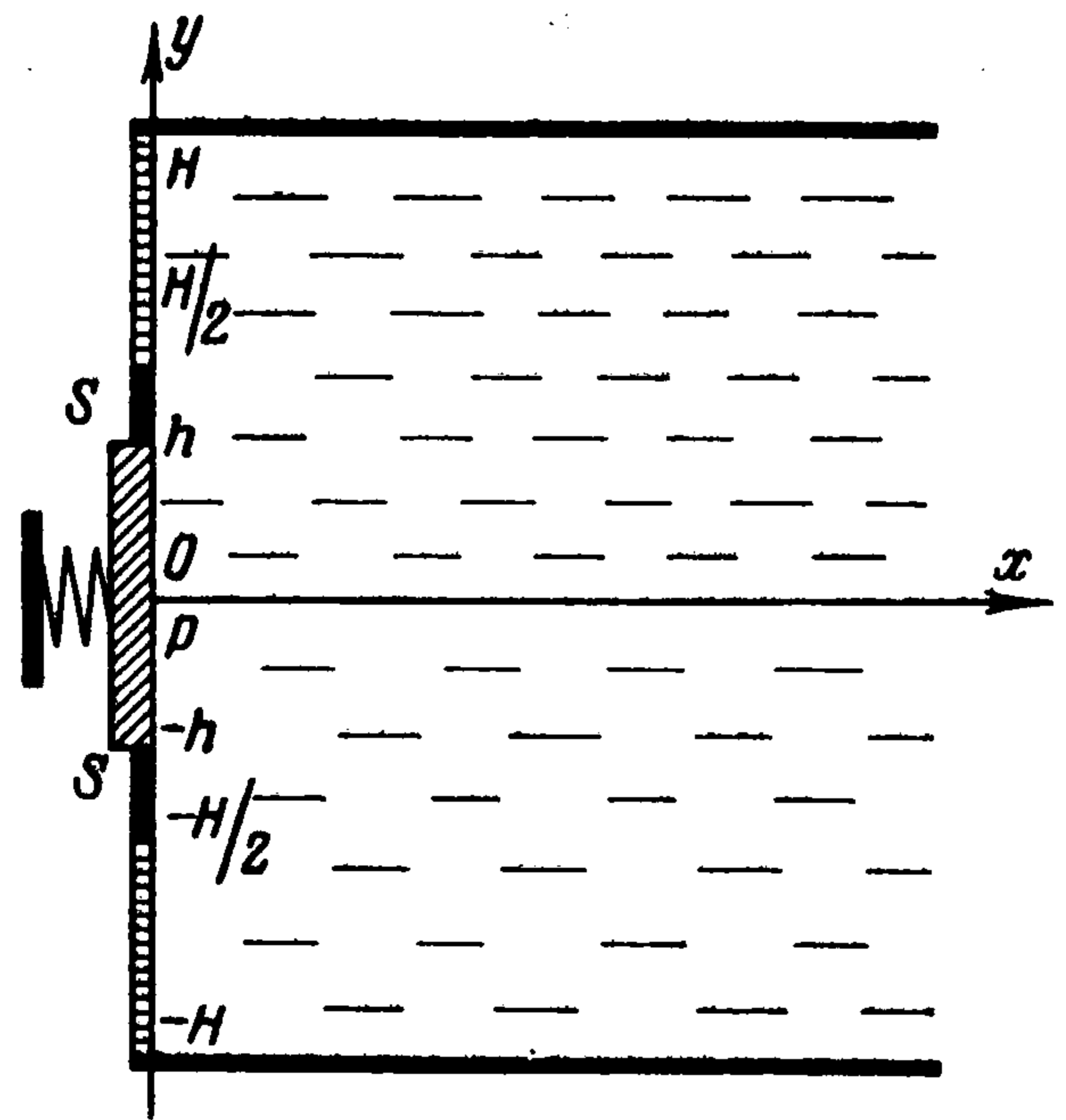
$$\varphi_n(y) = \cos(q_n y), \quad q_n = \pi n / H, \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - q_n^2}, \quad \epsilon_0 = 2, \quad \epsilon_n = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Введение множителя A , величины эквивалентного давления оказываемого активной силой F на излучатель, в выражение для $Q_n(x, y)$ связано с тем, что в силу линейности задачи амплитуды возбуждаемых нормальных волн пропорциональны этой силе.

Нормировка нормальной волны выбрана так, чтобы все распространяющиеся ($\text{Im } \gamma_n = 0$, при $\text{Im } k = 0$) нормальные волны $Q_n(x, y)$ переносили через поперечное сечение волновода одинаковую среднюю (за период) мощность

$$W = \frac{1}{2\rho\omega} \text{Im} \int_{-H}^H \overline{Q_n(x, y)} \frac{\partial Q_n(x, y)}{\partial x} dy = \frac{A^2 H}{2\rho c} \quad (2.2)$$

Учитывая симметрию задачи относительно оси волновода, имеем четность акустических давлений $P(x, y)$ по переменной y . Поэтому решение ищем только в



Фиг. 1

верхней половине волновода при $y > 0$, добавив вдоль луча $0 < x < \infty$, $y = 0$ граничное условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (2.3)$$

Акустическое давление $P(x, y)$ в верхней половине волновода при $x > 0$ ищем в виде разложений по плоским волнам:

$$P(x, y) = \frac{Ak}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) \frac{\text{ch}(\gamma(y-H))}{\gamma \text{sh}(\gamma H/2)} \sin(\lambda x) d\lambda, \quad \frac{H}{2} \leq y \leq H \quad (2.4)$$

$$P(x, y) = -\frac{Ak}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) \frac{\text{ch}(\gamma y)}{\gamma \text{sh}(\gamma H/2)} \cos(\lambda x) d\lambda + P_*(x, y), \quad 0 < y < \frac{H}{2} \quad (2.5)$$

Здесь $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, а $P_*(x, y)$ – какое-либо частное решение уравнения Гельмгольца в полосе $|y| < H/2$ и удовлетворяющее условиям (1.4) и (1.5), а в остальном достаточно произвольно.

