

УДК 532.59:534.1

© 1997 г. А.Т. Ильичев

УЕДИНЕННЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Доказывается существование плоских уединенных и обобщенных уединенных волн в слабодиспергирующих средах, волновые процессы в которых описываются системами обратимых уравнений в частных производных, подчиняющимся естественным условиям, сформулированным в статье. Доказательство проводится при помощи понижения порядка соответствующей динамической системы, описывающей бегущие волны, и последующего исследования потока на центральном многообразии системы.

Были сформулированы [1] достаточные условия существования уединенных волн для широкого класса скалярных уравнений первого и второго порядка по времени, инвариантных относительно инверсии времени и пространственной переменной. В настоящей работе обобщены результаты статьи [1] на случай обратимых систем уравнений произвольного порядка. Обобщенные уединенные волны, условия существования которых рассматриваются в статье, являются продуктом нелинейного резонанса уединенной волны и периодической волны, значительно меньшей по амплитуде, чем уединенная составляющая. Обычная уединенная волна в такой системе перестает быть бегущей и очень медленно распадается с течением времени.

Для исследования вопросов существования применяются локальные методы, т.е. речь пойдет о существовании семейств уединенных волн, амплитуда которых достаточно мала. Подобные уединенные волны в физических задачах возникают как бифуркация из состояния покоя с нулевым волновым числом. Типична также ситуация, когда дисперсионное соотношение обнаруживает резонанс между волной, бегущей с фазовой скоростью при нулевом волновом числе, и линейной волной, отвечающей ненулевому волновому числу. В этом случае возможно появление нового типа уединенных волн – обобщенных уединенных волн, несущих незатухающую на бесконечности периодическую рябь (см. например [2]).

Для доказательства существования решений типа уединенных и обобщенных уединенных волн для систем типа (1.1), которым удовлетворяет состояние покоя $w = 0$, используется метод редукции динамических систем, описывающих бегущие волны, к системам более низкого порядка на центральном многообразии. Последнее является интегральным многообразием в фазовом пространстве системы, где находятся ограниченные решения, не покидающие достаточно малой окрестности нуля [3, 4]. Дальнейшее исследование редуцированной системы сводится к изучению интегрируемых систем, которые сколь угодно точно приближают эту систему в окрестности нуля. Аппроксимирующие системы представляют собой нормальную форму уравнений на центральном многообразии. В работе используются два типа нормальных форм систем, описывающих уединенные и обобщенные уединенные волны [2].

1. Постановка задачи. Существование решений типа уединенных волн. Рассмотрим систему уравнений n -го порядка, описывающую распространение плоских волн в

диспергирующих средах

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{w} + \mathbf{F}\left(\mathbf{w}, \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathbf{w}, \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}\right) = 0, \quad i \leq r, \quad j \leq r-1, \quad \mathbf{w} \in \mathbf{R}^r \quad (1.1)$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^r A_i \frac{\partial^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{r-1} B_j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial t} + C \frac{\partial}{\partial t}$$

где A_i, B_j и C – постоянные $(n \times n)$ -матрицы. Вектор $\mathbf{F}$ нелинейно зависит от аргументов, обозначенных в (1.1). Кроме того, будем полагать, что система (1.1) инвариантна относительно одновременной инверсии $t \rightarrow -t$ и $x \rightarrow -x$. Указанную инвариантность далее будем называть обратимостью. Дисперсионное соотношение для (1.1) получается из уравнения $L\mathbf{w} = 0$, где $\mathbf{w} = \mathbf{c} \exp\{i(kx - \omega t)\}$, а $\mathbf{c}$ – постоянный вектор.

Для уравнения (1.1) дисперсионное уравнение имеет n ветвей и может быть записано в виде

$$S = \prod_{i=1}^n (\omega - g_i(k)) = 0 \quad (1.2)$$

Обозначим $\omega_i = g_i(k)$ и $c_i = \lim_{k \rightarrow 0} \omega_i/k$ – фазовую скорость бесконечно длинных волн для i -й ветви.

Предположение 1 (о дисперсионном соотношении). Существует фазовая скорость $c_{i_0} \neq c_i$ для любого номера $i \neq i_0$, такая, что порядок касания прямой $c_{i_0}k$ графика ветви ω_{i_0} при $k = 0$ равен 2 и эта прямая не пересекает график ни одной ветви дисперсионного уравнения (1.2) нигде, кроме точки $k = 0$.

Далее будем обозначать соответствующую скорость c_{i_0} как c . Будем интересоваться решениями уравнений (1.1) типа бегущих волн, когда неизвестная вектор-функция $\mathbf{w}$ зависит только от $\xi = x - Vt$, где V – скорость бегущей волны. Уравнение, описывающее бегущие волны, получается из (1.1) заменой $\partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial \xi$, $\partial/\partial t \rightarrow -V\partial/\partial \xi$.

В рассматриваемом случае слабой дисперсии $\lim_{k \rightarrow 0} g_i(k)/k < \infty$. После перехода к системе, описывающей бегущие волны, и связанной с этим переходом замены t и x , в дисперсионном соотношении (1.2) частота ω заменится на Vk . В силу соответствующих свойств функций $g_i(k)$, после вынесения за знак произведения в (1.2) общего множителя k^n , предел при $k \rightarrow 0$ выражения, оставшегося под знаком произведения, является конечным. Кроме того, если выполняется предположение 1, то это выражение при $V = c$, очевидно, имеет двукратный нулевой корень.

Из изложенного следует, что уравнение

$$\mathcal{L}(\partial/\partial \xi, -V\partial/\partial \xi) \exp(ik\xi) = 0$$

где $\partial \mathcal{L}/\partial \xi = L$, при $V = c$ имеет нулевой корень лишь второго порядка и однократное интегрирование устраняет нуль порядка n в уравнении, полученном из (1.2) после упомянутых замен.

Предположение 2 (о нелинейности вектора $\mathbf{F}$). Система (1.1) для бегущих волн может быть переписана в виде

$$G(V, \mathbf{w}) \left\{ L\left(\frac{\partial}{\partial \xi}, -V\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \mathbf{w} + \frac{\partial}{\partial \xi} f\left(\mathbf{w}, \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \mathbf{w}\right) \right\} = 0, \quad k \leq n-1 \quad (1.3)$$

где $G(V, \mathbf{w})$ – невырожденная в окрестности $\mathbf{w} = 0$ и $V = c$ – $(n \times n)$ -матрица.

Система уравнений (1.3) для решений w , убывающих на бесконечности, таким образом, эквивалентна системе

$$\mathcal{L}w + f = 0 \quad (1.4)$$

Предположение 3. Система уравнений (1.4) разрешима относительно старших производных в окрестности $w = 0$ и $V = c$.

Из предположения 3 немедленно следует, что система (1.4) переписывается в виде динамической системы

$$\dot{v} = A(c)v + \mathcal{L}(\mu, v), \quad \mu = V - c, \quad v \in \mathbb{R}^m \quad (1.5)$$

где $A(c) = A$ – постоянная $(m \times m)$ -матрица, точка означает дифференцирование по "времени", роль которого здесь играет пространственная переменная $-\infty < \xi < \infty$. Нелинейность $\mathcal{F}$ содержит слагаемое $A(V) - A(c)$, так что $\mathcal{F}(0, 0) = 0$ и $\partial \mathcal{F}(0, 0)/\partial v = 0$.

Обратимость системы (1.1) и связанная с ней обратимость динамической системы (1.5) (инвариантность относительно замены $\xi \rightarrow -\xi$) означает, что существует вещественная диагональная $m \times m$ матрица $R: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, т. что $R^2 = 1$ и R антикоммутирует с левой частью (1.5), т.е. $AR = -RA$ и $\mathcal{F}(\mu, Rv) = -R\mathcal{F}(\mu, v)$.

