

УДК 532.5:534.1

© 1997 г.

А.М.Тер-Крикоров

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ДЛЯ СРЕДЫ С РАЗРЫВНОЙ ЧАСТОТОЙ БРЕНТА-ВЯЙСЯЛЯ

Рассматривается двухслойная стратифицированная среда с постоянными, но различными, значениями частот Брента-Вяйсяля (БВ) в слоях. Для уравнения внутренних волн в приближении Буссинеска строится интегральное представление фундаментального решения. В предположении, что источник расположен в нижнем слое, исследуются волновые картины в нижнем и верхнем слоях. Показано, что фундаментальное решение в нижнем слое выражается через те же стандартные функции, что и в случае одного слоя. В верхнем слое ситуация более сложная и исследование основано на изучении точек ветвления некоторой многозначной аналитической функции. При больших временах приближенные формулы получены методом стационарной фазы. Исследован предельный случай когда частоты БВ в слоях мало различаются. В другом предельном случае существует поверхность (в зависимости от соотношения частот БВ в слоях круговой конус или цилиндр), вблизи которой формулы, полученные при помощи метода стационарной фазы, неприменимы. Вычислена специальная асимптотика фундаментального решения на этой поверхности.

1. Интегральное представление фундаментального решения. Рассмотрим функцию $G(x, y, z, z_0, t)$, являющуюся обобщенным решением уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta G) + N^2(z)\Delta_2 G = -\delta(x)\delta(y)\delta(z+z_0)\delta(t) \quad (1.1)$$

$$N(z) = N_1\theta(z) + N_2\theta(-z), \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

где δ – дельта-функция, $\theta(z)$ – функция Хевисайда, равная нулю при $z \leq 0$ и единице при $z > 0$. Известно [1], что G – решение однородного уравнения (1.1) с начальными условиями

$$G|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Предполагается, что $z_0 > 0$, $N_1 \neq N_2$. Разыскивается обобщенное решение уравнения (1.1), ограниченное на бесконечности и являющееся непрерывно дифференцируемой функцией (x, y, z) во всем пространстве с выколотой точкой $(0, 0, -z_0)$. Малые вертикальные смещения жидких частиц, вызванные начавшими функционировать в начальный момент источниками и диполями, выражаются через производные функции G , а решение общей задачи Коши для уравнения внутренних волн – через свертки с фундаментальным решением.

В случае $N = \text{const}$ фундаментальное решение хорошо изучено. Обширная библиография содержится, например, в [2]. Новые приближенные представления для фундаментального решения изучены в [3]. Исследование внутренних волн для случая разрывной частоты БВ представляет значительный интерес для физики атмосферы и океана. Свободные колебания в подобной среде изучались, но вынужденные колебания мало изучены в связи со значительными математическими затруднениями, поскольку для исследования формального интегрального представления фундаментального решения требуются достаточно тонкие оценки многозначных аналитических функций.

Воспользуемся известными интегральными представлениями для δ -функций [1]

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} u J_0(ru) du, \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \exp(pt) dt, \quad \beta > 0 \quad (1.2)$$

и будем искать фундаментальное решение уравнения (1.1) в виде

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} u J_0(ru) G^*(u, p, z) \exp(pt) du dp \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1) и используя (1.2), получаем уравнение для определения G^*

$$p^2 \left(\frac{d^2 G^*}{dz^2} - u^2 G^* \right) - N^2(z) u^2 G^* = -\delta(z + z_0) \quad (1.4)$$

Функция Грина для обыкновенного дифференциального уравнения (1.4) с постоянными коэффициентами находится элементарно:

при $z > 0$

$$G^* = -\frac{4\pi}{up(K_1 + K_2)} \exp\left\{-\frac{u}{p}(zK_1 + z_0K_2)\right\}, \quad K_i^2 = p^2 + N_i^2 \quad (1.5)$$

при $z < 0$

$$G^* = -\frac{2\pi(K_2 - K_1)}{2upK_2(K_2 + K_1)} \exp\left(-\frac{u}{p}K_2(z - z_0)\right) - \frac{2\pi}{upK_2} \exp\left(-\frac{u}{p}K_2(z + z_0)\right) \quad (1.6)$$

Подставляя (1.5) и (1.6) в (1.3) и пользуясь тем, что

$$\int_0^{+\infty} J_0(ru) \exp(-\alpha u) du = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}}, \quad \alpha > 0$$