В зависимости от выбранных граничных условий на боковых сторонах полосы при $x > 0$ и $y = \pm H/2$ будем иметь различные частные решения $P_*(x, y)$. Выберем решение, удовлетворяющее на этих лучах однородным граничным условиям Неймана. Частное решение ищем в виде разложения по нормальным волнам волновода с жесткими стенками и шириной H , т.е. в соответствии с принципом предельного поглощения в виде волн $Q_{2n}(x, y)$, определенных формулой (2.1). Действительно, замена ширины волновода H в (2.1) на $H/2$ эквивалентна удвоению номера нормальной волны. Таким образом, имеем представление (всюду далее суммирование по n или s ведется от нуля до бесконечности)

$$P_*(x, y) = u \sum_n \alpha_{2n}^* Q_{2n}(x, y), \quad (u = -i\omega \rho c U / A) \quad (2.6)$$

Для нахождения искомых амплитуд нормальных волн α_{2n}^* объединим условия (1.4) и (1.5) в виде

$$\rho \omega^2 U \chi_h(y) = \frac{\partial P_*}{\partial x}(0, y), \quad \chi_h(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq h \\ 0, & h < |y| \leq H/2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Это условие теперь справедливо уже при всех $|y| < H/2$.

Подставляем представление (2.6) в граничное условие (2.7) и после сокращения на величину u имеем равенство

$$\chi_h(y) = \sum_n \sqrt{\frac{\gamma_{2n}}{\epsilon_{2n} k}} \alpha_{2n}^* \varphi_{2n}(y) \quad (2.8)$$

Умножим обе части равенства (2.8) на функцию $\varphi_{2s}(y)$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) и проинтегрируем полученное выражения по переменной y на отрезке $[-H/2, H/2]$. С учетом ортогональности функций $\varphi_{2n}(y)$ и $\varphi_{2s}(y)$ на этом отрезке при $n \neq s$ имеем

$$\alpha_{2n}^* = \sqrt{\frac{k \epsilon_{2n}}{\gamma_{2n}}} \eta_{2n}; \quad \epsilon_0 = 2, \quad \epsilon_n = 1 \quad \text{при } n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

где η_{2n} – коэффициенты разложения характеристической функции $\chi_h(y)$ в ряд Фурье по функциям $\varphi_{2n}(y)$

$$\chi_h(y) = \sum_n \eta_{2n} \varphi_{2n}(y) \quad (2.10)$$

$$\eta_0 = \frac{2h}{H}, \quad \eta_{2n} = \frac{2}{\pi n} \sin(q_{2n}h), \quad n = 2, 4, \dots \quad (2.11)$$

Отметим, что в частном случае, когда излучатель полностью перекрывает жесткий экран ($h = H/2$), частное решение имеет вид

$$P_*(x, y) = u Q_0(x, y) = u e^{ikx} \quad (2.12)$$

Искомými величинами в представлении (2.4) и (2.5) являются функция $p(\lambda)$ и величина u из (2.6), которой пропорционально частное решение $P_*(x, y)$.

Для удовлетворения условию Мейкснера в окрестности точек концов жесткого экрана потребуем выполнения следующей оценки:

$$p(\lambda) = O(\lambda^{-\varepsilon}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.13)$$

Представления (2.4) и (2.5) для акустического давления $P(x, y)$ обеспечивают удовлетворение уравнению Гельмгольца (1.1) и граничным условиям (1.2) и (1.3). Эти представления обеспечивают также выполнение условий на торцевой стенке волновода.

Действительно, из представления (2.4) следует, что функция $P(x, y)$, при $H/2 < y < H$ нечетна по переменной x и, следовательно, удовлетворяет условию (1.5). Интегральное слагаемое в представлении (2.5) для давления $P(x, y)$ – четная функция по переменной x . Поэтому производная этого слагаемого по переменной x при $x = 0$ равна нулю. Условия (1.4) и (1.5) выполняются автоматически в силу выбора вида частного решения $P_*(x, y)$.