При справедливости предположения 1, единственным собственным значением матрицы A , лежащим на мнимой оси, будет нуль кратности 2. В случае общего положения матрица A имеет один собственный вектор ϕ_0 и один присоединенный вектор ϕ_1 : $A\phi_0 = 0$, $A\phi_1 = \phi_0$. Фазовое пространство $\mathbb{R}^m$, таким образом, является прямой суммой E_0 и E_h , где E_0 – центральное инвариантное подпространство оператора A (размерности 2 в данном случае), а E_h – гиперболическое инвариантное подпространство A .

Решение системы (1.5) представимо в виде $v = v_0 \otimes v_h$, где $v_0 \in E_0$, а $v_h \in E_h$. Систему (1.5) можно спроектировать на подпространства E_0 и E_h :

$$\dot{v}_0 = A_0 v_0 + \mathcal{F}_0(\mu, v_0 + v_h), \quad \dot{v}_h = A_1 v_h + \mathcal{F}_1(\mu, v_0 + v_h) \quad (1.6)$$

($A_0 = A|_{E_0}$, $A_1 = A|_{E_h}$), где $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ – проекции вектора $\mathcal{F}$ на E_0 и E_h соответственно.

Предположение 4. Имеет место равенство $R\phi_0 = \phi_0$.

Заметим, что вектор $R\phi_0$ – собственный вектор A , соответствующий нулевому собственному значению. В самом деле в силу свойств матрицы R , $AR\phi_0 = -RA\phi_0 = 0$. Таким образом, $R\phi_0 = a\phi_0$, где a – некоторая постоянная. Домножив последнее равенство на R , получим, что $a = \pm 1$. Предположение 4 фиксирует $a = 1$.

Заметим, что при выполнении предположения 4 справедливо равенство $R\phi_1 = -\phi_1$. В самом деле из равенства $A\phi_1 = \phi_0$ и предположения 4 следует $AR\phi_1 = -\phi_0$, откуда получаем требуемое.

Если предположение 4 выполняется, то в базисе ϕ_0, ϕ_1

$$R|_{E_0} = R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Центральная часть решения v_0 представляется в виде $v_0 = a_0(\xi)\phi_0 + a_1(\xi)\phi_1$. В соответствии с теоремой о центральном многообразии [4], для v , не покидающих достаточно малой окрестности нуля при всех ξ и достаточно малых μ , $v_h = h(\mu, v_0)$, причем $h(0, 0) = 0$ и $\partial h(0, 0)/\partial v_0 = 0$. Кроме того, функция h наследует свойство обратимости системы (1.5), а именно: $R_h h(\mu, v_0) = -h(\mu, R_0 v_0)$, где $R_h = R|_{E_h}$.

Проблема исследования свойств малых решений (1.5), таким образом, сводится к исследованию свойств малых решений первой системы из (1.6), где $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(\mu, v_0 + h(\mu, v_0))$. Эта система, очевидно, замкнута и в рассматриваемом случае является системой вторичного порядка.

Сопряженная матрица A^* обладает собственным вектором ψ_1 и присоединенным вектором ψ_0 для нулевого собственного значения. Матрица A_0 в базисе ϕ_0, ϕ_1 имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

вектор v_0 в базисе ϕ_0, ϕ_1 имеет компоненты a_0 и a_1 , а вектор $\mathcal{F}_0$ – компоненты $f_1 = \langle \mathcal{F}, \psi_0 \rangle$ и $f_2 = \langle \mathcal{F}, \psi_1 \rangle$, где скобки $\langle, \rangle$ означают обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Предположение 5. Для $v_0 = (a_0, a_1)^T$ достаточно малых, в разложении $f_2 = \mu \rho_0 a_0 + \rho_1 a_0^2 + \rho_2 a_0 a_1 + \rho_3 a_1^2 + o(|\mu v_0|, |v_0|^2)$ в окрестности $v_0 = 0$ константы ρ_0 и ρ_1 не равны нулю ($\rho_2 = 0$ в силу обратимости уравнений).

Докажем, что при выполнении предположений 1–5 имеет место

Теорема 1. Система уравнений (1.1) имеет решения типа уединенных волн по крайней мере тогда, когда амплитуда их достаточно мала.

Доказательство. Из предположения 5 следует, что первая система в (1.6) в базисе ϕ_0, ϕ_1 приобретает вид

$$\dot{a}_0 = a_1 + O(|\mu v_0|, |v_0|^2) \quad (1.8)$$

$$\dot{a}_1 = \rho_0 \mu a_0 + \rho_1 a_0^2 + \rho_3 a_1^2 + o(|\mu v_0|, |v_0|^2)$$

Для дальнейшего исследования системы (1.8) обратимся к теории нормальных форм [4,5]. Нормальная форма системы (1.8) может быть получена после замены

$$v_0 = \alpha + T(\alpha), \quad \alpha = (\alpha_0, \alpha_1)^T$$

и дается уравнением

$$\dot{\alpha} = A_0(\alpha) + N(\alpha) + o(|\alpha|^s)$$

где $T(\alpha) = \{T_1(\alpha), T_2(\alpha)\}^T$ и $N(\alpha) = \{N_1(\alpha), N_2(\alpha)\}^T$ – полиномы степени s , s – произвольное натуральное число. Полином $N(\alpha)$ удовлетворяет соотношениям [4]

$$D_\alpha N(\alpha) A_0^* \alpha = A_0^* N(\alpha) \quad (1.9)$$

$$D_\alpha N(\alpha) = \begin{pmatrix} \partial N_1 / \partial \alpha_0 & \partial N_1 / \partial \alpha_1 \\ \partial N_2 / \partial \alpha_0 & \partial N_2 / \partial \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Используя далее обратимость N по отношению к R_0 из (1.7): $N(R_0 \alpha) = -R_0 N(\alpha)$, из (1.9) легко получить $N_1 = 0$, $N_2 = N_2(\alpha_0)$. Нормальная форма уравнений (1.8), таким образом, имеет вид

$$\dot{\alpha}_0 = \alpha_1, \quad \dot{\alpha}_1 = \Phi(\mu, \alpha_0) \quad (1.10)$$

$$\Phi(\mu, \alpha_0) = \sum_{j=1}^2 c_j(\mu) \alpha_0^j + o(|\mu \alpha_0|, |\alpha_0|^2)$$

Вектор-полином $T(\alpha)$ удовлетворяет соотношениям [4]

$$D_\alpha T(\alpha) A_0 \alpha = \mathcal{F}_0(\alpha) - N(\alpha)$$

из которых следует, что $c_1 = \rho_0 \mu + O(\mu^2)$, $c_2 = \rho_1 + O(\mu)$. Производя затем в (1.10) масштабные преобразования

$$a_0 = \frac{3 |\rho_0|}{2 |\rho_1|} \mu \beta_0(\zeta), \quad \alpha_1 = \frac{3 |\rho_0|}{2 |\rho_1|} \mu \nu \beta_1(\zeta), \quad \zeta = \nu \xi, \quad \nu = |\rho_0 \mu|^{1/2} \quad (1.11)$$

с точностью до членов второго порядка малости получим

$$\dot{\beta}_0 = \beta_1, \quad \dot{\beta}_1 = \operatorname{sgn} \mu (\operatorname{sgn} \rho_0 \beta_0 + \frac{3}{2} \operatorname{sgn} \rho_1 \beta_0^2) \quad (1.12)$$

Уравнения (1.12) имеют солитоноподобные решения следующих типов:

1) сверхкритические ($\mu > 0$) уединенные волны ($\operatorname{sgn} \rho_0 = 1$):

а) $\operatorname{sgn} \rho_1 = -1$ – уединенные волны возвышения: $\beta_0^* = \operatorname{ch}^{-2}(\zeta/2)$;

б) $\operatorname{sgn} \rho_1 = 1$ – уединенные волны типа «яма»: $\beta_0^* = -\operatorname{ch}^{-2}(\zeta/2)$

2) Докритические ($\mu < 0$) уединенные волны ($\operatorname{sgn} \rho_0 = -1$):

а) $\operatorname{sgn} \rho_1 = -1$ – уединенные волны типа «яма»;

б) $\operatorname{sgn} \rho_1 = 1$ – уединенные волны возвышения.

