

УДК 62-50

© 1997 г. И.С. Раппопорт, А.А. Чикрий

ГАРАНТИРОВАННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЛАТЫ

Предлагается метод решения дифференциальной игры группового преследования с терминальной функцией платы, который заключается в систематическом использовании идей двойственности Фенхеля–Моро [1] применительно к общей схеме метода разрешающих функций [2]. Указываются достаточные условия, налагаемые на параметры квазилинейного управляемого процесса и терминальную функцию платы, которые обеспечивают успешное окончание группового преследования. Найдено гарантированное время окончания на основании информации о начальном состоянии процесса и предыстории управления убегающего. Результаты иллюстрируются на модельном примере.

Был предложен [3] метод решения дифференциальной игры преследования с участием двух лиц и терминальной функцией платы (ФП). Основная идея этого метода состоит в том, что разрешающую функцию удастся выразить через сопряженную к ФП и, используя инволютивность оператора сопряжения для выпуклой замкнутой функции, получить гарантированную оценку терминального значения ФП. Однако попытки использовать этот метод для решения дифференциальной игры группового преследования с терминальной ФП наталкиваются на принципиальные трудности, которые связаны с тем, что в этом случае ФП задается как минимум конечного числа выпуклых функций и, вообще говоря, не является выпуклой.

С помощью предлагаемого метода удастся преодолеть эти трудности.

Работа является развитием идей [2]–[5], примыкает к исследованиям [6]–[11] и указывает новые возможности приложения выпуклого анализа к решению игровых задач управления с участием нескольких лиц.

1. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Рассмотрим конфликтно управляемый процесс, который описывается системой квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = A_i z_i + \varphi_i(u_i, v), \quad z_i \in R^{n_i}, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V \quad (1.1)$$

где A_i – квадратная матрица порядка n_i , $\varphi_i: U_i \times V \rightarrow R^{n_i}$ – непрерывная по совокупности переменных функция, U_i, V – непустые компакты из евклидова пространства R^{n_i} . Здесь и всюду далее $i = 1, \dots, v$.

Задана функция платы $\sigma(z)$, которая определяет момент окончания игры и представляется в виде

$$\sigma(z) = \min_{1 \leq i \leq v} \sigma_i(z_i), \quad z = (z_1, \dots, z_v), \quad z_i \in R^{n_i}, \quad \sigma_i: R^{n_i} \rightarrow R^1 \quad (1.2)$$

Если $z_i(t) = z_i(z_i^0, u_i'(\cdot), v'(\cdot))$ – траектория системы (1.1), соответствующая начальному состоянию z_i^0 и выбранным управлениям игроков $u_i'(\cdot) = \{u_i(\tau): u_i(\tau) \in U_i, \tau \in [0, t]\}$; $v'(\cdot) = \{v(\tau): v(\tau) \in V, i \in [0, t]\}$, то игру будем считать оконченной в момент T , если

$$\sigma(z(T)) \leq 0, \quad z(T) = (z_1(T), \dots, z_v(T)) \quad (1.3)$$

Цель группы преследователей $(u_1, \dots, u_v)$ – обеспечить окончание игры, цель убегающего (v) – противоположная.

Будем считать, что в процессе игры преследователь и убегающий в качестве управлений использует измеримые по Лебегу функции времени. Примем сторону преследователя и укажем достаточные условия, налагаемые на параметры процесса (1.1) и терминальную функцию платы (1.2), которые обеспечивают окончание игры (1.1), (1.3). При этом найдем гарантированное время окончания на основании информации о начальном состоянии $z^0 = (z_1^0, \dots, z_v^0)$ и предыстории управления убегающего $v'(\cdot)$.

