

УДК 532.5

© 1997 г. В.Ф. Пивень

ТЕОРИЯ ДВУМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ИЗМЕНЕНИЯ ИХ ПРОВОДИМОСТЕЙ

Развивается теория функций, определяемых каноническими уравнениями двумерных процессов в неоднородных слоях со степенным законом изменения их проводимостей, для которых получены фундаментальные решения и на их основе системы функций. Введенный и исследованный класс функций обладает наряду с общими [1–3] характерными только для него свойствами, которые изучены. Развитая теория позволяет решать в конечном виде граничные задачи, что реализовано в рассмотренных задачах сопряжения для протекающих в неоднородных слоях двумерных процессов различной физической природы.

1. Рассмотрим двумерные стационарные процессы в неоднородном слое толщины h , расположенном на плоскости, где выбраны декартовы оси координат ξ, η . Эти процессы описывают квазипотенциал скорости φ и функция тока ψ , которые удовлетворяют представленной в безразмерном виде системе уравнений [4]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad P = P(\xi, \eta) > 0 \quad (1.1)$$

где $P = kh$ – проводимость слоя, k – его коэффициент проницаемости.

Вводя комплексный потенциал

$$W = \varphi + i\psi/P \quad (1.2)$$

уравнения (1.1) запишем в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ следующим образом [5]:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + A(\zeta, \bar{\zeta})(W - \bar{W}) = 0 \quad (1.3)$$

$$A(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \ln \sqrt{P(\zeta, \bar{\zeta})} \left(2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right).$$

Уравнение (1.3) ковариантно относительно определенных преобразований комплексного потенциала W . Имеет место преобразование

$$W_1 = -iPW \quad (\varphi_1 = \psi, \quad \psi_1 = -\varphi) \quad (1.4)$$

которое связывает комплексные потенциалы (1.2) и $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1/P$ одного и того же процесса в сопряженных [6] слоях проводимостей P и $P_1 = 1/P$. Равенство (1.4) позволяет на основе изученных процессов в некотором слое исследовать те же процессы в сопряженном ему слое.

Рассмотрим слой со степенным законом изменения проводимости:

$$P = f^s(\xi, \eta), \quad s > 0 \quad (1.5)$$

($f(\xi, \eta)$ – гармоническая функция координат), для которых уравнение (1.3) приводится к каноническому виду. Воспользуемся конформной ковариантностью уравнения (1.3) и выберем связывающие плоскости $z = x + iy$ и ζ конформное преобразование $z = F(\zeta)$ ($y = \text{Im} F(\zeta) = f(\xi, \eta)$). При этом преобразовании граница $f(\xi, \eta) = 0$ области процесса в плоскости ζ перейдет в прямую $y = 0$. Процесс будет происходить в полуплоскости $z (\text{Im} z > 0)$ и описываться в ней следующим из (1.3) каноническим уравнением

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} - \frac{s(W - \bar{W})}{2(z - \bar{z})} = 0 \quad \left(2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.6)$$

Таким образом, изучение процессов в слое проводимости (1.5), а также согласно (1.4) в сопряженном ему слое ($s < 0$) сводится к нахождению решений уравнения (1.6).

Уравнение (1.6) есть комплексное представление канонической системы уравнений, следующей из (1.1) при $\xi = x$, $\eta = y$ и $P = y^s$. Оно описывает двумерные процессы в слое проводимости $P = y^s$ (в частности, при $s = 1$ пространственные осесимметричные процессы). Этот слой имеет особую линию $y = 0$ (ось x), на которой $P = 0$, и, следовательно, уравнение (1.6) вырождается.

При $s = 0$ уравнение (1.6) принимает вид уравнения Коши – Римана: $\partial W / \partial z = 0$, которому удовлетворяют аналитические функции, описывающие плоскопараллельные процессы в однородных слоях ($P = 1$). Следовательно, аналитические функции являются частным случаем (при $s = 0$) функций $W(z)$, удовлетворяющих уравнению (1.6).

Уравнение (1.6) является частным случаем общего вида уравнения [1], коэффициенты которого принадлежат в области D их определения множеству $L_p(D)$ функций, суммируемых со степенью $p > 2$. Коэффициенты $\pm s(z - \bar{z})^{-1/2}$ уравнения (1.6) можно отнести к множеству $L_p(D)$, $p > 2$ лишь в тех областях D полуплоскости $\text{Im} z \geq 0$, которые не содержат точек особой линии $y = 0$. В эти области на решения $W(z)$ уравнения (1.6) распространяемы указанные ранее [1] свойства функций, удовлетворяющих общего вида уравнениям. Однако решения уравнения (1.6) обладают рядом присущих только им свойств, обусловленных наличием особой линии $y = 0$.