получаем при $z > 0$

$$-4\pi^2 iG = \frac{1}{(N_2^2 - N_1^2)} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{(K_2 - K_1) \exp(pt) dp}{\sqrt{p^2 r^2 + (zK_1 + z_0K_2)^2}} \quad (1.7)$$

Аналогично, подставляя (1.6) в (1.3), получаем при $z < 0$

$$-8\pi^2 iG = \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\exp(pt) dp}{K_2 \sqrt{p^2 r^2 + K_2^2 (z + z_0)^2}} - \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{(K_2 - K_1) \exp(pt) dp}{K_2 (K_2 + K_1) \sqrt{p^2 r^2 + K_2^2 (z - z_0)^2}} \quad (1.8)$$

2. Волновая картина в нижнем полупространстве. Известно, что фундаментальное решение уравнения внутренних волн для случая постоянной частоты БВ имеет вид

$$G = \frac{1}{4\pi N \sqrt{r^2 + z^2}} \Phi \left(Nt, \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$$

причем для функции $\Phi(\tau, \lambda)$ получены различные интегральные представления и асимптотические формулы (см. например, [2, 3]). В частности

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i0}^{+\infty-i0} \frac{\exp(i\tau v) dv}{\sqrt{(v^2-1)(v^2-\lambda^2)}} = \frac{2}{\pi} \text{sign}(1-\lambda) \int_{\lambda}^1 \frac{\sin(\tau v) dv}{\sqrt{|(1-v^2)(v^2-\lambda^2)|}}$$

Если в формуле (1.8) положить

$$R_{\pm}^2 = r^2 + (z \pm z_0)^2, \quad \lambda_{\pm} = \frac{|z \pm z_0|}{R_{\pm}} \quad (2.1)$$

и сделать замену переменных, полагая

$$p = iN_2 v, \quad \tau = N_2 t, \quad \mu^2 = N_1^2 / N_2^2 = 1 + \delta \quad (2.2)$$

то эта формула преобразуется при $z < 0$ к виду

$$4\pi N_2 G = \frac{\Phi(\tau, \lambda_-)}{R_-} - \frac{\Phi(\tau, \lambda_+)}{R_+} + \frac{1}{(1-\delta^2)R_-} \left\{ \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1 \right) \Phi(\tau, \lambda_-) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \mu^2 \right) \Phi \left(\mu\tau, \frac{\lambda_-}{\mu} \right) \right\} \quad (2.3)$$

Заметим, что первые два слагаемых описывают возмущения от двух симметричных относительно плоскости $z = 0$ источников в среде с постоянной частотой БВ N_2 , а третье слагаемое описывает эффект от наличия разрыва частоты БВ и результат взаимодействия источников.

Поскольку для функции $\Phi(\tau, \lambda)$ известны различные представления в виде интегралов и рядов и различные асимптотические выражения, то формула (2.3) является источником получения приближений для фундаментального решения в нижнем полупространстве. В верхнем полупространстве фундаментальное решение уже не выражается через стандартную функцию $\Phi(\tau, \lambda)$, что усложняет исследование, которое будет проведено в следующем разделе.

Найдем простейшую асимптотическую формулу для фундаментального решения в нижнем полупространстве. Как известно, для неотрицательных и не близких к нулю или единице значений параметра λ и при $\tau \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(\tau, \lambda) = \Phi_1 \left(\tau - \frac{\pi}{4}, \lambda \right) + \Phi_1 \left(\lambda\tau + \frac{\pi}{4}, \lambda \right)$$

$$\Phi_1(\tau, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau |1 - \lambda^2|}}$$

Вводя еще функцию

$$\Phi_2(\tau, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau^3 |1 - \lambda^2|}}$$

подставляя выражения для функции $\Phi(\tau, \lambda)$ через функции $\Phi_1(\tau, \lambda)$, $\Phi_2(\tau, \lambda)$ в формулу (2.3) и учитывая (2.2), получаем асимптотическую формулу при $z < 0$, $\tau \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 4\pi N_2 G = & \frac{1}{R_-} \left(\Phi_1 \left(N_2 t - \frac{\pi}{4}, \lambda_- \right) + \Phi_1 \left(N_2 \lambda_- t + \frac{\pi}{4}, \lambda_- \right) \right) - \\ & - \frac{1}{R_+} \left(\Phi_1 \left(N_2 t - \frac{\pi}{4}, \lambda_+ \right) + \Phi_1 \left(N_2 \lambda_+ t + \frac{\pi}{4}, \lambda_+ \right) \right) + \\ & + \frac{1}{(1-\delta^2)R_-} \left(\Phi_2 \left(N_1 t - \frac{\pi}{4}, \lambda_- \frac{N_2}{N_1} \right) - \Phi_2 \left(N_2 t - \frac{\pi}{4}, \lambda_- \right) \right) + \\ & + \frac{1-\lambda_-^2}{(1-\delta^2)R_-} \left(\Phi_1 \left(N_2 \lambda_- t + \frac{\pi}{4}, \lambda_- \right) - \Phi_1 \left(N_1 \lambda_- t + \frac{\pi}{4}, \lambda_- \frac{N_2}{N_1} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Величины $R_{\pm}$, $\lambda_{\pm}$ определены формулами (2.1).