Будем полагать, что функции $\sigma_i(z_i)$ выпуклы и удовлетворяют условию Липшица

$$|\sigma_i(z_i) - \sigma_i(x_i)| \leq l_i \|z_i - x_i\|, \quad l_i \geq 0, \quad z_i, x_i \in R^{n_i} \quad (1.4)$$

Из выпуклого анализа известно [1], что эти функции можно представить в виде

$$\sigma_i(z_i) = \max_{p_i \in \text{dom } \sigma_i^*} [(p_i, z_i) - \sigma_i^*(p_i)] \quad (1.5)$$

где $\sigma_i^*(p_i)$, $\sigma_i^*: R^{n_i} \rightarrow R^1$ – сопряженная с $\sigma_i(z_i)$ функция, определяемая равенством

$$\sigma_i^*(p_i) = \sup_{z_i \in R^{n_i}} [(p_i, z_i) - \sigma_i(z_i)], \quad p_i \in R^{n_i} \quad (1.6)$$

а $\text{dom } \sigma_i^*$ – эффективное множество [1] функции $\sigma_i^*(p_i)$, т.е.

$$\text{dom } \sigma_i^* = \{p_i \in R^{n_i}: \sigma_i^*(p_i) < +\infty\}$$

При этом в силу соотношения (1.4) множество $\text{dom } \sigma_i^*$ – компакт [1].

Потребуем дополнительно, чтобы функции $\sigma_i(z_i)$ были ограничены снизу. Тогда при учете соотношения (1.6) имеем

$$-\sigma_i^*(0) = \inf_{z_i \in R^{n_i}} \sigma_i(z_i)$$

и, следовательно, множество $\text{dom } \sigma_i^*$ содержит нуль.

Пусть L_i – линейная оболочка множества $\text{dom } \sigma_i^*$, [1], а π_i – оператор ортогонального проектирования из R^{n_i} на подпространство L_i . Используя представление (1.5), можно убедиться в справедливости соотношения

$$\sigma_i(z_i) = \sigma_i(\pi_i z_i), \quad z_i \in R^{n_i} \quad (1.7)$$

2. Схема метода и основной результат. Введем многозначные отображения

$$W_i(t, v) = \bigcup_{u_i \in U_i} W_i(t, u_i, v), \quad W_i(t) = \bigcap_{v \in V} W_i(t, v)$$

где $W_i(t, u_i, v) = \pi_i \Phi_i(t) \varphi_i(u_i, v)$; $\Phi_i(t) = \exp(tA_i)$, $t \geq 0$.

Предполагается, что параметры процесса (1.1) удовлетворяют условию Понтрягина [2, 6, 8], которое означает, что $W_i(t) \neq 0$ для всех $t \geq 0$.

Так как отображения $W_i(t)$ полунепрерывны сверху [2], то каждое из них содержит хотя бы один борелевский селектор [2, 9, 12]. Множества таких селекторов обозначим Γ_i , зафиксируем по одному из них $\gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i$ и положим

$$\xi_i(t, z_i, \gamma(\cdot)) = \pi_i \Phi_i(t) z_i + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$$

Определим разрешающую функцию для каждого

$$\beta(t, \tau, z_i, v, \gamma(\cdot)) = \quad (2.1)$$

$$= \sup\{\beta \geq 0: \min_{u_i \in U_i} \max_{p_i \in \text{dom } \sigma_i^*} [(p_i, I_i) + \beta J_i] \leq 0\}, \quad t \geq \tau \geq 0, \quad z_i \in R^{n_i}, \quad v \in V$$

$$I_i = W_i(t - \tau, u_i, v) - \gamma_i(t - \tau), \quad J_i = (p_i, \xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))) - \sigma_i^*(p_i)$$

Из условия Понтрягина непосредственно вытекает справедливость соотношения

$$\min_{u_i \in U_i} \max_{p_i \in \text{dom } \sigma_i^*} (p_i, I_i) \leq 0, \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \quad v \in V \quad (2.2)$$

Следовательно, если выполнено условие Понтрягина, неравенства в соотношении (2.1) справедливы по крайней мере при нулевых значениях разрешающих функций. Отметим также, что при $\sigma_i(\xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))) \leq 0$ функции $\beta_i(t, \tau, z_i, v, \gamma(\cdot)) = +\infty$ для всех $v \in V, t \in [0, t]$. Если же для некоторых $t, z_i \in R^{n_i}, \gamma(\cdot) \in \Gamma_i, \sigma_i(\xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))) > 0$, то разрешающие функции $\beta_i(t, \tau, z_i, v, \gamma_i(\cdot))$ принимают конечные значения и равномерно по $t \in [0, t], v \in V$ ограничены.