Из непрерывности акустического давления в волноводе и y -составляющей вектора смещения акустической среды вдоль луча $0 < x < \infty, y = H/2$ имеем равенства

$$P\left(x, \frac{H}{2} - 0\right) = P\left(x, \frac{H}{2} + 0\right), \quad \frac{\partial P}{\partial y}\left(x, \frac{H}{2} - 0\right) = \frac{\partial P}{\partial y}\left(x, \frac{H}{2} + 0\right)$$

Используя их, а также представления (2.4) и (2.5), после преобразований получим два интегральных уравнения для нахождения искомой функции $p(\lambda)$ при $x > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = P_*\left(x, \frac{H}{2}\right) \quad (2.14)$$

$$g(\lambda) = \frac{k}{\gamma} \operatorname{cth} \frac{\gamma H}{2}, \quad P_*\left(x, \frac{H}{2}\right) = ku \sum_n \frac{(-1)^n}{\gamma_{2n}} \eta_{2n} \exp(i\gamma_{2n}x) \quad (2.15)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = 0 \quad (2.16)$$

При получении уравнения (2.16) учтено, что на луче $x > 0, y = H/2$ частное решение $P_*(x, y)$ по построению удовлетворяет однородному условию Неймана, а при получении представления для $P_*\left(x, \frac{H}{2}\right)$ учтены соотношения $\varphi_{2n}(H/2) = (-1)^n$ и $\varphi_{2n+1}(H/2) = 0$.

3. Краевая задача Римана. Решение интегральных уравнений (2.14) и (2.16) сведем к решению краевой задачи Римана для аналитических функций.

По теореме Винера – Пели [5] с использованием соотношения

$$\exp(i\beta x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda - \beta - i0} d\lambda, \quad x > 0$$

из уравнений (2.14) и (2.16) заключаем, что

$$p(\lambda)g(\lambda) = \Phi^+(\lambda) + uf(\lambda), \quad p(\lambda) = \Phi^-(\lambda) \quad (3.1)$$

$$f(\lambda) = \sum_n f_{2n}, \quad f_{2n} = \frac{k(-1)^n \eta_{2n}}{\gamma_{2n}(\lambda - \gamma_{2n} - i0)}$$

где $\Phi^+(\lambda)$, $\Phi^-(\lambda)$ – аналитические функции соответственно в верхней ($\text{Im } \lambda > 0$) и нижней ($\text{Im } \lambda < 0$) полуплоскостях комплексной переменной λ .

Согласно оценке (2.13) имеем

$$\Phi^+(\lambda) = O(\lambda^{-1-\varepsilon}), \quad \Phi^-(\lambda) = O(\lambda^{-\varepsilon}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Исключая из уравнений (3.1) искомую функцию $p(\lambda)$, приходим к неоднородной задаче Римана [6]

$$\Phi^-(\lambda)g(\lambda) = \Phi^+(\lambda) + uf(\lambda) \quad (3.3)$$

Задача состоит в отыскании двух функций $\Phi^+(\lambda)$ и $\Phi^-(\lambda)$ по линейному соотношению (3.3), выполненному на вещественной оси переменной λ ($\text{Im } \lambda = 0$).

Ключевым моментом решения задачи Римана является факторизация функции $g(\lambda)$ из (2.15), т.е. представление этой функции в виде

$$g(\lambda) = g^+(\lambda)g^-(\lambda) \quad (3.4)$$

где $g^+(\lambda)$, $g^-(\lambda)$ – аналитические функции соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной λ , не имеющие нулей в этих полуплоскостях. Учитывая, что $g(\lambda)$ – мероморфная функция, искомое представление получим, используя теорию бесконечных произведений [3, 7, 8]. Имеем

$$g^+(\lambda) = g^-(-\lambda) = i \sqrt{\text{cth} \frac{kH}{2}} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{\gamma_{2n+1}} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{\gamma_{2n}} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

При этом

$$g^{\pm}(\lambda) = O(\lambda^{-1/2}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

С учетом представления (3.4) перепишем уравнение (3.3) в виде

$$\Phi^-(\lambda)g^-(\lambda) = \frac{\Phi^+(\lambda)}{g^+(\lambda)} + uF(\lambda) \quad (3.7)$$

Заменим также функцию $F(\lambda) = f(\lambda)/g^+(\lambda)$ в уравнении (3.7) суммой функций, аналитических соответственно в верхней ($F^+(\lambda)$) и нижней ($F^-(\lambda)$) полуплоскостях переменной λ :

$$F(\lambda) = F^+(\lambda) + F^-(\lambda)$$

$$F^+(\lambda) = \sum_n f_{2n} \left(\frac{1}{g^+(\lambda)} - \frac{1}{g^+(\gamma_{2n})} \right), \quad F^-(\lambda) = \sum_n \frac{f_{2n}}{g^+(\gamma_{2n})} \quad (3.8)$$

Преобразуем уравнение (3.7) к виду

$$\Phi^-(\lambda) g^-(\lambda) - u F^-(\lambda) = \frac{\Phi^+(\lambda)}{g^+(\lambda)} + u F^+(\lambda) \quad (3.9)$$

Согласно теореме по аналитическом продолжении через контур левая и правая части равенства (3.9) задают некоторую единую функцию $\Phi(\lambda)$, аналитическую на всей комплексной плоскости переменной λ . Ввиду оценок (3.2) и (3.6) эта функция будет тождественно равна нулю. Следовательно, используя второе соотношение (3.1) и второе соотношение (3.8), получим

$$p(\lambda) = \frac{u}{g^-(\lambda)} \sum_n \frac{f_{2n}}{g^+(\gamma_{2n})} \quad (3.10)$$

4. Акустическое давление в волноводе. Получим представление акустического давления в волноводе в виде разложения по нормальным волнам. Для этого запишем интеграл в правой части представления (2.4) с учетом выражения (3.10) для функции $p(\lambda)$ в виде

$$P(x, y) = \frac{Au}{2} \sum_n \frac{(-1)^n k \eta_{2n}}{\gamma_{2n} g^+(\gamma_{2n})} (I_n^+ + I_n^-) \quad (4.1)$$

$$I_n^\pm = \frac{k}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ch}(\gamma(y-H)) e^{\pm i\lambda x}}{g^-(\lambda) \gamma \text{sh}\left(\frac{\gamma H}{2}\right) (\lambda - \gamma_{2n} - i0)} d\lambda \quad (4.2)$$

причем здесь одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки.