Для завершения доказательства теоремы 1 используется следующая лемма, доказательство которой приведено, например, в [1].

Лемма 1. Пусть $\mathbf{a}^* = \{\alpha_0^*, \alpha_1^*\}$, где α_0^*, α_1^* связаны с решением типа уединенных волн β_0^*, β_1^* системы (1.12) по формулам (1.11). Тогда для достаточно малых μ существует семейство уединенных волн $\mathbf{a} = \{a_0, a_1\}'$, удовлетворяющих полной системе (1.8). Кроме того, указанные решения полной системы мало отличаются от $\mathbf{a}^*$, а именно:

$$|\mathbf{a} - \mathbf{a}^*| \leq c_0 \mu^2 \exp(-\sigma |\zeta|)$$

где c_0 – некоторая постоянная, а $\sigma < 1$.

2. Существование обобщенных уединенных волн. Далее, вместо выполнения предположения 1 будем требовать, чтобы выполнялось

Предположение 1'. Существует номер i_0 ветви $\omega_{i_0}(k) = g_{i_0}(k)$ дисперсионного соотношения (1.2), такой, что порядок касания прямой ck ($c = c_{i_0}$) графика ветви $\omega_{i_0}(k)$ при $k = 0$ равен двум. Кроме того, прямая ck имеет при $k > 0$ ровно одно пересечение с графиком какой-либо ветви дисперсионного уравнения.

В силу обратимости системы при $k < 0$ будет также равно одно пересечение ck и одной из кривых $\omega_i(k)$ ($i = 1, \dots, n$).

Из предположения 1' немедленно следует, что центральная часть спектра матрицы A в (1.5) состоит из четырех собственных значений, лежащих на мнимой оси. Этими собственными значениями являются двукратный нуль и два ненулевых чисто мнимых собственных значения $\pm iq$. Решение $\mathbf{v}_0$ теперь представимо в форме

$$\mathbf{v}_0 = a_0 \phi_0 + a_1 \phi_1 + a_+ \phi_+ + a_- \phi_-, \quad \phi_- = \bar{\phi}_+, \quad a_- = \bar{a}_+$$

где ϕ_+ и ϕ_- – собственные векторы A , соответствующие мнимым собственным значениям $\pm iq$. Вектор-функция $\mathbf{v}_0$ в базисе $\phi_0, \phi_1, \phi_+, \phi_-$ имеет компоненты a_0, a_1, a_+ и a_- , а матрица имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iq \end{pmatrix}$$

Ясно, что собственные векторы ϕ_+ и ϕ_- всегда можно выбрать так, чтобы $R\phi_+ = \phi_-$. В самом деле домножая $A\phi_+ = iq\phi_+$ на R получим $AR\phi_+ = -iqR\phi_+$, откуда следует, что $R\phi_+ = a\phi_-$, где $a = \exp(i\theta)$. Если $\theta \neq 0$, то в качестве ϕ_+ выберем $\tilde{\phi}_+ = \exp(-i\theta/2)\phi_+$.

В этом разделе покажем, что при выполнении предположений 1', 2–5 система (1.1) имеет решения типа бегущих уединенных волн, быть может, с быстроосциллирующей незатухающей рябью, амплитуда которой гораздо меньше, чем амплитуда самой уединенной волны. Условия, при которых быстроосциллирующая рябь обязательно присутствует как составляющая обобщенной уединенной волны, в настоящее время неизвестны.

В силу предположения 4 матрица R_0 в базисе $\phi_0, \phi_1, \phi_+, \phi_-$ имеет вид

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что нормальная форма первой системы уравнений в (1.6) (которая в данном случае является системой четырех уравнений) имеет вид [2]

$$\dot{\alpha}_0 = \alpha_1, \quad \dot{z} = iqz + iz\Psi(\mu, \alpha_0, |z|^2) \quad (2.2)$$

$$\dot{\alpha}_1 = \Phi(\mu, \alpha_0, |z|^2), \quad \dot{\bar{z}} = -iq\bar{z} - i\bar{z}\Psi(\mu, \alpha_0, |z|^2)$$

где Φ и Ψ – вещественные полиномы произвольного порядка s :

$$\Phi = \sum_{i=1}^2 c_i(\mu)\alpha_0^i + d_2(\mu)|z|^2 + \dots, \quad \Psi = \gamma_0(\mu) + \gamma_1(\mu)\alpha_0 + \dots$$

$$c_1 = \rho_0\mu + O(\mu^2), \quad c_2 = \rho_1 + O(\mu)$$

Система (2.2) с точностью до $O(\mu^s)$ для любого s аппроксимирует первую систему из (1.6) в окрестности $v_0 = 0$ и имеет два первых интеграла: $|z|^2 = K$ и $\alpha_1^2 = \hat{\Phi} = H, \partial_{\alpha_0}\hat{\Phi} = 2\Phi$. Постоянные d_2, γ_0, γ_1 однозначно определяются из уравнений на полином T из разд. 1, где $\mathcal{F}_0$ имеет компоненты $f_1 = \langle \mathcal{F}_0, \psi_0 \rangle, f_2 = \langle \mathcal{F}_0, \psi_1 \rangle, f_3 = \langle \mathcal{F}_0, \psi_+ \rangle, f_4 = \langle \mathcal{F}_0, \psi_- \rangle$. Здесь $\langle, \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^m$, $\psi_1, \psi_+ = \bar{\psi}_-$ – собственные векторы, а ψ_0 – присоединенный вектор A^* . Уравнение (2.2) с точностью до членов $|\mu\alpha|, |\alpha|^2$ включительно имеет вид

$$\dot{\alpha}_0 = \alpha_1, \quad \dot{z} = iz(q + \gamma_0(\mu) + \gamma_2\alpha_0^2 + \gamma_3z\bar{z}) \quad (2.3)$$

$$\dot{\alpha}_1 = \rho_0\mu\alpha_0 + \rho_1\alpha_0^2; \quad \dot{\bar{z}} = -iz(q + \gamma_0(\mu) + \gamma_2\alpha_0^2 + \gamma_3z\bar{z})$$

Полагая в (2.3) $z = r \exp i\phi, K = 0$ и совершая масштабные преобразования (1.11) и $\phi = \phi(v\xi)/v$, из (2.3) получим

$$\partial_\xi^2 \beta_0 = \operatorname{sgn} \mu (\operatorname{sgn} \rho_0 \beta_0 + \frac{3}{2} \operatorname{sgn} \rho_1 \beta_0^2) + O(\mu) \quad (2.4)$$

$$\partial_\xi r = 0, \quad \partial_\xi \phi = q + O(\mu)$$

В нулевом приближении по μ система (2.4) имеет решения типа уединенных волн с $r = 0$, описанных в разд. 1. Очевидно, что уравнения (2.2) при $K = 0$ и любом порядке s полиномов Φ и Ψ будет по-прежнему иметь решения типа уединенных волн с $z = 0$,

приближаемых с точностью до μ^2 формулами, представленными в разд. 1. Несмотря на то, что решения типа уединенных волн сохраняются для системы, аппроксимирующей полную систему (1.6) с точностью до любого порядка по μ , в полной системе они могут не находиться. Для пояснения изложенного, сформулируем две леммы, доказанные для рассматриваемых типов нормальных форм [2].

Сначала рассмотрим постоянное решение системы (2.4) $\beta_0^* = 0$, $r^* = 0$, где $\beta_0^* = 0$ – седловая точка. Это решение будет также удовлетворять системе (2.2) для любого s и $K = 0$.