2. Одним из таких свойств является преобразование инверсии функции $W(z)$ относительно полуокружности (сферы при $s = 1$) радиуса a , проведенной из начала координат. Это преобразование состоит в следующем: если функция $W_0(z)$ удовлетворяет уравнению (1.6), то его же решением будет функция

$$W(z) = \left(\frac{a}{|z|} \right)^s \left\{ \overline{W_0 \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right)} - \frac{s}{2} \int_p^1 \tau^{\sigma s - 1} \left[W_0 \left(\frac{a^2 \tau}{\bar{z}} \right) + (2\sigma - 1) \overline{W_0 \left(\frac{a^2 \tau}{\bar{z}} \right)} \right] d\tau \right\} \quad (2.1)$$

где значения p и σ определяются видом $W_0(z)$. Именно, если особые точки функции $W_0(z)$ лежат в области $D_1 (|z| > a)$ и $|W_0(z)| = O(|z|^{\mu_1})$ при $|z| \rightarrow 0$, то $p = 0$, $\sigma s = \mu - \mu_1$; если ее особые точки лежат в области $D_2 (|z| < a)$ и $|W_0(z)| = O(|z|^{-\mu_2})$ при $|z| \rightarrow \infty$, то $p = \infty$, $\sigma s = \mu_2 - \mu$, $\mu = \text{const} > 0$. Если функция $W_0(z)$ имеет особые точки в области D_1 (или D_2), то особые точки функции $W(z)$ будут в области D_2 (или D_1).

Находя согласно (1.2) и (2.1) функции ϕ , ψ , убеждаемся, что они удовлетворяют уравнениям (1.1) при $\xi = x$, $\eta = y$ и $P = y^s$, $s > 0$. Следовательно, (2.1) – решение уравнения (1.6).

Из (2.1) следуют, в частности, преобразования инверсии функции $W(z)$ относительно сферы (при $s = 1$) [7] и окружности (при $s = 0$): $W(z) = \overline{W_0(a^2 / \bar{z})}$, характерное для аналитических функций.

Для функции $W(z)$, однозначной и непрерывной вместе с частными производными по x и y в области D полуплоскости $\text{Im} z \geq 0$ введем [3, 4] операции дифференцирования и интегрирования. Определим Σ -производную $W_\Sigma \equiv d_\Sigma W / dz$ так, чтобы она всюду в области D удовлетворяла уравнению (1.6), т.е.

$$W_\Sigma \equiv \frac{d_\Sigma W}{dz} = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{s(W - \bar{W})}{2(z - \bar{z})} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{y^s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

(Σ -интеграл от $W(z)$ вдоль кусочно-гладкого контура $C \in D$), введем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_C W(\zeta) d_\Sigma \zeta &= \frac{1}{2} \int_C \left[1 + \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{z - \bar{z}} \right)^s \right] W(\zeta) d\zeta + \left[1 - \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{z - \bar{z}} \right)^s \right] \overline{W(\zeta)} d\bar{\zeta} = \\ &= \int_C \varphi(\xi, \eta) d\xi - \psi(\xi, \eta) \eta^{-s} d\eta + iy^{-s} \int_C \psi(\xi, \eta) d\xi + \varphi(\xi, \eta) \eta^s d\eta \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ – переменная интегрирования, $z, \zeta \in D$.

Не зависящий от выбора контура C , положения его начальной z_0 и конечной z точек Σ – интеграл (2.3) определяет функцию $W^*(z)$ согласно равенству

$$\int_{z_0}^z W(\zeta) d_\Sigma \zeta = W^*(z) - W_0^*, \quad W_0^* = \varphi^*(z_0) + i \left(\frac{2i}{z - \bar{z}} \right)^s \psi^*(z_0) \quad (2.4)$$

(W_0^* – обобщенная комплексная постоянная), которое является аналогом формулы Ньютона – Лейбница для аналитических функций. При этом $W^*(z)$ – первообразная функции $W(z)$: $W_\Sigma^*(z) = W(z)$.

Если контур C замкнут (точки z_0 и z этого контура совпадают) и он целиком лежит в односвязной области D , то из (2.4) имеем равенство

$$\int_C W(\zeta) d_\Sigma \zeta = 0 \quad (2.5)$$

которое представляет собой обобщение на случай функций $W(z)$ теоремы Коши для аналитических функций.

Σ -производной (2.2) и Σ -интегралу (2.3) можно придать определенный физический смысл, например, в случае двумерного течения жидкости в слое проницаемости $k = 1$ и толщины $h = y^s$, $s > 0$. Именно, Σ -производная от комплексного потенциала W течения равна его комплексно-сопряженной скорости $\bar{V} = v_x - i v_y$ (v_x и v_y – проекции скорости на оси x и y): $W_\Sigma = \bar{V}$; Σ – интеграл от $\bar{V}$:

$$\int_C V(\zeta) d_\Sigma \zeta = \Gamma + iy^{-s} \Pi \quad (2.6)$$

определяет циркуляцию Γ и поток Π вектора скорости жидкости, вычисленных для контура C . Тогда формула (2.4) для скорости $\bar{V}^*(z)$ течения позволяет находить его комплексный потенциал $W^*(z)$ который определяется циркуляцией Γ и потоком Π , вычисленных для контура C , соединяющего точки z_0 и z . Формулируя обобщенную теорему Коши для скорости $\bar{V}(z)$ течения, можно согласно (2.5), (2.6) утверждать, что

она выражает потенциальность течения ($\Gamma = 0$) и отсутствие объемного расхода жидкости ($\Pi = 0$) в односвязной области, где нет вихрей и источников (стоков).