Интегралы для I_n^+ и I_n^- в (4.2), вычислим по теореме о вычетах, замыкая контур интегрирования полуокружностью бесконечного радиуса соответственно в верхней и нижней полуплоскостях переменной λ с учетом представления (3.1). Будем иметь

$$\begin{aligned} I_n^+ &= (-1)^n g^+(\gamma_{2n}) \varphi_{2n}(y) \exp(i\gamma_{2n}x) - \\ &- \sum_s \frac{2(-1)^{s+1} q_{2s+1} g^+(\gamma_{2s+1})}{(\gamma_{2s+1} - \gamma_{2n}) H \gamma_{2s+1}} \varphi_{2s+1}(y) \exp(i\gamma_{2s+1}x) \\ I_n^- &= \frac{e^{ikx}}{g^+(k)(k + \gamma_{2n}) H} + \sum_s \frac{2k(-1)^s}{(\gamma_{2n} + \gamma_{2s}) H \gamma_{2s} g^+(\gamma_{2s})} \varphi_{2s}(y) \exp(i\gamma_{2s}x) \end{aligned}$$

Согласно (4.1) получим теперь представление для акустического давления в виде искомого разложения по нормальным волнам

$$P(x, y) = u \sum_n \alpha_n Q_n(x, y), \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{k \varepsilon_n}{\gamma_n}} \mu_n \quad (4.3)$$

$$\mu_0 = \frac{\eta_0}{2} + \frac{k}{2H g^+(k)} \sum_s \frac{(-1)^s \eta_{2s}}{(k + \gamma_{2s}) \gamma_{2s} g^+(\gamma_{2s})}$$

$$\mu_{2n} = \frac{\eta_{2n}}{2} + \frac{(-1)^n}{g^+(\gamma_{2n}) H} \sum_s \frac{(-1)^s \eta_{2s}}{(\gamma_{2n} + \gamma_{2s}) \gamma_{2s} g^+(\gamma_{2s})}$$

$$\mu_{2n-1} = (-1)^n q_{2n-1} g^+(\gamma_{2n-1}) \sum_s \frac{(-1)^s \eta_{2s}}{(\gamma_{2n-1} - \gamma_{2s}) H \gamma_{2s} g^+(\gamma_{2s})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты η_{2n} определены формулами (2.11).

В частном случае, когда излучатель полностью перекрывает жесткий экран ($h = H/2$), имеем

$$\mu_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4kH(g^+(k))^2}$$

$$\mu_{2n} = \frac{(-1)^n}{g^+(k)g(\gamma_{2n})(\gamma_{2n} + k)H}, \quad \mu_{2n-1} = \frac{(-1)^n g^+(\gamma_{2n-1})q_{2n-1}}{g^+(k)(\gamma_{2n-1} - k)kH} \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Покажем, что μ_n – коэффициенты разложения в ряд Фурье по функциям $\varphi_n(y)$ смещения акустической среды на торце волновода при единичном смещении поршневого излучателя. Действительно, если вычислить амплитуду x -составляющей вектора смещения акустической среды у торцевой стенки волновода $U_1(y)$, то будем иметь при $|y| < H$ равенство

$$U_1(y) = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial P(0, y)}{\partial x} = U \sum_n \mu_n \varphi_n(y)$$

Для определения величины u в формуле (4.1) используем уравнение движения поршня (1.3), которое дает

$$\frac{N - M\omega^2}{-i\omega\rho c} u = -u \int_{-h}^h \sum_n \frac{k}{\gamma_n} \alpha_n \varphi_n(y) dy + 2h \quad (4.5)$$

Из уравнения (4.5) будем иметь

$$u = \frac{\rho c}{Z}, \quad Z = Z_* + \sum_n Z_n, \quad Z_* = -i\omega\rho_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{N}{M}}, \quad \rho_0 = \frac{M}{2h} \quad (4.6)$$

$$Z_n = \frac{\rho c \varepsilon_n k H}{2\gamma_n h} \eta_n \mu_n$$

Здесь Z – входной импеданс поршневого излучателя в жестком экране, частично перекрывающем торцевую стенку полубесконечного волновода. Этот импеданс равен отношению эквивалентного давления A к величине комплексной амплитуды колебательной скорости излучателя $V = -i\omega U$, Z_* – импеданс излучателя в вакууме, ω_0 – собственная частота излучателя в вакууме, ρ_0 – поверхностная плотность излучателя, Z_n – импеданс взаимодействия между формой колебания излучателя в жестком экране и n -й составляющей давления на поршень $\alpha_n Q_n(0, y)$, он равен отношению среднего давления, оказываемого этой составляющей на излучатель, к колебательной скорости излучателя V .