Лемма 2. Пусть $(\alpha_0^* = 0, \alpha_1^* = 0, z^* = 0)$ – решение системы (2.2), где Φ, Ψ – полиномы произвольного порядка s , тогда для любого достаточно малого μ существует единственное периодическое решение $\{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_+\}$ полной системы (первой системы в (1.6)). Кроме того, для некоторой постоянной $C = C(s)$

$$|\{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_+\}| \leq C|\mu|^{s-1}$$

равномерно по ξ . Аналогично

$$|\partial_\xi \varphi(\mu) - \partial_\xi \varphi^*| \leq C_1 |\mu|$$

причем $\varphi^* = q\xi$, как следует из (2.4).

Последняя лемма подразумевает, что при переходе к полной системе из нулевого решения может появиться периодическое решение со сколь угодно малой амплитудой.

Представим далее уединенные волны $\alpha_0^*, \alpha_1^*, z^* = 0$, описанные в разделе 1 в виде $\{\gamma^*, 0\}$, где $\gamma^* = \{\alpha_0^*, \alpha_1^*\}$. Пусть $(\tilde{\gamma}, \tilde{a}_+) = \{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_+\}$ – продолжение нулевого решения до решения полной системы (1.6). Тогда имеет место

Лемма 3. Для достаточно малых μ , существует решение $\{a_0, a_1, a_+\}$ первой системы в (1.6) типа обобщенной уединенной волны. Более того, если запишем

$$\{a_0, a_1, a_+\} = (\tilde{\gamma}, \tilde{a}_+) + (\underline{\gamma}, \delta \exp(i\varphi))$$

то верны оценки

$$|(\tilde{\gamma}, \tilde{a}_+)| \leq C|\mu|^{s-1}, \quad |\underline{\gamma} - \gamma^*| \leq C_1 \mu^2 \exp(-\sigma|\zeta|), \quad |\delta| \leq C_2 |\mu|^{s-1} \exp(-\sigma|\zeta|)$$

для любого s , $0 < \sigma < 1$ и некоторых постоянных C, C_1 и C_2 , причем C, C_2 зависят от s .

3. Уединенные и обобщенные уединенные волны в холодной плазме и в растяжимых стержнях. В качестве примера системы уравнений типа (1.1), подчиняющейся предположениям, сформулированным в разд. 2, рассмотрим уравнения, описывающие одномерные волновые движения в холодной квазинейтральной плазме [6]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\rho + 1)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{B_y^2 + 2 \sin \varphi B_y + B_z^2}{2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (\rho + 1)^{-1} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} = -R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left\{ (\rho + 1)^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - (\rho + 1)^{-1} B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} = R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left\{ (\rho + 1)^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_y}{\partial t} - B_x \frac{\partial v}{\partial x} + (B_y + \sin \varphi) \frac{\partial u}{\partial x} &= R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dw}{dt} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} - B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_z \frac{\partial u}{\partial x} &= -R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{dt} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{d}{dt} + u \frac{\partial}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

где зависимые и независимые переменные использованы в безразмерной форме. Здесь φ – угол наклона вектора невозмущенного магнитного поля к оси x , ρ – возмущение плотности частиц, B_y и B_z – соответствующие компоненты возмущенного магнитного поля, $B_x = \cos \varphi$, (u, v, w) – компоненты вектора скорости ионной жидкости, R_i и R_e – параметры дисперсии, характеризующие ларморовские частоты ионов и электронов.

Две ветви дисперсного соотношения для (3.1) имеют вид [6]

$$\begin{aligned}\omega_{\pm}(k) &= \frac{k}{2(1 + R_i^{-1} R_e^{-1} k^2)} \{X_{\pm} \pm X_{-}\} \\ X_{\pm} &= [(1 \pm \cos \varphi)^2 + \{Y \pm 2 \cos \varphi\} R_i^{-1} R_e^{-1} k^2]^{1/2} \\ Y &= (R_e R_i^{-1} + R_i R_e^{-1}) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

где $\omega_{+}(k)$ соответствует магнитозвуковой, а $\omega_{-}(k)$ – альфвеновской ветви. Скорость $c = \lim_{k \rightarrow 0} \omega_{+}/k = 1$ является фазовой скоростью бесконечно длинных магнитозвуковых волн.

Система (3.1) для бегущих волн $(\rho, u, v, w, B_y, B_z) = w(x - Vt)$ может быть представлена в виде (1.3), где

$$G(w) = \text{diag} \left(1, \frac{V-u}{V}, \frac{V-u}{V}, \frac{V-u}{V}, 1, 1 \right), \quad V = c + \mu$$

а выражения для L и f очевидным образом следуют из (1.1). Матрица G обратима в окрестности $w = 0$, и система, соответствующая системе (1.5), представима в разрешенном относительно старших производных по ξ виде

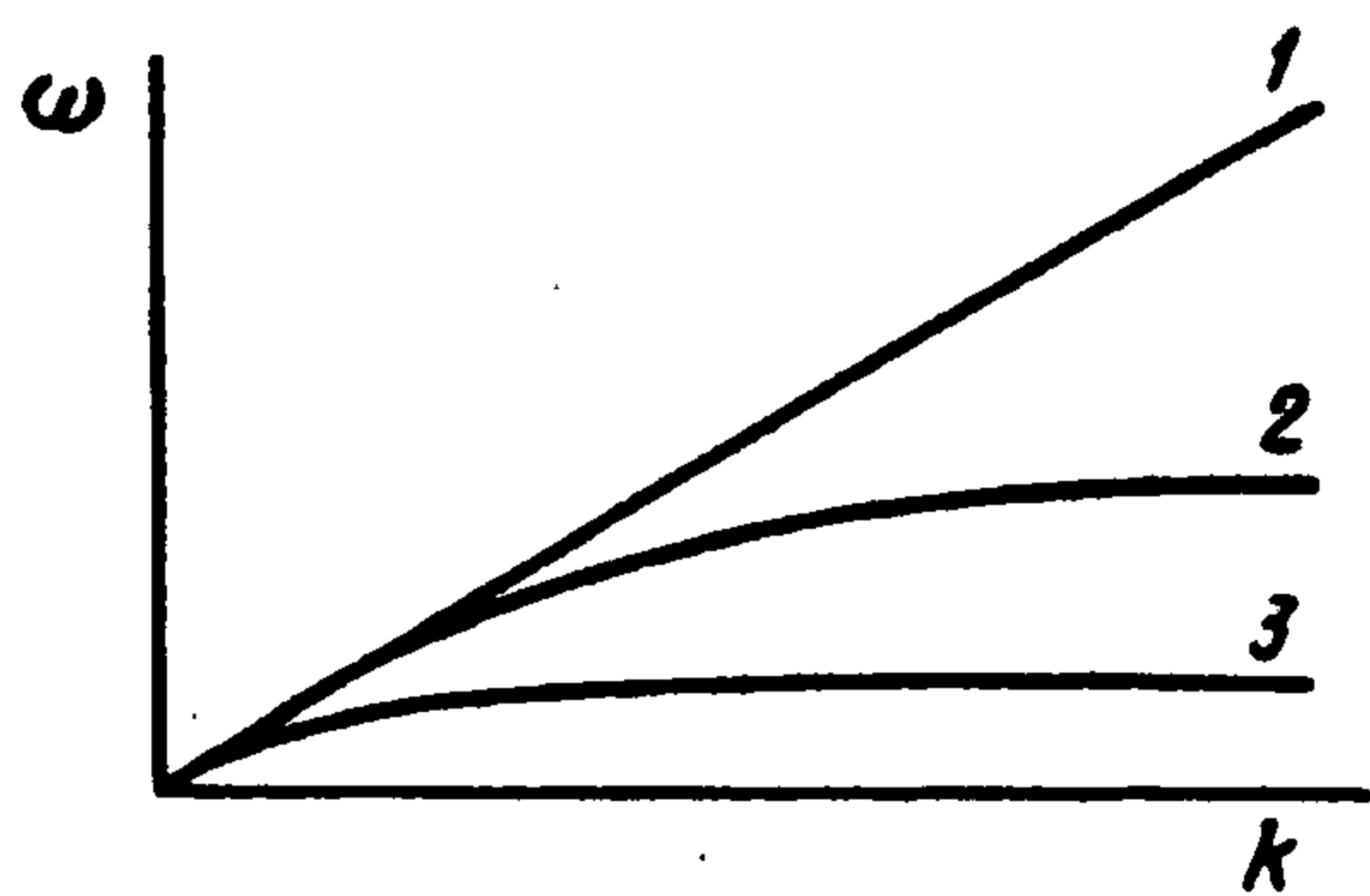
$$\begin{aligned}v &= -R_i B_z - \frac{R_i \cos \varphi}{V} (\rho + 1) w \\ \dot{w} &= \frac{R_i \cos \varphi}{V} (\rho + 1) v + R_i B_y - R_i \sin \varphi \rho \\ \dot{B}_y &= R_e (\rho + 1) w + \frac{R_e \cos \varphi}{V} (\rho + 1) B_z \\ \dot{B}_z &= -R_e (\rho + 1) v - \frac{R_e \cos \varphi}{V} (\rho + 1) B_y\end{aligned} \tag{3.2}$$