Лемма 2.1. Пусть параметры процесса (1.1) удовлетворяют условию Понтрягина, а функция платы (1.2) удовлетворяет условиям разд. 1. Тогда если для некоторых $t > 0, z_i \in R^{n_i}$ и $\gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i, \sigma(\xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))) > 0$, то функции

$$\beta_i(\tau, v) = \beta_i(t, \tau, z_i, v, \gamma_i(\cdot)) \quad (2.3)$$

являются борелевскими по совокупности переменных (τ, v) на множестве $[0, t] \times V$.

Доказательство. Зафиксируем $t > 0, z_i \in R^{n_i}$ и $\gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i$, для которых $\sigma_i(\xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))) > 0$. Из предположений о параметрах процесса (1.1) и функции платы (1.2) следует, что функции $\Psi_i(u_i, v, p_i, \tau, \gamma_i, \beta_i) = (p_i, W_i(t - \tau, u_i, v) - \gamma_i) + \beta_i J_i$ непрерывны по совокупности переменных, а следовательно [10], этим же свойством обладают и функции

$$\Psi_i(v, \tau, \gamma_i, \beta_i) = \min_{u_i \in U_i} \max_{p_i \in \text{dom } \sigma_i^*} \Psi_i(u_i, v, p_i, \tau, \gamma_i, \beta_i)$$

Тогда в силу [9] многозначные отображения

$$B_i(\tau, v, \gamma_i) = \{\beta_i \geq 0: \Psi_i(v, \tau, \gamma_i, \beta_i) \leq 0\}$$

полунепрерывны сверху, а их селекторы

$$\beta_i(\tau, v, \gamma_i) = \sup\{\beta_i: \beta_i \in B_i(\tau, v, \gamma_i)\}$$

являются борелевскими по совокупности переменных.

Поэтому согласно свойству суперпозиции двух борелевских функций [12] функции (2.3)

$$\beta_i(\tau, v) = \beta_i(\tau, v, \gamma_i(t - \tau)) = \beta_i(t, \tau, z_i, v, \gamma_i(\cdot))$$

являются борелевскими на множество $[0, t] \times V$.

Рассмотрим функцию

$$T(z, \gamma(\cdot)) = \inf\{t \geq 0: \inf_{v(\cdot) \in \Omega_V} \max_{1 \leq i \leq v} H_i(t) \geq 1\} \quad (2.4)$$

$$H_i(t) = \int_0^t \beta_i(t, \tau, z_i, v(\cdot), \gamma_i(\cdot)) d\tau$$

$$z = (z_1, \dots, z_v), \quad \gamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \dots, \gamma_v(\cdot)), \quad z_i \in R^{n_i}, \quad \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i$$

Ω_V – множество всех измеримых функций, значение которых лежит в множестве V .

Если неравенство в фигурных скобках соотношения (2.4) не выполняется при всех $t \geq 0$, то будем полагать $T(z, \gamma(\cdot)) = +\infty$.

Заметим, что если для некоторого i имеем $\beta_i(t, \tau, z_i, v, \gamma_i(\cdot)) = +\infty$ при $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, то будем считать, что $H_i(t) = +\infty$ и неравенство в (2.4) выполнено автоматически.

Теорема 2.1. Пусть параметры процесса (1.1) удовлетворяют условию Понтрягина, а функция платы (1.2) удовлетворяет условиям пункта 1.1, и для некоторых $z^0 = (z_1^0, \dots, z_v^0)$, $\gamma^0(\cdot) = (\gamma_1^0, \dots, \gamma_v^0)$, $z_1^0 \in R^{n_1}$, $\gamma_i^0(\cdot) \in \Gamma_i$ выполняется неравенство $T(z^0, \gamma^0(\cdot)) < +\infty$. Тогда игру можно окончить в момент $T(z^0, \gamma^0(\cdot))$ из начального положения z^0 .

Доказательство. Положим $T = T(z^0, \gamma^0(\cdot))$. Пусть $v(\tau), u(\tau) \in V$, $\tau \in [0, T]$ – произвольная измеримая функция. Укажем способ выбора управлений преследователями.