Если излучатель полностью перекрывает жесткий экран ($h = H/2$), то уравнение движения поршня запишется в виде

$$\frac{N - M\omega^2}{-i\omega\rho c} u = u \int_{-H/2}^{H/2} \left(\frac{k}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) \frac{\text{ch}(\gamma y)}{\gamma \text{sh}(\gamma H/2)} d\lambda - 1 \right) dy + H \quad (4.7)$$

Разобьем интеграл в правой части (4.7) на сумму двух слагаемых и изменим порядок интегрирования в первом слагаемом. После интегрирования по переменной y получим

$$\frac{Z_* u}{\rho c} = \frac{ku}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{g^+(k)(\lambda - k - i0)g^-(\lambda)(\lambda^2 - k^2)} - uH + H$$

Интеграл в последнем равенстве вычислим по теореме о вычетах, замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости переменной λ . Подынтегральная функция имеет здесь единственный простой полюс в точке $\lambda = -k$, так как $g^-(\lambda) =$

аналитическая функция в этой полуплоскости. После интегрирования найдем искомую величину u , для которого получим выражение, аналогичное (4.6), только полный импеданс Z вычисляется уже по формуле

$$Z = Z_* + 2Z_0, \quad Z_0 = \rho c \mu_0 \quad (4.8)$$

причем коэффициент μ_0 определен первым выражением (4.4).

Сравнивая формулу (4.8) со второй формулой (4.6), полученной в предположении произвольного соотношения размера клапана и экрана, имеем равенство

$$Z_0 = Z_1 + Z_2 + \dots \quad (4.9)$$

справедливое в случае, когда поршень полностью перекрывает жесткий экран ($h = H/2$).

Окончательное выражение для безразмерной амплитуды n -й нормальной волны, возбуждаемой поршневым излучателем в мягкой торцевой стенке, получим из формулы (4.4) с учетом найденного значения амплитуды смещения излучателя (4.6). Имеем

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{k \epsilon_n}{\gamma_n} \frac{\rho c \mu_n}{Z}} \quad (4.10)$$

Акустическое давление в волноводе, возбуждаемое поршневым излучателем, размещенным на его торцевой стенке, согласно представлению (4.3), при учете формулы (4.10), определяется выражением

$$P(x, y) = \frac{A k \rho c}{Z} \sum_n \frac{\mu_n}{\gamma_n} \varphi_n(y) \exp(i \gamma_n x) \quad (4.11)$$

5. Результаты численных расчетов. Результаты расчетов по формулам (4.10) и (4.11) показаны на фиг. 2–4. При всех вычислениях полагали, что $\rho_0/(\rho H) = M/(2\rho h H) = 1/2$.

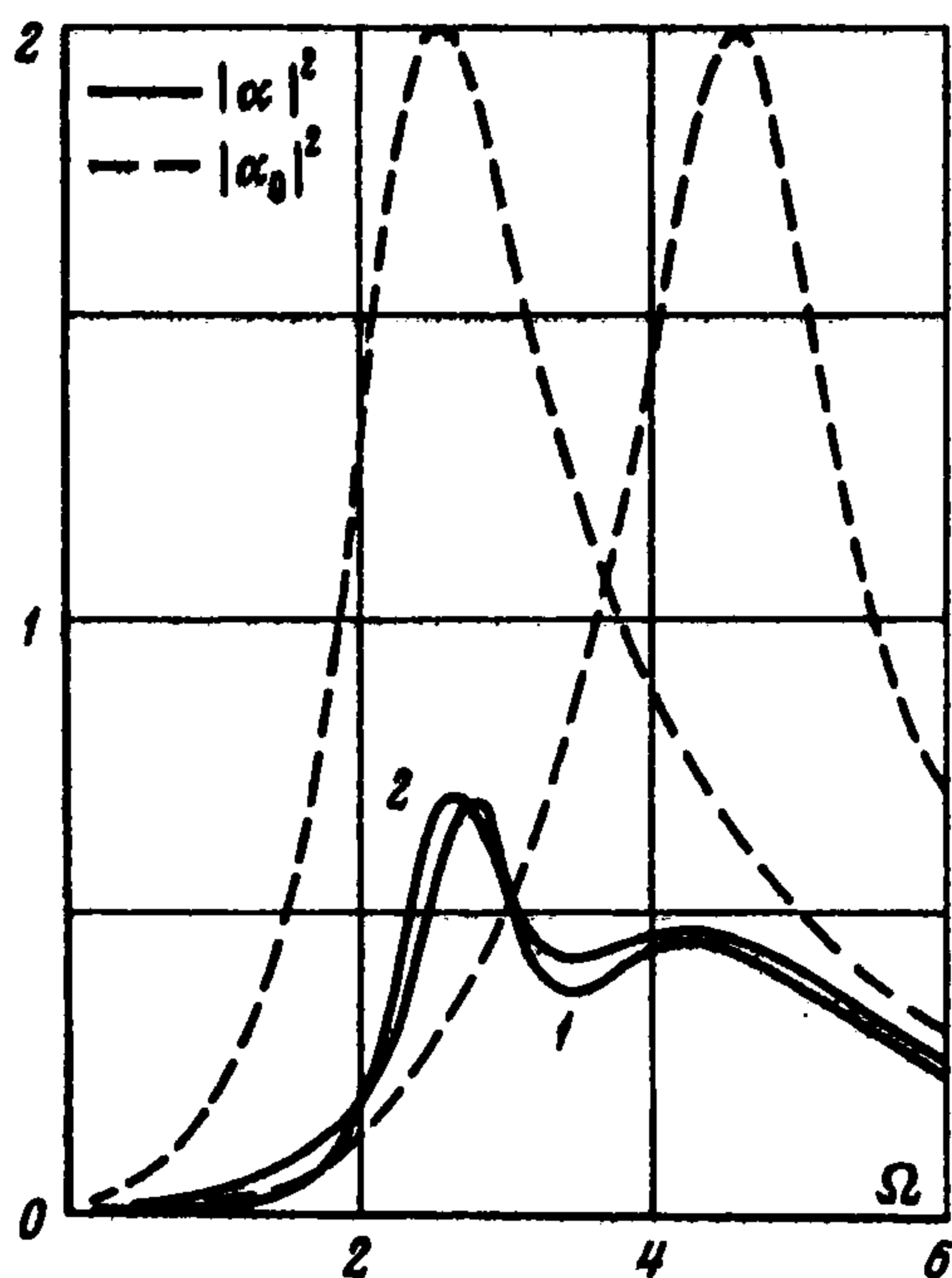
Отметим, что средний за период колебаний поток мощности W_n , уносимый от торцевой стенки распространяющейся волной с номером n , в соответствии с представлением (4.11) вычисляется по формуле $W_n = |\alpha_n|^2 W$, W задается формулой (2.2). Величину $|\alpha_n|^2$ будем называть коэффициентом возбуждения по мощности n -й нормальной волны.