Величины u и ρ выражаются через $v = \{v, w, B_y, B_z\}^t$ алгебраически:

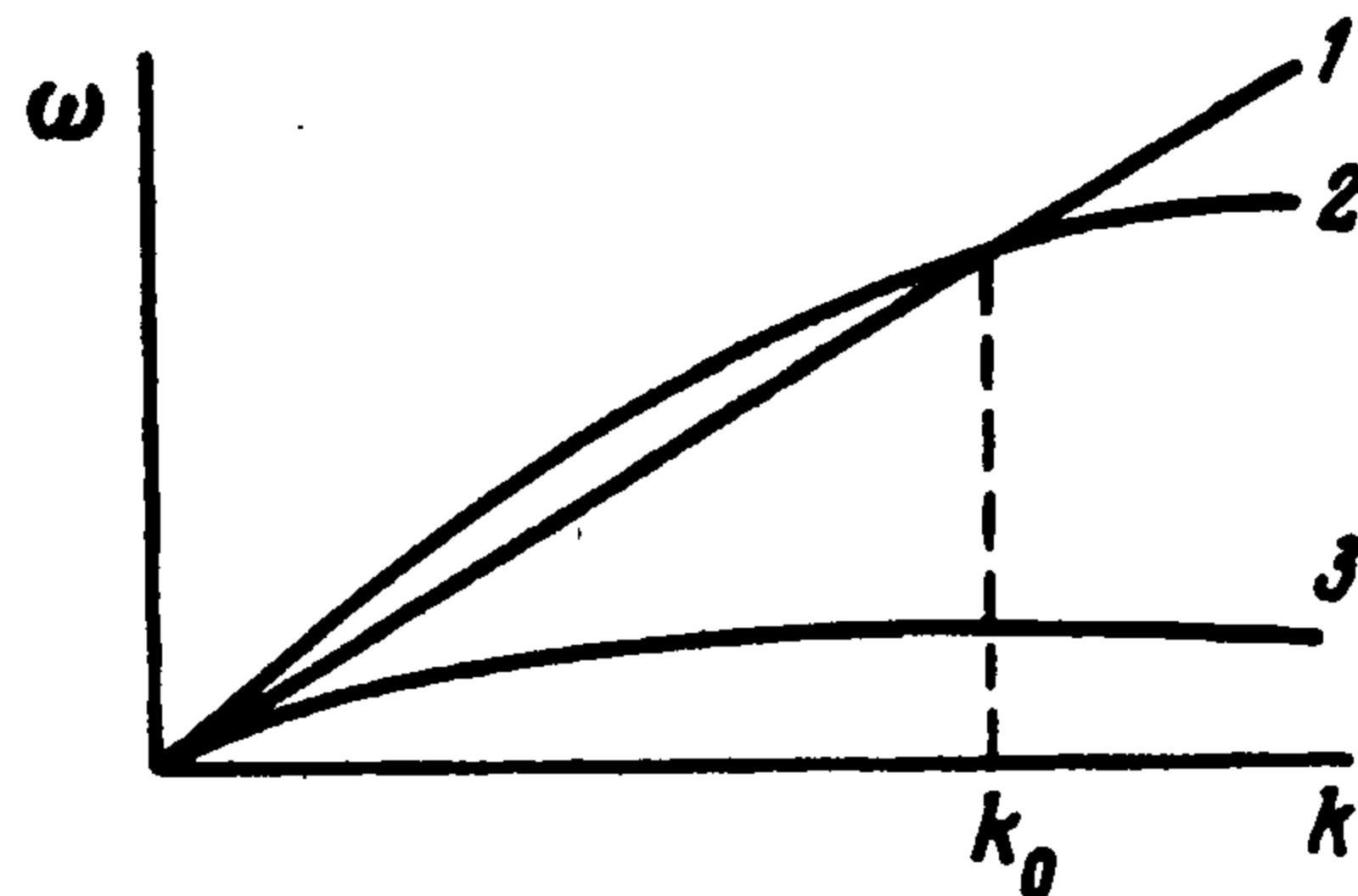
$$u = \frac{1}{2V} (B_y^2 + 2 \sin \varphi B_y + B_z^2), \quad \rho = \frac{u}{V - u}$$

Таким образом, очевидно, что система (4.1) удовлетворяет предположениям 2,3. Матрица инверсии для (3.2) дается формулой

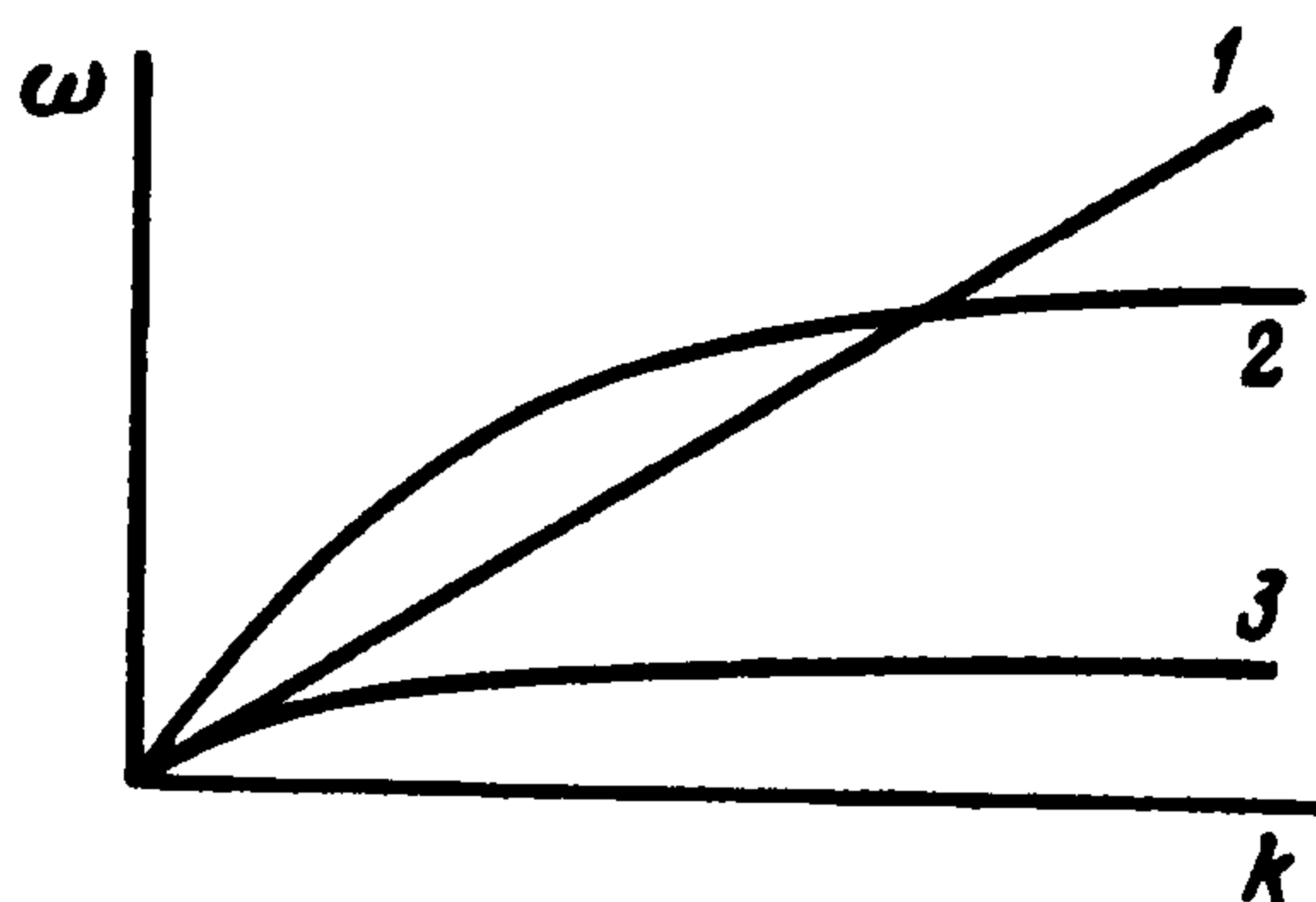
$$R = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В дальнейшем будем полагать, что $0 < \varphi \leq \pi/2$. Матрица A из (1.5) в данном случае имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -R_i \cos \varphi & 0 & -R_i \\ R_i \cos \varphi & 0 & R_i \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R_e & 0 & R_e \cos \varphi \\ -R_e & 0 & -R_e \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