Отметим, что операции Σ -дифференцирования (2.2) и Σ -интегрирования (2.3) функции $W(z)$ распространяемы на области, включающие особую линию $y = 0$, на которой представляют собой дифференцирование и интегрирование функции $\varphi = \operatorname{Re} W(z)$ по переменной x . Скорость процесса на особой линии направлена вдоль нее ($v_y = 0$), и она является линией тока.

3. Для построения теории функций $W(z)$ принципиальное значение имеют так называемые [2] правильные фундаментальные решения уравнения (1.6)

$$F_k(z, z_0) = \Phi_k(z, z_0) + i \left(\frac{2i}{z - \bar{z}_0} \right)^s \Psi_k(z, z_0), \quad k = 1, 2 \quad (3.1)$$

Функции $\Phi_k(z, z_0)$ и $\Psi_k(z, z_0)$ по переменной z удовлетворяют уравнениям (1.1), записанным относительно x, y для $P = y^s, s > 0$.

Используя известные результаты [8], находим

$$\Phi_1(z, z_0) = -(yy_0)^{-s/2} Q_{s/2-1}(1+2\varepsilon), \quad \Psi_1(z, z_0) = \int y^s \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dy - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} dx \right) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon = \frac{R^2}{4yy_0}, \quad R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$Q_{s/2-1}$ – функция Лежандра второго рода.

Воспользуемся формулой перехода [6], связывающей функцию тока ψ_s и потенциал скорости φ_{s+2} в слое проводимости $P = y^s$ с показателями s и $s+2$, которую запишем следующим образом:

$$\psi_s = -(yy_0)^{s+1} \varphi_{s+2} \quad (3.3)$$

В качестве φ_{s+2} возьмем из (3.2) функцию $\Phi_1(z, z_0)$, в которой заменим s на $s+2$. Тогда согласно (3.3) и уравнениям (1.1) в координатах x, y , имеем

$$\Psi_2(z, z_0) = (yy_0)^{s/2} Q_{s/2}(1+2\varepsilon), \quad \Phi_2(z, z_0) = \int y^{-s} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} dx - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} dy \right) \quad (3.4)$$

Отметим, что для $\Psi_2(z, z_0)$ было получено [8] интегральное представление через функции Бесселя, которое пригодно только при $x \geq 0$.

Решениям (3.1), (3.2), (3.4) можно придать определенный смысл для течений в слое постоянной проницаемости $k = 1$ и толщины $h = y^s, s > 0$. Именно этим решениям соответствуют комплексные потенциалы

$$W = \alpha F_1(z, z_0) \quad (3.5)$$

$$W = \beta \left(\frac{2i}{z_0 - \bar{z}_0} \right)^s F_2(z, z_0) \quad (3.6)$$

где α, β – вещественные постоянные. Учитывая, что функция Лежандра $Q_v(1+2\varepsilon)$ имеет в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ согласно разложению (3.9(7)) [9] изолированную особенность логарифмического типа, следуя известному подходу [6], вычислим поток и циркуляцию вектора скорости жидкости. Находим $\alpha = \Pi/(2\pi)$ и $\beta = \Gamma'/(2\pi)$. Следовательно, комплексные потенциалы (3.5) и (3.6) описывают точечный источник (или сток) полной мощности $\Pi > 0$ (или $\Pi < 0$) и вихрь суммарной интенсивности Γ' , направленной против ($\Gamma' > 0$) либо по ($\Gamma' < 0$) часовой стрелке.

Используя фундаментальные решения $F_k(z, z_0)$ ($k = 1, 2$), получим системы решений уравнения (1.6). На основании (3.5) и (3.6) имеем решение

$$L(\alpha, \beta, z, z_0) = \alpha F_1(z, z_0) - \beta \left(\frac{2i}{z_0 - \bar{z}_0} \right)^s F_2(z, z_0) \quad (3.7)$$

которое в гидродинамике слоев толщины $h = y^s$, $s > 0$ можно трактовать как комплексный потенциал вихреисточника. Выполняя n – кратное Σ – дифференцирование (3.7), находим решения в виде отрицательных формальных степеней:

$$Z^{(-n)}(\alpha, \beta, z, z_0) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d_{\Sigma}^n}{dz^n} L(\alpha, \beta, z, z_0) \quad (3.8)$$