На фиг. 2 показана зависимость коэффициента возбуждения по мощности нормальной волны поршневого типа $|\alpha_0|^2$ (сплошные кривые) от безразмерной частоты возбуждающей силы $\Omega = kH$. Излучатель располагался в центре торцевой стенки волновода и полностью покрывал жесткий экран ($h = H/2$). Безразмерная собственная частота поршневого излучателя в вакууме $\Omega_* = \omega_0 H/c$, Ω_1 – частота зарождения нормальной волны $Q_1(x, y)$ ($\Omega_1 = \pi$). Кривые 1 соответствуют значению $\Omega_* = 2,5 < \Omega_1$, кривые 2 – значению $\Omega_* = 4,5 > \Omega_1$. Штриховые линии соответствуют случаю, когда излучатель полностью перекрывает сечение волновода. Параметры излучателя подобраны так, чтобы импеданс его в вакууме был также равным Z_* .

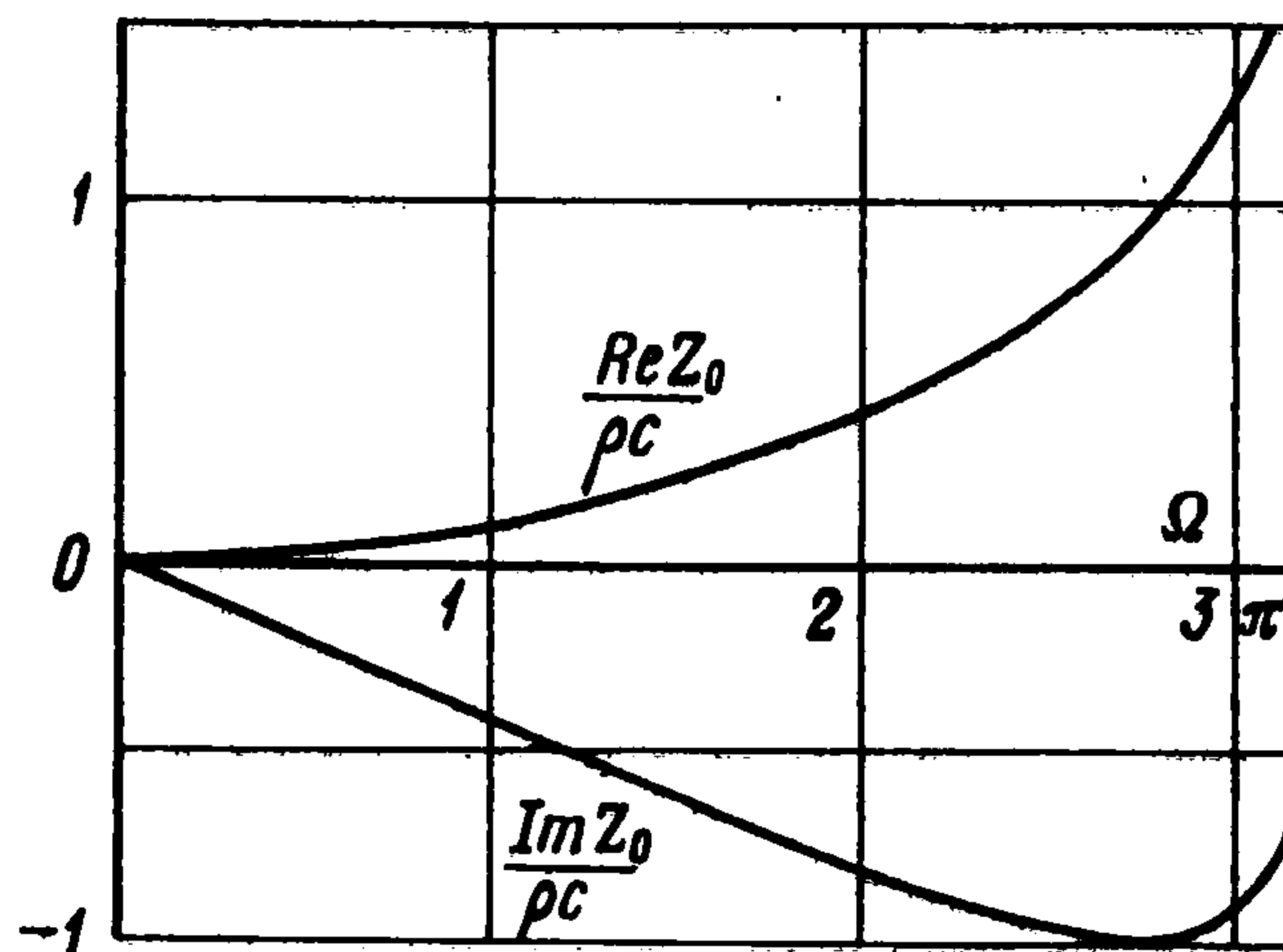
В случае, когда излучатель полностью перекрывает канал волновода, волна поршневого типа – единственная волна, которая возбуждается в волноводе. Акустическое поле в волноводе имеет вид $\alpha Q_0(x, y)$, полный импеданс такого излучателя вычисляется по формуле $Z' = Z_* + \rho c$, а амплитуда $\alpha = \sqrt{2\rho c / Z'}$.