Далее рассмотрим два случая качественно разного поведения дисперсионного соотношения уравнений (3.1)

Случай $\varphi > \varphi_c$, $\varphi_c = \arctg(\sqrt{R_e R_i^{-1}} - R_i R_e^{-1})$.

В этом случае предположение 1 выполняется для прямой $\omega = k$. Соответствующие графики магнитозвуковой и альфвеновской ветви представлены на фиг. 1, где изображено взаимное положение прямой $\omega = k$ и графика дисперсионного соотношения холодной плазмы. Кривая 3 соответствует альфвеновской ветви, кривая 2 – магнитозвуковой, а прямая 1 – графику $\omega = k$. Прямая 1 имеет касание второго порядка к кривой 2 при $k = 0$. В силу этого вековое уравнение для A имеет только один корень, расположенный на мнимой оси – нуль второго порядка. Собственный вектор ϕ_0 и присоединенный вектор ϕ_1 , соответствующие нулевому собственному значению, таковы:

$$\phi_0 = \begin{vmatrix} -\cos \varphi \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ R_e^{-1} - R_i^{-1} \cos^2 \varphi \\ 0 \\ (R_i^{-1} - R_e^{-1}) \cos \varphi \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Очевидно, $R\phi_0 = \phi_0$, и Предположение 4, таким образом, выполняется. Собственный вектор ψ_1 и присоединенный вектор ψ_0 матрица A^* имеют вид

$$\psi_0 = R_i^{-1} \Delta^{-1} \begin{pmatrix} (R_i^{-1} - R_e^{-1}) \cos \varphi \\ 0 \\ R_i R_e^{-1} (R_i^{-1} - R_e^{-1} \cos^2 \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_1 = R_i^{-1} \Delta^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ R_i R_e^{-1} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

что влечет за собой равенство (с точностью до членов третьего порядка малости)

$$f_2 = \langle \mathcal{F}, \psi_1 \rangle = \Delta^{-1} \left\{ \mu a_0 - \frac{3}{2} \sin \varphi a_0^2 - \frac{1}{2} (R_e^{-1} - R_i^{-1})^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi a_1^2 \right\} \quad (3.4)$$

где $\Delta = R_e^{-1} R_i^{-1} \cos^2 \varphi (\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi_c)$, а $\mathcal{F}$ с точностью до членов $O(|\mu v_0|, |v_0|^2)$ включительно имеет вид

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} R_i \cos \varphi \omega - R_i \cos \varphi \sin \varphi \omega B_y \\ -\frac{\mu}{2} R_i \cos \varphi \nu + \mu R_i \sin^2 \varphi B_y + \frac{R_i}{2} \sin 2\varphi \nu B_y - \frac{R_i}{2} \sin \varphi (B_y^2 + B_z^2) - R_i \sin^3 \varphi B_y \\ -\frac{\mu}{2} R_e \cos \varphi B_z + R_e \cos \varphi \sin \varphi B_y B_z + R_e \sin \varphi \omega B_y \\ \frac{\mu}{2} R_e \cos \varphi B_y - R_e \sin \varphi \nu B_y - R_e \cos \varphi \sin \varphi B_y^2 \end{pmatrix}$$

Из (3.4) следует справедливость предположения 5 с $\rho_0 = \Delta^{-1}$ и $\rho_1 = -\frac{3}{2} \sin \varphi \Delta^{-1}$.

Из результатов разд. 2, таким образом, вытекает существование семейства уединенных волн для достаточно малых $\mu = V - 1 > 0$. Эти уединенные волны будут волнами возвышения:

$$a_0 = \frac{\mu}{\sin \varphi \operatorname{ch}^2(|\mu|^{1/2} \Delta^{-1/2} \xi)} + O(\mu^2)$$

Случай $\operatorname{tg}^2 \varphi < \operatorname{tg}^2 \varphi_c$.

В этом случае дисперсионные кривые имеют вид, представленный на фиг. 2 и прямая $\omega = k$ удовлетворяет предположению 1'. Векторы ϕ_0 и ϕ_1 по-прежнему даются формулой (3.3), а

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} R_i q^{-1} (1 - R_i R_e^{-1} \cos^2 \varphi) \\ i R_i R_e^{-1} \cos \varphi \\ q^{-1} (R_i - R_e) \cos \varphi \\ -i \end{pmatrix}, \quad \phi_- = \bar{\phi}_+$$

На фиг. 2 изображено взаимное положение прямой $\omega = k$ и графика дисперсионного соотношения холодной плазмы для $\varphi < \varphi_c$ и $k > 0$. Прямая 1 кроме касания второго порядка в точке $k = 0$ к кривой 2, имеют дополнительное пересечение с этой кривой при $k_0 > 0$. Из результатов разд. 2 следует, что в данном случае существуют обобщенные уединенные волны типа "яма" (в рассматриваемом случае $\Delta < 0$ и $\mu < 0$) с

осцилляциями, амплитуда которых меньше $C|\mu|^s$ ($C(s)$ – некоторая постоянная) для любого s . При этом не исключена возможность, что амплитуда этих осцилляций равна нулю.