которые имеют в точке z_0 полюсы порядка n (здесь и далее, если не оговорено противное, $n = 1, 2, 3, \dots$). Тогда комплексные потенциалы W_n , описывающие мультиполи порядка $2n$ с моментами M_n , будут

$$W_n = \frac{M_n}{2\pi} (-1)^{n-1} (n-1)! Z^{(-n)}(\alpha, \beta, z, z_0) \quad (3.9)$$

В частности, из (3.7)–(3.9) при $n = 1$ и $\alpha = \cos \theta_1$, $\beta = \sin \theta_1$ следует комплексный потенциал диполя с моментом M_1 , направленным под углом θ_1 к оси x :

$$W_1 = \frac{M_1 s (yy_0)^{-s/2}}{2\pi R_1^2} \left\{ e^{i\theta_1} (Q_{s/2-1} - Q_{s/2}) \left[\frac{2yy_0(x - x_0 - i(y - y_0))}{R^2} + iy_0 \right] + \right. \\ \left. + (Q_{s/2-1} \cos \theta_1 - iQ_{s/2} \sin \theta_1) [x - x_0 - i(y + y_0)] \right\} \quad (3.10)$$

$$R_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}, \quad Q_v = Q_v(1 + 2\varepsilon)$$

Рассмотрим частный случай, когда мультиполи располагаются в начале координат ($z_0 = 0$). Записывая согласно формуле (3.9.1 (21)) [9] асимптотическое при $|z_0| \rightarrow 0$ разложение функции Лежандра $Q_{s/2-1}(1 + 2\varepsilon)$, в пределе имеем

$$\Phi_1(z, 0) = -\frac{r^{-s}}{k(s)}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad k(s) = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right]^{-1}$$

Тогда, полагая в (3.7) $\alpha = k(s)/n$, $\beta = 0$, из (3.8) находим

$$Z^{(-n)}(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} r^{-s} + isy \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} r^{-s-2} \right] \quad (3.11)$$

После преобразований и введения многочленов Гегенбауэра $C_n^\lambda(\cos \theta)$ (θ – угол полярной системы координат) с использованием для них производящей функции (10.10 (29)) [10] степени (3.11) запишем в виде

$$Z^{(-n)}(z) = r^{-n-s} \left[C_n^{s/2}(\cos \theta) - i \frac{s \sin \theta}{n} C_{n-1}^{s/2+1}(\cos \theta) \right] \quad (3.12)$$

Следуя [3, 7], назовем положительной формальной степенью $Z^{(n)}(\alpha, \beta, z, z_0)$ комплексный потенциал W_n , получающийся n -кратным Σ -интегрированием от z_0 до z обобщенной комплексной постоянной $\alpha + i\beta[2i/(z - \bar{z})]^s$ и умножением на $n!$, т.е.

$$Z^{(0)}(\alpha, \beta, z, z_0) = \alpha + i\beta \left(\frac{2i}{z - \bar{z}} \right)^s, \quad Z^{(n)}(\alpha, \beta, z, z_0) = n \int_{z_0}^z Z^{(n-1)}(\alpha, \beta, \zeta, z_0) d_\Sigma \zeta \quad (3.13)$$

Степени (3.13) имеют при $z = z_0$ нули порядка n , а в бесконечности — полюсы того же порядка. При $s = 0$ они принимают вид аналитических функций $(\alpha + i\beta)(z - z_0)^n$. Поэтому по аналогии с плоскопараллельным случаем ($s = 0$) эти степени можно рассматривать как комплексные потенциалы мультиполей порядка $2n$, расположенных в бесконечности.

Вид степеней (3.13) определяется выбором α , β и z_0 . В частности, при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $z_0 = 0$ они записываются наиболее просто

$$Z^{(0)}(z) = 1, \quad Z^{(n)}(z) = r^n \left[C_n^{s/2}(\cos \theta) + \frac{s \sin \theta}{n + s} C_{n-1}^{s/2+1}(\cos \theta) \right] \quad (3.14)$$

Заметим, что степени (3.12) и (3.14) связаны между собой преобразованием инверсии (2.1).

Из (3.8) и (3.13) следуют, в частности, при $s = 1$ известные [5, 11] решения уравнения (1.6).

Полученные системы функций в виде степеней $Z^{(\pm n)}(\alpha, \beta, z, z_0)$ позволяют развить ряд методов решения граничных задач процессов, описываемых уравнениями (1.1).