Заметим, что в первых двух слагаемых при фиксированных значениях $\lambda_{\pm}$, отличных от нуля и единицы, оставлены члены порядка $\tau^{-1/2}$, в то время как в третьем слагаемом в формуле (2.4) оставлены члены порядка $\tau^{-3/2}$. Это связано с неравномерностью асимптотического представления по отношению к параметрам N_1, N_2 . Если при фиксированном τ перейти в формуле (2.4) к пределу при $N_1 \rightarrow N_2$, то третье и четвертое слагаемые приобретут порядок $1/\sqrt{\tau}$ и получится правильная асимптотическая при $\tau \rightarrow \infty$ формула для случая постоянной частоты БВ.

3. Волновая картина в верхнем полупространстве. Делая в уравнении (1.7) замену переменных (2.2) и пользуясь обозначениями (2.1), получаем

$$G = \frac{1}{4\pi^2 N_2 \delta i} \int_{-\infty-i0}^{+\infty-i0} F(v) \exp(itv) dv \quad (3.1)$$

$$F(v) = \frac{\sqrt{\mu^2 - v^2} - \sqrt{1 - v^2}}{\sqrt{B(v)}}, \quad B(v) = v^2 r^2 - (z\sqrt{\mu^2 - v^2} + z_0\sqrt{1 - v^2})$$

Из формул (2.2) следует, что при $N_2 < N_1$ параметр $\delta > 1$. В дальнейшем можно ограничиться рассмотрением только этого случая, поскольку при $N_2 > N_1$ вместо замены (2.2) можно сделать замену

$$p = iN_1 t, \quad \tau = N_1 t, \quad \mu^2 = N_2^2 / N_1^2 = 1 + \delta$$

приводящую к формуле, которая получается из формулы (3.1) перестановкой N_2 и N_1 , z и z_0 .

Исследование основано на изучении точек ветвления подынтегральной функции. Ветвь функции $\sqrt{1 - v^2}$ регулярна в плоскости с разрезами по действительной оси, соединяющими точки $+1$ и -1 с бесконечностью, и принимает значение 1 при нулевом значении аргумента. Аналогичным образом выбирается и ветвь функции $\sqrt{\mu^2 - v^2}$. У подынтегральной функции есть еще точки ветвления, являющиеся нулями функции $B(v)$. Если положить

$$\sqrt{\frac{\mu^2 - v^2}{1 - v^2}} = w + \mu \quad (3.2)$$

то

$$v^2 = \frac{w^2 + 2\mu w}{\delta + w^2 + 2\mu w}, \quad B(v) = \frac{1}{\delta}(1 - v^2)T(w)$$

$$T(w) = aw^2 + 2bw - \delta c, \quad a = r^2 - \delta z^2, \quad b = \mu a - \delta z z_0, \quad c = (\mu z + z_0)^2 \quad (3.3)$$

$$D = b^2 + \delta ac = (\mu^2 a + \delta z_0^2)(a + \delta z^2) = r^2(\mu^2 r^2 + \delta(z_0^2 - \mu z^2))$$

При $r^2 > \delta \mu^{-2}(\mu^2 z^2 - z_0^2)$ квадратный трехчлен $T(w)$ имеет два вещественных корня

$$w_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}, \quad w_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{a} = \frac{c\delta}{\sqrt{D} - b} \quad (3.4)$$

Используя формулы (3.3), получаем

$$v_i^2 = 1 - \frac{\delta}{\delta + w_i^2 + 2\mu w_i} = 1 - \frac{a^2}{a^2 + A \pm 2zz_0\sqrt{D}} \quad (3.5)$$

$$A = ac - 2zz_0b = a(\mu^2 z^2 + z_0^2) + 2\delta z^2 z_0^2; \quad i = 1, 2$$

Используя равенство (3.3)–(3.5) и тождество $A^2 - 4z^2 z_0^2 D = a^2(z_0^2 - \mu^2 z^2)^2$, можно убедиться, что при $D > 0$ знак выражения $A \pm 2zz_0\sqrt{D}$ совпадает со знаком A и $0 < v_2^2 < v_1^2 < 1$.