Далее обсудим пример, когда нарушается предположение 4. Рассмотрим систему (3.2) вблизи альфвеновской скорости $s = \cos \varphi$. Прямая sk в данном случае имеет касание второго порядка к графику альфвеновской ветви 3 дисперсионного соотношения и пересекает магнитозвуковую ветвь при $k > 0$ (фиг. 3), т.е. выполняется предположение 1'. Матрица A имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -R_i & 0 & -R_i \\ R_i & 0 & R_i(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) & 0 \\ 0 & R_e & 0 & R_e \\ -R_e & 0 & -R_e & 0 \end{vmatrix}$$

и ее собственные и присоединенный векторы даются формулами

$$\Phi_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{vmatrix} R_e^{-1}(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) - R_i^{-1} \\ 0 \\ R_i^{-1} - R_e^{-1} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Phi_+ = \begin{vmatrix} -1 \\ iq^{-1}[R_i - R_e(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)] \\ R_e R_i^{-1} \\ -iq^{-1}R_e(1 - R_i^{-1}R_e) \end{vmatrix}, \quad \Phi_- = \bar{\Phi}_+.$$

Легко видеть, что $R\Phi_0 = -\Phi_0$. Формально это означает, что уравнения (2.3) не могут быть получены, т.е. в полиномах Φ и Ψ допускается зависимость от α_1 , которая и имеет место в данном случае. В связи с изложенным решений типа обобщенных уединенных волн у аппроксимирующих уравнений нет. Это служит объяснением того, что попытки вывести нелинейное эволюционное уравнение (типа КдВ с кубичной нелинейностью) для длинных альфвеновских волн малой амплитуды не увенчались успехом [6]. Заметим, что уравнение КдВ в современную физику плазмы было введено Р.З. Сагдеевым в 1964 г. [7].

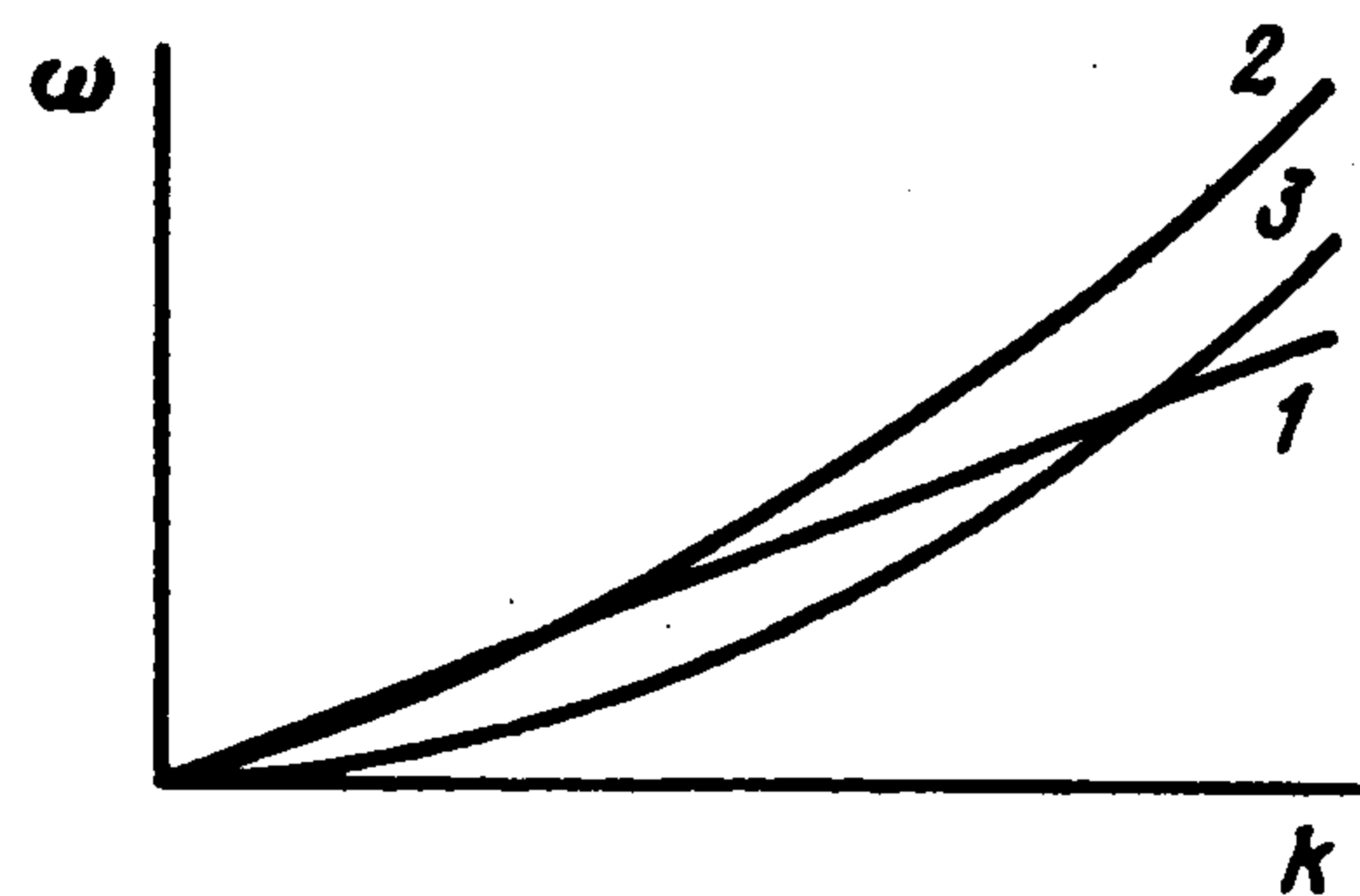
В заключение данного раздела рассмотрим распространение продольных волн в плоских растяжимых упругих стержнях. Предположим, что растяжение и изгиб стержня происходят в плоскости x_1x_2 и, что стержень в недеформированном состоянии совпадает с осью x_1 . Плотность энергии такого стержня складывается из плотностей кинетической энергии K , изгибной энергии B и энергии сжатия Π , где:

$$K = \frac{1}{2} \rho S x_i^i x_{it}, \quad B = \frac{1}{2} I E x_{ss}^i x_{iss}, \quad \Pi = \frac{1}{8} E (x_s^i x_{is} - 1)^2$$

Здесь ρ – плотность стержня, E – модуль Юнга материала, S – площадь поперечного сечения стержня, ρI – момент инерции поперечного сечения относительно оси про-

ходящей через центр инерции сечения и перпендикулярной плоскости x_1x_2 , s — длина дуги вдоль упругой линии стержня; индекс i принимает значения 1, 2, суммирование подразумевается по повторяющимся индексам ($x^i = x_i$) и индексы t и s обозначают дифференцирование по соответствующим переменным. После масштабного преобразования

$$x_i \rightarrow \sqrt{I}x_i, \quad t \rightarrow \sqrt{\frac{\rho SI}{E}}t, \quad s \rightarrow \sqrt{I}s$$



Фиг. 4

отношение лагранжиана системы к модулю Юнга E запишется в виде

$$\frac{1}{2} \int_{t_0-\infty}^t \int_{s_0-\infty}^s \{x_t^i x_{it} - x_{ss}^i x_{iss} - \frac{1}{4}(x_s^i x_{is} - 1)^2\} ds$$

В канонических переменных $x_s^i = \tau_\infty^i + \tau^i$, $x_t^i = v^i$, где τ_i — компоненты возмущений касательного вектора к упругой линии стержня, v_i — компоненты скорости точек упругой линии и $\tau_\infty^i = \delta_1^i$, система уравнений, описывающая распространение волн в стержне, является гамильтоновой и имеет вид

$$\tau_t^i = v_s^i, \quad i = 1, 2$$

$$v_{1t} = \frac{1}{2} \tau_{1s} - \tau_{1ss} + \frac{1}{4} \{3\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_1^3 + \tau_1 \tau_2^2\}_s \quad (3.5)$$

$$v_{2t} = -\tau_{2ss} + \frac{1}{4} \{2\tau_1 \tau_2 + \tau_1^2 \tau_2 + \tau_2^3\}_s$$

Дисперсионное уравнение системы уравнений (3.5)

$$(\omega^2 - k^4)(\omega^2 - \frac{1}{2}k^2 - k^4) = 0 \quad (3.6)$$

удовлетворяет предположению 1', дисперсионная кривая для $k > 0$ изображена на фиг. 4 (кривые 2 и 3, прямая 1 соответствует $\omega = 1/\sqrt{2k}$).