4. Один из методов опирается на обобщение известного для аналитических функций интеграла Коши. Используя вторую формулу Грина для записанных в координатах x, y при $P = y^s$, $s > 0$ уравнений (1.1), на основании решений (3.2), (3.4) по аналогии с подходом, примененном ранее [7], находим обобщенную формулу Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \Omega_{\pm}(z, \zeta) W(\zeta) d\zeta - \Omega_{\pm}(z, \zeta) \overline{W(\zeta)} d\bar{\zeta} = \begin{cases} W(z), & z \in D \\ 0, & z \notin D \end{cases} \quad (4.1)$$

которая определяет функцию $W(z)$ по ее значению на границе C области D . Интеграл в формуле (4.1) есть обобщенный интеграл Коши. Его ядра $\Omega_{\pm}(z, \zeta)$ выражаются через нормированные ($M_1 = 2\pi$) комплексные потенциалы w_1 и w'_1 диполей (3.10) с моментами вдоль ($\theta_1 = 0$) и перпендикулярно ($\theta_1 = \pi/2$) оси x :

$$\Omega_{\pm}(z, \zeta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2i} \right)^s (w_1 \pm iw'_1)$$

и имеют вид

$$\Omega_{\pm}(z, \zeta) = \frac{s}{2} \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{z - \bar{z}} \right)^{s/2} \frac{Q_{s/2-1} \pm Q_{s/2}}{z - \zeta_{\pm}}, \quad \zeta_+ = \bar{\zeta}, \quad \zeta_- = \zeta \quad (4.2)$$

$$Q_v = Q_v(1 + 2\varepsilon), \quad \varepsilon = -\frac{(z - \bar{\zeta})(\bar{z} - \bar{\zeta})}{(z - \bar{z})(\zeta - \bar{\zeta})}$$

Из (4.2) при $s = 1$ следуют выражения ядер, полученные ранее [7, 11]. При $s = 0$ имеем $\Omega_{\pm}(z, \zeta) = \pm(z - \zeta_{\pm})^{-1}$, и формула (4.1) сводится к формуле Коши для аналитической функции в области D , симметричной относительно оси x .

Заменяя в (4.1) $W(\zeta)$ на непрерывную вдоль линии C функцию $f(\zeta)$, получаем обобщенный интеграл типа Коши, который определяет в области D функцию $W(z)$, удовлетворяющую уравнению (1.6).

5. Другой метод решения граничных задач состоит в разложении функции $W(z)$ в ряды по формальным степеням, что оказывается возможным для решений уравнений вида (1.6) [1, 3].

Функцию $W(z)$ в круге радиуса a можно представить обобщенным рядом Тейлора по степеням (3.13), т.е.

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(\alpha_n, \beta_n, z, z_0), \quad |z - z_0| < a \quad (5.1)$$

Вещественные коэффициенты α_n, β_n определяются из равенств

$$\alpha_0 + i\beta_0 \left(\frac{2i}{z_0 - \bar{z}_0} \right)^s = W(z_0), \quad n! \left[\alpha_n + i\beta_n \left(\frac{2i}{z_0 - \bar{z}_0} \right)^s \right] = W_{\Sigma}^{[n]}(z)|_{z=z_0}$$

получающихся n -кратным Σ – дифференцированием этого ряда.

В кольце $a_1 < |z - z_0| < a_2$ функция $W(z)$ представима в виде обобщенного ряда Лорана по степеням (3.8) и (3.13):

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(\alpha_n, \beta_n, z, z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} Z^{(-n)}(\alpha_{-n}, \beta_{-n}, z, z_0)$$

После введения вычета функции $W(z)$ как Σ – интеграл (2.3), деленный на $2\pi i$, формулируется и доказывается основная теорема о вычетах этой функции аналогично случаю $s = 1$ [7].

Отметим, что для функций $W(z)$ имеют место аналог формул Сохоцкого, теорема об аналитическом продолжении, принцип зеркального отображения и другие свойства класса функций [1, 2], к которому относятся $W(z)$.

Таким образом, изложенные выше основы теории функций $W(z)$ являются полным аналогом принципиальных положений аналитических функций, причем аналитические функции – частный случай (при $s = 0$) функций $W(z)$. Эта теория позволяет решать в конечном виде граничные задачи для двумерных процессов.

6. Применим разложение в обобщенный ряд (5.1) для нахождения систем функций, которые используются при решении граничных задач. Именно, составляя в полукруге $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ ряд из степеней (3.14), получаем функцию

$$E(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha r)^n}{(s)_n} \left[C_n^{s/2}(\cos \theta) + i \frac{s \sin \theta}{n+s} C_{n-1}^{s/2-1}(\cos \theta) \right]$$

$(s)_n$ – символ Похгаммера [9]. Используя формулу (10.9 (30)) из [10], после преобразований находим

$$E(\alpha, z) = \Gamma(v+1) e^{\alpha x} \left(\frac{\alpha y}{2} \right)^{-v} [J_v(\alpha y) + i J_{v+1}(\alpha y)], \quad v = \frac{s-1}{2} \quad (6.1)$$

Учитывая свойство функций Бесселя [10] $J_v(-\alpha y) = (-1)^v J_v(\alpha y)$, на основании (6.1) введем функции

$$\text{Ch}(\alpha, z) = \frac{E(\alpha, z) + E(-\alpha, z)}{2}, \quad \text{Sh}(\alpha, z) = \frac{E(\alpha, z) - E(-\alpha, z)}{2} \quad (6.2)$$