Функция $B(v)$ имеет два вещественных нуля $\pm v_1$ при $a > 0, \delta > 0$, не имеет нулей при $a < 0, \delta > 0, D > 0$. При $D < 0$ нули функции $B(v)$ комплексно сопряжены и имеют ненулевую мнимую часть.

Действительно, при $a > 0, \delta > 0$ имеем $D > 0$ и $0 < v_2 < v_1 < 1$. Вследствие выбора ветвей в формуле (3.2), для того чтобы числа $\pm v_i$ были нулями функции $B(v)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства $w_i + \mu > 0$. Если $a > 0$, то $w_1 + \mu > 0, w_2 + \mu < 0$, и поэтому точки $\pm v_1$ являются нулями функции $B(v)$, а точки $\pm v_2$ не являются. Если же $a < 0$, то $w_1 + \mu < 0, w_2 + \mu < 0$, так что в этом случае нулей нет.

Замечание. Неравенство $D < 0$ при $\delta > 0$ выполнено внутри гиперболоида вращения

$$z^2 - r^2/\delta = z_0^2 \mu^{-2} \quad (3.6)$$

В дальнейшем будет показано, что комплексным нулям соответствуют члены, экспоненциально стремящиеся к нулю, когда время стремится к бесконечности.

Преобразуем формулу (3.1). Пусть $r > z\sqrt{\delta}, \delta > 0$. В этом случае $D > 0$ и функция $F(v)$ имеет, кроме точек ветвления $\pm 1, \pm \mu$, еще две точки ветвления $\pm v_1, 0 < v_1 < 1$, являющихся нулями функции $B(v)$. Разрежем комплексную плоскость по отрезкам $[v_1, \mu], [-\mu, -v_1]$. Функция $F(v)$ регулярна в плоскости с такими разрезами. При обходе разреза по охватывающему его контуру числитель и знаменатель дроби $F(v)$ меняют знак на противоположный, и эта функция положительна на нижнем берегу правого разреза. Справедливы равенства

$$F(-v \pm i0) = -\overline{F(v \pm i0)}, \quad F(v + i0) = \overline{F(v - i0)}, \quad v \in [v_1, \mu] \quad (3.7)$$

используя которые и применяя теорему Коши, преобразуем интеграл (3.1) к интегралу по отрезку $[v_1, \mu]$. Разбивая этот отрезок на два $[v_1, 1]$, $[1, \mu]$ и используя равенство (3.7), получаем

$$G = -\frac{1}{\pi^2 N_2 \delta} (G_1 + G_2), \quad \delta > 0, \quad r > z\sqrt{\delta} \quad (3.8)$$

$$G_1 = \int_{v_1}^1 F(v) \sin(\tau v) dv, \quad G_2 = \int_1^{\mu} F(v) \sin(\tau v) dv$$

Если $r < z\sqrt{\delta}$, то функция $B(v)$ не обращается в нуль и в формуле (3.12) нужно положить $G_1 = 0$.

Если точка (x, y, z) лежит в тех областях, где $D < 0$, то функция $B(v)$ имеет не более двух пар комплексно-сопряженных корней и в формуле (3.8) появятся интегралы по вертикальным разрезам в верхней полуплоскости, соединяющим точку ветвления с бесконечностью, экспоненциально убывающие при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, эти слагаемые не нужно учитывать при выводе приближенных формул методом стационарной фазы.

Найдем теперь асимптотику фундаментального решения в верхнем полупространстве. При $\delta > 0$, $r > z\sqrt{\delta}$ воспользуемся формулами (3.7)–(3.8). Функция $F(v)$, определяемая формулой (3.1), имеет на отрезке $[v_1, \mu]$ три точки ветвления: $v_1 < 1, 1, \mu > 1$. Положим

$$-B(v) = (v^2 - v_1^2)\chi(v), \quad \chi(v) > 0, \quad v \in [v_1, 1] \quad (3.9)$$