Положим далее, что $\xi = s - Vt$. Система уравнений (3.5), очевидно, удовлетворяет также предположениям 2, 3 с единичной матрицей $G(V, w)$, ($w = (\tau_i, v_i)^t$, $i = 1, 2$), и уравнения для бегущих волн в разрешенном относительно старших производных виде запишется в форме

$$\dot{\tau}_i = u_i, \quad i = 1, 2$$

$$\dot{u}_1 = -\mu \tau_1 + \frac{1}{4} (3\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_1^3 + \tau_1 \tau_2^2)$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{1}{2} \tau_2 - \mu \tau_2 + \frac{1}{4} (2\tau_1 \tau_2 + \tau_1^2 \tau_2 + \tau_2^3) \quad (\mu = V^3 - 1/2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$$

где точка означает дифференцирование по ξ , а собственные и присоединенный вектора матрицы A даются формулами

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Видно, что предположение 4 в рассматриваемом случае оказывается выполненным. Собственный вектор ψ_1 сопряженной матрицы A^* совпадает с ϕ_1 , а

$$\psi_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

и $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 3/4$, откуда следует выполнение предположения 5. В результате получим соотношение

$$\tau_1 = -2\mu ch^{-2} \frac{\sqrt{\mu}}{2} \xi + O(\mu^2), \quad \mu > 0$$

описывающее волны сжатия в стержне. В уравнении для a_+ функция f_3 (см. разд. 2) тождественно равна нулю. Это означает, что $a_+ = 0$, и следовательно, амплитуда периодической составляющей равна нулю (случай не общего положения) и сжатие стержня в данном случае не сопровождается изгибом.

4. Обсуждение результатов. Предположения 1–5 и 1' имеют конкретный смысл. Так, предположение 1 содержит условие того, что волна, имеющая фазовую скорость c_{i_0} , в линейном приближении не взаимодействует ни с какой другой волной (график ни одной ветви дисперсионного уравнения не пересекается с прямой $c_{i_0} k$). Предположение 1' содержит условие того, что в линейном приближении имеет место резонанс с периодической волной, отвечающей волновому числу k_0 , где происходит пересечение прямой $c_{i_0} k$ с одной из ветвей дисперсионного соотношения.

Решение полной задачи запишется тогда в виде

$$v = a_0^* \phi_0 + a_1^* \phi_1 + a_+^* \phi_+ + a_-^* \phi_- + O(\mu^2)$$

где $\phi_0, \phi_+ = \bar{\phi}_-$ – собственные векторы, ϕ_1 – присоединенный вектор матрицы A из (1.5), соответствующие центральному спектру A , а

$$a_0^* = \pm \frac{3}{2} \mu \frac{|\rho_0|}{|\rho_1|} ch^{-2} \frac{|\rho_0 \mu|^{1/2}}{2} \xi + O(\mu^2 \exp(-\sigma \frac{|\rho_0 \mu|^{1/2}}{2} \xi)), \quad 0 < \sigma < 1$$

(выбор знака плюс или минус в последней формуле зависит от знака ρ_0, ρ_1 и μ , как объяснено в разд. 1), причем

$$a_1^* = \frac{\partial}{\partial \xi} a_0^* + O(\mu^s), \quad a_+^* + a_-^* = r \cos(q\xi + \delta) + o(r), \quad r = O(\mu^s)$$

для любого s . Фаза δ -ограниченная функция и $\delta(\infty) - \delta(-\infty) \neq 0$ [2], что свидетельствует о существовании сдвига фаз в периодической компоненте решения. Условия строгого неравенства нулю функции r неизвестны. Более того, имеются примеры, когда при выполнении предположения 1' как $r \neq 0$, так и $r = 0$.

1°. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0$$

описывающее, в частности, длинные поверхностные волны малой амплитуды в жидкости с поверхностными эффектами [8–10]. Для рассматриваемого уравнения выполняется предположение 1'. Для $\mu = V - c > 0$ имеют место обобщенные уединенные волны с периодической рябью ненулевой экспоненциально малой амплитуды [11]. Кроме того, известно строгое доказательство факта отсутствия решений типа уединенных волн с рябью нулевой амплитуды для рассматриваемого диапазона скоростей.

2°. Известное уравнение Хироты – Ито

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \left(6u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + b \left(45u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 15u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 15 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right) = 0$$

также подчиняющееся предположению 1' при $a > 0$ и $b > 0$, дает пример, когда существуют настоящие уединенные волны при $V > 0$, что означает отсутствие периодической составляющей.

Предположения 2, 3, 5 имеют общий характер и относятся к структуре уравнений (1.1). Предположение 4 связано с сохранением обратимости в следующем смысле. Наличие обратимости в системе (1.5) означает ожидание существования обратимых решений $v(\xi)$, часть компонент которых – четные функции, а часть – нечетные. Формально это влечет существование диагональной матрицы R (инверсии) с компонентами ± 1 на диагонали, такой, что выполняется равенство

$$Rv(-\xi) = v(\xi) \quad (4.1)$$

Вспомним, что для малых решений $v = v_0 + v_h$ функция $v_h = h(\mu, v_0)$ обладает соответствующими наследственными симметриями, так что для существования обратимых решений достаточно указать решение системы (1.6) v_0 , удовлетворяющее равенству (4.1).

В соответствии с предположением 4 из (4.1) следует равенство

$$\begin{aligned} Rv_0(-\xi) &= a_0(-\xi)R\phi_0 + a_1(-\xi)R\phi_1 + a_+(-\xi)R\phi_+ + a_-(-\xi)R\phi_- = \\ &= a_0(-\xi)\phi_0 - a_1(-\xi)\phi_1 + a_+(-\xi)\phi_- + a_-(-\xi)\phi_+ = \\ &= v_0(\xi) = a_0(\xi)\phi_0 + a_1(\xi)\phi_1 + a_+(\xi)\phi_+ + a_-(\xi)\phi_- \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что a_0 – четная функция, a_1 – нечетная, a_+ и a_- имеют четную вещественную часть и нечетную мнимую (указанных свойств a_+ и a_- можно всегда добиться, как уже упоминалось, соответствующим выбором векторов $\phi_{\pm}$). Эти свойства коэффициентов a_0, a_1, a_+, a_- , очевидно, необходимы для существования четных решений, каковыми являются рассматриваемые уединенные и обобщенные уединенные волны.

Автор благодарит А.Г. Куликовского за обсуждение и поддержку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17355) и Международного научного фонда (MDM000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Il'ichev A.T.* Existence of solitary waves in dispersive media // *Physics of Vibrations*. 1995. V. 59. № 2. P. 98–108.
2. *Iooss G., Kirchgässner K.* Water waves for small surface tension: an approach via normal form // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*. 1992. V. 122A. № 3/4. P. 267–299.
3. *Плисс В.А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // *Изв. АН СССР. Сер. Мат.* 1964. Т. 28. № 6. С. 1297–1324.
4. *Iooss G., Adelmeyer M.* Topics in bifurcation theory and applications // River Edge: World Scient. publ. 1992, 160с.
5. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // *Итоги науки и техн. Сов. пробл. матем. Фундам. направления*. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 1. С. 7–149.
6. *Kakutani T., Ono H.* Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // *J. Phys. Soc. Japan* 1969. V. 26. № 5. P. 1305–1318.
7. *Сагдеев Р.З.* Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // *Вопросы теории плазмы*. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20–80.
8. *Марченко А.В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // *ПММ*. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 230–234.
9. *Hunter J.K., Scheurle J.* Existence of perturbed solitary wave solutions to a model equation for water waves // *Physica D*. 1988. V. 32. № 2. P. 253–268.
10. *Il'ichev A.T., Semenov A.Au.* Stability of solitary waves in dispersive media described by a fifth-order evolution equation // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*. 1992. V. 3. № 6. P. 307–326.
11. *Pomeau Y., Ramani A., Grammaticos B.* Structural stability of the Korteweg-de Vries solitons under a singular perturbation // *Physica D*. 1988. V. 31. № 1. P. 127–134.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1995