Принимая во внимание свойство функций Бесселя мнимого аргумента [10] $J_\nu(i\alpha y) = i^\nu I_\nu(\alpha y)$, имеем

$$\text{Ch}(i\alpha, z) = C(\alpha, z), \quad \text{Sh}(i\alpha, z) = iS(\alpha, z)$$

где

$$C(\alpha, z) = \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{\alpha y}{2} \right)^{-\nu} [\cos \alpha x I_\nu(\alpha y) - i \sin \alpha x I_{\nu+1}(\alpha y)] \quad (6.3)$$

$$S(\alpha, z) = \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{\alpha y}{2} \right)^{-\nu} [\sin \alpha x I_\nu(\alpha y) + i \cos \alpha x I_{\nu+1}(\alpha y)]$$

Используя формулы дифференцирования функций Бесселя, убеждаемся, что уравнениям (1.1) в координатах x, y при $P = y^s, s > 0$ удовлетворяют следующие из (1.2), (6.3) функции

$$\varphi = \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{\alpha y}{2} \right)^{-\nu} I_\nu(\alpha y) \begin{cases} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{cases}, \quad \psi = \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{-\nu} y^{\nu+1} I_{\nu+1}(\alpha y) \begin{cases} -\sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{cases}$$

Тогда функции (6.3) – решения уравнения (1.6).

В частности, при $s = 0$ ($\nu = -1/2$) функции (6.1)–(6.3) принимают вид аналитических функций: $e^{\alpha z}$, $\text{ch } \alpha z$, $\text{sh } \alpha z$, $\cos \alpha z$, $\sin \alpha z$. Следовательно, (6.1)–(6.3) можно рассматривать при $s > 0$ как аналоги соответствующих аналитических функций.

Используя дифференциальные свойства функций Бесселя [10], можно найти независимые от (6.1)–(6.3) решения уравнения (1.6). Например, если в решениях (6.3) функции Бесселя I_ν и $I_{\nu+1}$ заменим на функции Макдональда K_ν и $-K_{\nu+1}$, то получим другие решения уравнения (1.6). Введем функции $T(\alpha, z)$ и $T_1(\alpha, z)$ как линейные суперпозиции функций (6.3) и указанных решений:

$$T(\alpha, z) = y^{-\nu} [(A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) I_\nu(\alpha y) - i(A \sin \alpha x - B \cos \alpha x) I_{\nu+1}(\alpha y)] \quad (6.4)$$

$$T_1(\alpha, z) = y^{-\nu} [(A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) K_\nu(\alpha y) + i(A \sin \alpha x - B \cos \alpha x) I_{\nu+1}(\alpha y)]$$

где A, B – вещественные постоянные.

Общее решение $W(z)$ уравнения (1.6) можно представить как сумму $T(\alpha, z)$ и $T_1(\alpha, z)$. В частности (как это следует из асимптотики функций I_ν, K_ν [10]), если решение $W(z)$ ограничено при $y = 0$, то оно выражается через функцию $T(\alpha, z)$; если решение $W(z)$ ограничено на бесконечности, то оно представляется через $T_1(\alpha, z)$.

7. Применим аппарат функций $W(z)$ к решению граничных задач сопряжения для двумерных процессов в неоднородном слое. Переменная проводимость слоя обусловлена изменением его коэффициента проницаемости k и толщины h . Для определенности полагаем, что h изменяется непрерывно, а k – скачком вдоль некоторой кривой L' плоскости ζ основания слоя. Пусть эта кривая – граница областей D'_1 и D'_2 , коэффициенты проницаемостей сред которых k_1 и k_2 , и процессы в них описывают комплексные потенциалы

$$W_j = k_j \varphi_j + i\psi_j/h, \quad j = 1, 2 \quad (7.1)$$

Считаем, что на L' выполняются условия сопряжения: $\varphi_1 = \varphi_2, \psi_1 = \psi_2$, которые, например, в случае фильтрации [4, 12] выражают непрерывность давления и расхода жидкости. Эти условия относительно комплексных потенциалов (7.1) запишем в виде

$$(1 - \lambda)W_1 = W_2 + \lambda \overline{W_2} \quad \left(\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad \lambda \in [-1, 1] \right) \quad (7.2)$$

Пусть процесс в слое с постоянным коэффициентом проницаемости k_0 , принимаемым за единицу измерения проницаемостей сред ($k_0 = 1$), описывает комплексный потенциал $W_0 = \varphi_0 + i\psi_0/h$. Его представим в виде $W_0 = W_{01} + W_{02}$, где функции W_{01} и W_{02} имеют особые точки в областях D'_1 и D'_2 .