Зависимости, приведенные на фиг. 2, имеют резонансный характер, который определяется зависимостью от частоты соответствующих полных импедансов: для $|\alpha_0|^2$ это Z , для $|\alpha|^2$ это Z' . Оба импеданса – комплексные величины, действительная часть которых – активная составляющая импеданса, а мнимая – реактивная составляющая. Активная часть импедансов связана с потерей энергии в колеблющейся механической системе на излучение.

В случае, когда излучатель полностью перекрывает сечение волновода, единственная возбуждаемая нормальная волна поршневого типа на всех частотах уносит колебательную



Фиг. 2



Фиг. 3

энергию от излучателя. Импеданс взаимодействия этой волны с формой колебания излучателя имеет активный характер, равен ρc и не зависит от частоты. На резонансной частоте Ω_* реактивная составляющая полного импеданса Z' , которая здесь равна импедансу излучателя в вакууме Z_* , обращается в нуль, и $|\alpha|^2$ принимает максимальное значение, равное двум.

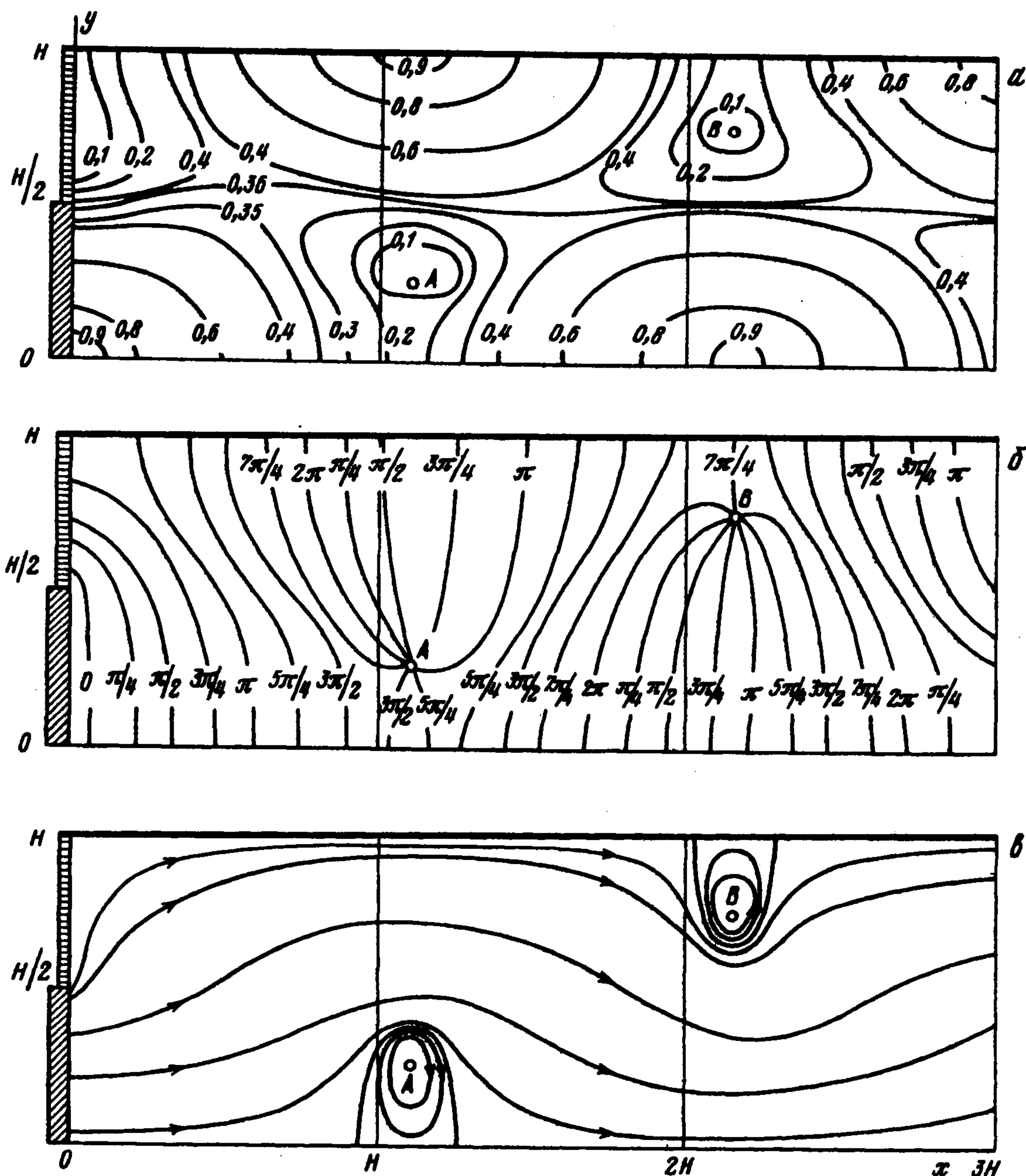
Более сложный характер имеет зависимость от частоты коэффициент возбуждения по энергии $|\alpha_0|^2$ в случае, когда экран частично перекрывает канал волновода. В волноводе возбуждаются все нормальные волны: распространяющиеся и нераспространяющиеся. Полный импеданс излучателя Z здесь вычисляется по второй формуле (4.6), которая в частном случае $h = H/2$ упрощается и имеет вид (4.8). Все импедансы Z_n , отвечающие за взаимодействие излучателя с полубесконечным волноводом, — комплексные величины. При $h = H/2$, как было показано ранее в (4.9), суммарный импеданс взаимодействия излучателя со всеми нормальными волнами, отличными от поршневой, равен импедансу взаимодействия его с поршневой волной Z_0 . Зависимости от безразмерной частоты Ω активной ($\text{Re } Z_0$, кривая 1) и реактивной ($\text{Im } Z_0$, кривая 2) составляющей импеданса Z_0 для случая, когда излучатель полностью покрывает жесткий экран, показаны на фиг. 3.