причем

$$\chi(v_1) = r^2 + z^2 + z_0^2 + zz_0 \left(w_1 + \mu + \frac{1}{w_1 + \mu} \right) \quad (3.10)$$

$$-B(1) = r^2 - z^2\delta = a, \quad -B(\mu) = \mu^2 r^2 + z_0^2\delta > 0$$

Дадим оценку функции, определяемой формулами (3.8), при помощи стандартных оценок метода стационарной фазы. При $\delta > 0$ получаем

$$G = \frac{\xi}{\pi N_2 \delta} \frac{\sqrt{\mu^2 - v_1^2} - \sqrt{1 - v_1^2}}{\sqrt{2\pi\tau v_1 \chi(v_1)}} \sin\left(\tau v_1 + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- \frac{1}{\pi N_2 \delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^3}} \left(\frac{\sqrt{\mu} \cos(\mu\tau - \pi/4)}{\sqrt{\mu^2 r^2 + z_0^2\delta}} - \frac{\cos(\tau + (1 - 2\xi)\pi/4)}{\sqrt{r^2 - z^2\delta}} \right) \quad (3.11)$$

$$\xi = \theta(r^2 - z^2\delta)$$

Член, содержащий $\tau^{-3/2}$, оставлен с той целью, чтобы формула (3.11) давала правильное приближение при малых значениях δ .

Заметим, что формула (3.11) неприменима при малых значениях параметра $a = r^2 - z^2\delta$. В этом случае необходимы более тонкие оценки (см. [4]). Асимптотика при $a = 0$ вычислена в разд. 5.

4. Приближения при малых значениях параметра δ . Если частоты БВ в верхнем и нижнем слое отличаются мало, то этот параметр будет малым. Выразим все остальные параметры через малый параметр, оставляя члены нулевого и первого порядков. Из формул (3.2), (3.3), (3.5) получаем при $r > z\sqrt{\delta}$, $\delta > 0$ следующее выражение для первого

слагаемого в формуле (3.11):

$$\frac{1}{2\pi N_2 k R \sqrt{2\pi\tau\lambda}} \left(1 - \frac{\delta}{4\mu R_\mu} \lambda\right) \sin\left(\tau \left(\lambda + \frac{\delta}{2\mu} \frac{z}{R_\mu} \lambda\right) + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$R_\mu^2 = r^2 + (\mu z + z_0)^2, \quad R^2 = r^2 + (z + z_0)^2, \quad \lambda = \frac{|\mu z + z_0|}{R_\mu}, \quad k = \frac{r}{R_\mu}$$

5. Малые значения параметра a . Обработаем формулы (3.2), (3.3) и (3.8)–(3.10) при $\delta > 0$, оставляя только члены нулевого и первого порядков. Можно показать, что G_1 имеет равномерно по τ порядок a^2 . Функцию G_2 , используя последнее равенство (3.8), запишем в виде

$$G_2 = \operatorname{Re} \left\{ \int_1^\mu \frac{\sqrt{\mu^2 - v^2} - i\sqrt{v^2 - 1}}{\sqrt{-B(v)}} \sin(\tau v) dv \right\} \quad (5.1)$$

$$-B(v) = a(w - w_1)(w - w_2)(1 - v^2) = (a\sqrt{\mu^2 - v^2} - ib\sqrt{v^2 - 1})(\sqrt{\mu^2 - v^2} - i(w_2 + \mu)\sqrt{v^2 - 1})$$

Трудность исследования интеграла (5.1) при малых значениях параметра a (т.е. в окрестности гиперболоида (3.6)) заключается в том, что точка ветвления v_1 становится близкой к концевой точке $v = 1$. Ранее [4], рассматривалась ситуация, когда стационарная точка близка к концевой точке и асимптотика выражается через функции Френеля. В рассматриваемом более сложном случае асимптотика уже не выражается через известные специальные функции.

Ограничимся случаем $a = 0$. Наибольший вклад в асимптотику вносит точка $v = 1$. Согласно общей методике получения асимптотических оценок интегралов подобного типа [4], используя формулу (3.8), заключаем, что справедлива асимптотическая формула

$$G = -\frac{1}{2\pi N_1} \left(\frac{2}{\delta\tau}\right)^{3/4} \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{zz_0}} \sin\left(\tau + \frac{3\pi}{8}\right), \quad a = 0, \quad \tau \rightarrow \infty$$

Изучение фундаментального решения для малых, но отличных от нуля значений параметра, a требует дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, (96-01-01599).

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
2. Voisin B. Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Pt. 1. Green function and point sources // J. Fluid Mech. 1991. V. 231. P. 439–480.
3. Гордейчик Б.Н., Тер-Крикоров А.М. О равномерных аппроксимациях фундаментального решения уравнения внутренних волн // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 443–450.
4. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Долгопрудный

Поступила в редакцию
16.IX.1996