В плоскости ζ необходимо решать для функции $W(\zeta)$ граничную задачу сопряжения (1.3), (7.2). Аналогичного вида задача сопряжения исследовалась в ряде работ (см. обзор в [13]) путем ее сведения к соответствующей обобщенной задаче в классе аналитических функций, что в конечном итоге приводит к решению интегрального уравнения при более сложных, чем (7.2), условиях и вызывает большие трудности.

Используя конформную ковариантность задачи (1.3), (7.2), сведем ее к более простой (канонической) задаче сопряжения (1.6), (7.2) для функции $W(z)$ с границей L областей D_1 и D_2 в полуплоскости $\text{Im} z \geq 0$. Рассмотрим случаи, когда границы L резко различаются и их можно моделировать полуокружностью и прямыми линиями, для которых решения канонической задачи получаются в конечном виде.

Полагаем, что проведенная из начала координат полуокружность радиуса $a: z = ae^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ – граница областей $D_1(|z| > a)$ и $D_2(|z| < a)$. Пусть $|W_{01}(z)| = O(|z|^{\mu_1})$ при $|z| \rightarrow 0$ и $|W_{02}(z)| = O(|z|^{-\mu_2})$ при $|z| \rightarrow \infty$ ($\mu_1 = \mu - s(1+\lambda)/2$, $\mu_2 = \mu + s(1-\lambda)/2$, $\mu > 0$). Тогда имеем комплексные потенциалы процесса в областях D_1 и D_2 :

$$W_1 = W_{01}(z) + \left(\frac{a}{|z|}\right)^s \left[\overline{\lambda W_{01}\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} + G_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) + \lambda \overline{G_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} \right] + (1+\lambda)[W_{02}(z) + G_2(z)] \quad (7.3)$$

$$W_2 = W_{02}(z) + \left(\frac{a}{|z|}\right)^s \left[\overline{\lambda W_{02}\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} + G_2\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) - \lambda \overline{G_2\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} \right] + (1-\lambda)[W_{01}(z) + G_1(z)]$$

$$G_j(z) = \kappa_j \int_{p_j}^1 \tau^{s/2-1-\kappa_j} W_{0j}(z\tau) d\tau, \quad \kappa_j = (-1)^j \frac{\lambda s}{2}, \quad j=1,2, \quad p_1=0, \quad p_2=\infty$$

Действительно, формулы (7.3) представляют собой решение задачи. Определяющие функции $G_j(z)$ интегралы в силу указанных ограничений на $W_{0j}(z)$ сходятся, и эти функции удовлетворяют уравнению (1.6). Выражения в квадратных скобках, умноженные на $(a/|z|)^s$ согласно равенству (2.1) также удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, (7.3) – решение уравнения (1.6). Так как на границе $L: z = ae^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ имеет место равенство $z\bar{z} = a^2$, то нетрудно убедиться, что решение (7.3) удовлетворяет на ней условию (7.2).

Пусть полупрямая $L: x = 0, y \geq 0$ – граница областей $D_1(x > 0)$ и $D_2(x < 0)$. Тогда процесс в этих областях описывают комплексные потенциалы

$$W_1 = W_0(z) + \lambda[\overline{W_{01}(-\bar{z})} + W_{02}(z)], \quad W_2 = W_0(z) - \lambda[W_{01}(z) + \overline{W_{02}(-\bar{z})}] \quad (7.4)$$

которые являются решением задачи.

Действительно, $\overline{W_{01}(-\bar{z})} = \overline{W_{01}(-x, y)}$ и $\overline{W_{02}(-\bar{z})} = \overline{W_{02}(-x, y)}$ имеют особые точки в областях D_2 и D_1 и удовлетворяют уравнению (1.6). Тогда (7.4) – решения уравнения (1.6). Можно убедиться, что для указанной границы L условие (7.2) выполняется.

Пусть теперь прямая $L: y = b = \text{const}$ – граница областей $D_1(y > b)$ и $D_2(y < b)$. Решение задачи ищем в виде [14]

$$W_1 = W_0 + \int_0^\infty \Lambda_1(\alpha) T_1(\alpha, z) d\alpha, \quad W_2 = W_0 + \int_0^\infty \Lambda_2(\alpha) T(\alpha, z) d\alpha \quad (7.5)$$

причем $T(\alpha, z)$ и $T_1(\alpha, z)$ определяются равенствами (6.4). Полагаем, что функция $\varphi_0(x, y) = \operatorname{Re} W_0$ на границе $L: y = b$ непрерывна и абсолютно интегрируема по $x \in]-\infty, \infty[$. Следовательно, ее можно разложить в интеграл Фурье [15]:

$$\varphi_0(x, b) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha \quad (7.6)$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t, b) \cos \alpha t dt, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t, b) \sin \alpha t dt$$

Тогда, удовлетворяя условиям (7.2) на $L: y = b$ и учитывая равенство [10] $I_\nu(z)K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z)K_\nu(z) = z^{-1}$, а также равенства (6.4), (7.5), (7.6), имеем