Для объяснения наличия реактивной части у импеданса Z рассмотрим задачу о колебании излучателя в жестком экране, частично перегородившем торцевую стенку полубесконечного волновода, как нечетную часть задачи об осциллирующем излучателе. Осциллирующий излучатель [9] — это два синфазно колеблющихся излучателя, размещенных симметрично по обе стороны жесткого экрана. Рассуждения, аналогичные приведенным для осциллирующего излучателя [9], объясняют появление реактивной части у импедансов Z_n . В силу того, что экран не полностью перекрывает канал волновода, имеется возможность перекачки среды с одной стороны экрана на другую, что приводит к выравниванию акустических давлений по разные стороны экрана и не создает сжатия среды вдали от него. За полупериод колебаний выравнивание давления эффективно на расстоянии полудлины звуковой волны от края излучателя. Особенно значителен этот эффект на низких частотах, когда размер излучателя не превосходит длины звуковой волны в среде.

Зависимость $|\alpha_0|^2$ от частоты также имеет резонансный характер, со сдвигом резонансной частоты $\Omega' < \Omega_1$ по отношению к частоте Ω_* . Значение Ω' определяется соотношением между активной и реактивной составляющей полного импеданса Z .

На фиг. 4 даны результаты расчетов полного акустического поля в волноводе $P(x, y) = |P(x, y)| \exp(i\varphi(x, y))$ (функция $\varphi(x, y)$ описывает распределение фазы поля давления) при $h = H/2$, $\Omega_* = 4.5$. Частота возбуждающей силы была выбрана так, что $\Omega = 4$.

Распределение $|P(x, y)|/|P(0, H/2)|$ — модуля нормированного давления (изобары) в волноводе показано на фиг. 4, а. На фиг. 4, б изображены линии равной фазы акустического давления в волноводе ($\varphi(x, y) = \text{const}$). Линии среднего за период потока мощности, уносимой



Фиг. 4

от излучателя приведены на фиг. 4, в; они нарисованы так, что вектор среднего за период потока мощности

$$\Pi(x, y) = \frac{1}{2\rho\omega} \operatorname{Im}(\overline{P(x, y)} \operatorname{grad}(P(x, y))) = \frac{1}{2\rho\omega} |P(x, y)| \operatorname{grad}(\varphi(x, y))$$

в каждой точке линии потока мощности направлен по касательной и ортогонален линиям равных фаз.

Точки A и B на фиг. 4 – это точки нулевого давления (фиг. 4, а), точки сгущения линий равных фаз (фиг. 4, б), точки циркуляции колебательной энергии (фиг. 4, в).

Отметим, что полученное решение является одновременно решением задачи о поршневом излучателе в жестком экране, наполовину перегородивающем бесконечный плоский волновод. Излучатель размещен по центру экрана и возбуждает волны по обе его стороны. Излучаемое поле нечетно относительно сечения волновода, проходящего через экран с излучателем. С учетом этой симметрии приходим к задаче об излучателе в полубесконечном волноводе, рассмотренной выше. Действительно, в сечении, в котором расположен экран, на дополнении к нему требуется поставить однородное граничное условие Дирихле.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-02-04346).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baldwin G.L., Heins A.E.* On the diffraction of a plane wave by an infinite plane grating // *Math. Scand.* 1954. V. 2. N. 1. P. 103–118.
2. *Вайнштейн Л.А.* Дифракция в волноводах // *ЖТФ.* 1955. Т. 25. Вып. 5. С. 841–846.
3. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
4. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 431 с.
5. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 287 с.
6. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
8. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
9. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 301 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
4.VI.1996