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 + y^{-\nu} \int_0^{\infty} \Lambda(\alpha) I_{\nu+1}(\alpha b) [K_\nu(\alpha y) \omega(\alpha, x) + i K_{\nu+1}(\alpha y) \omega_1(\alpha, x)] d\alpha \\ W_2 &= W_0 - y^{-\nu} \int_0^{\infty} \Lambda(\alpha) K_{\nu+1}(\alpha b) [I_\nu(\alpha y) \omega(\alpha, x) - i I_{\nu+1}(\alpha y) \omega_1(\alpha, x)] d\alpha \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\Lambda(\alpha) = 2\lambda b^\nu [(1-\lambda)(\alpha b)^{-1} + 2\lambda I_\nu(\alpha b) K_{\nu+1}(\alpha b)]^{-1}$$

$$\omega(\alpha, x) = A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t, b) \cos \alpha(t-x) dt$$

$$\omega_1(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \omega(\alpha, x)}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t, b) \sin \alpha(t-x) dt$$

Содержащиеся в (7.7) интегралы сходятся.

Действительно, модули M_1 и M_2 подынтегральных выражений, входящих в комплексные потенциалы W_1 и W_2 , являются функциями от $\alpha \in [0, \infty[$ с ограниченным изменением на каждом конечном промежутке. Так как при $\alpha \rightarrow \infty$ в силу асимптотики функций I_ν, K_ν [10] имеем $M_1 = O(\sqrt{b/y} e^{-\alpha(y-b)})$ и $M_2 = O(\sqrt{b/y} e^{-\alpha(b-y)})$, то в пределе M_1 и M_2 принимают конечные значения. Следовательно, интегралы в формулах (7.7) сходятся, и эти формулы дают решение задачи.

Отметим, что решение (7.7) также имеет место, когда в областях $D_1(y > b)$ и $D_2(y < b)$ законы изменения толщины слоя различны: $h_j = (y/b)^{s_j}$, $s_j > 0$, если в комплексных потенциалах W_j под ν понимать $(s_j - 1)/2$, $j = 1, 2$.

Решения (7.3), (7.4) и (7.7) определяют, в частности, комплексные потенциалы фильтрационных процессов в случаях, когда одна из областей D_1 или D_2 непроницаема ($k_1 = 0$, $\lambda = -1$ или $k_2 = 0$, $\lambda = 1$), либо является каверной ($k_1 = \infty$, $\lambda = 1$ или $k_2 = \infty$, $\lambda = -1$). Эти решения принимают известный вид для плоскопараллельных ($s = 0$) [6] и осесимметричных ($s = 1$) [7, 14] процессов.

Отметим, что решения (7.3), (7.4) и (7.7) описывают произвольные двумерные процессы, моделируемые особыми точками функции $W_0(z)$. В частности, эти решения определяют процесс, вызванный источником (стоком), если в них под $W_0(z)$ понимать комплексный потенциал (3.5).

Применяя к (7.3), (7.4) и (7.7) конформные преобразования, получим в конечном виде широкий класс граничных задач сопряжения (1.3), (7.2) для двумерных процессов в неоднородных слоях, проводимость которых моделируется законом (1.5).

Исследованные выше на основе развитого аппарата функций $W(z)$ граничные задачи не исчерпывают его возможностей. Он применим для широкого круга двумерных процессов различной физической природы, описываемых уравнениями (1.1). В частности,

для фильтрации в слоях проводимости (1.5) при $s = 1$ получено решение ряда задач сопряжения [5, 14]. Этот аппарат может также представить интерес при исследовании плоскопараллельных течений идеальной сжимаемой жидкости, определяемых уравнениями Чаплыгина.

Автор благодарит О.В. Голубеву за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.
2. Положий Г.Н. Теория и применение p -аналитических и (p, q) -аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.
3. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.
4. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк., 1983. 160 с.
5. Пивень В.Ф. О двумерной фильтрации в слоях с прерывно изменяющейся проводимостью вдоль кривых второго порядка // Изв. АН. МЖГ. 1993. № 1. С. 120–128.
6. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972. 368 с.
7. Пивень В.Ф. Метод осесимметричных обобщенных аналитических функций в исследовании динамических процессов // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 228–234.
8. Weinstein A. Some applications of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanics // Приложения теории функций в механике сплошной среды. М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 440–453.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
11. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости: применение методов теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1978. 462 с.
12. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
13. Михайлов Л.Г. Задачи с сопряжением для уравнений с частными производными // Науч. тр. Юбил. семинара по краевым задачам. Минск: Изд-во "Университетское", 1985. С. 77–85.
14. Пивень В.Ф. Двумерная фильтрация в слоях переменной проводимости, моделируемой гармонической функцией координат // Изв. АН. МЖГ. 1995. № 3. С. 102–112.
15. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 655 с.

Орел

Поступила в редакцию
24.VII.1996