Рассмотрим случай

$$\sigma(\xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))) > 0, \quad \xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot)) = (\xi_1(T, z_1^0, \gamma_1^0(\cdot)), \dots, \xi_v(T, z_v^0, \gamma_v^0(\cdot)))$$

Введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \max_{1 \leq i \leq v} H_i^0(t)$$

$$H_i^0(t) = \int_0^t \beta_i(T, \tau, z_i^0, v(\tau), \gamma_i^0(\cdot)) d\tau$$

Функция $h(t)$ непрерывна, не возрастает и $h(0) = 1$. Из определения момента T следует, что существует такое $t_* = t_*(v(\cdot))$, $0 \leq t_* \leq T$, что

$$h(t_*) = 0 \quad (2.5)$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$U_i^1(\tau, v) = \{u_i \in U_i: \max_{p_i \in \text{dom } \sigma_i^*} [(p_i, I_i^0) + \beta_i(T, \tau, z_i^0, v, \gamma_i^0(\cdot)) J_i^0] \leq 0\}$$

$$I_i^0 = W_i(T - \tau, u_i, v) - \gamma_i^0(T - \tau), \quad J_i^0 = (p_i, \xi_i(T, z_i^0, \gamma_i^0(\cdot))) - \sigma_i^*(p_i)$$

$$0 \leq \tau \leq t_*, \quad v \in V$$

Они борелевские по совокупности переменных.

Действительно, функция

$$\kappa_i(u_i, v, \tau, \gamma_i, \beta_i) = \max_{p_i \in \text{dom } \sigma_i^*} [(p_i, W_i(T - \tau, u_i, v) - \gamma_i) + \beta_i J_i^0]$$

непрерывна по совокупности переменных. Поэтому для отображения

$$U_i(\tau, v, \gamma_i, \beta_i) = \{u_i \in U_i: \kappa_i(u_i, v, \tau, \gamma_i, \beta_i) \leq 0\}$$

полунепрерывны сверху [9], а следовательно, многозначные отображения

$$U_i^1(\tau, v) = U_i(\tau, v, \gamma_i(T - \tau), \beta_i(T, \tau, z_i^0, v, \gamma_i^0(\cdot)))$$

являются борелевскими по совокупности (τ, ν) как суперпозиция полунепрерывных и борелевских отображений [12].

Тогда селекторы

$$u_i^1(\tau, \nu) = \text{lex min } U_i^1(\tau, \nu), \quad 0 \leq \tau \leq t_*, \quad \nu \in V$$

являются борелевскими по (τ, ν) функциями [2, 12].

Рассмотрим многозначные отображения

$$U_i^2(\tau, \nu) = \{u_i \in U_i : I_i^0 = 0\}, \quad t_* \leq \tau \leq T, \quad \nu \in V$$

Эти отображения борелевские по совокупности (τ, ν) [2, 9]. Тогда селекторы

$$u_i^2(\tau, \nu) = \text{lex min } U_i^2(\tau, \nu), \quad t_* \leq \tau \leq T, \quad \nu \in V$$

являются борелевскими по (τ, ν) функциями [2, 12].

Управления преследователей на интервале $[0, T]$ положим равным

$$u_i(\tau) = \begin{cases} u_i^1(\tau, \nu(\tau)), & \tau \in [0, t_*] \\ u_i^2(\tau, \nu(\tau)), & \tau \in [t_*, T] \end{cases}$$

Функции $u_i(\tau)$ измеримы [2, 12].

Рассмотрим теперь случай $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))) \leq 0$. Тогда найдется такой номер j , ($j = 1, \dots, \nu$), что $\sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j^0(\cdot))) \leq 0$, и управление j -го преследователя на интервале $[0, T]$ положим равным $u_j(\tau) = u_j^2(\tau, \nu(\tau))$. Эта функция также измерима [2, 12]. Управления остальных преследователей произвольны.

Выбранный таким образом закон управления группы преследователей обеспечивает при любых управлениях убегающего в момент T справедливость соотношения (1.3) на соответствующих траекториях процесса (1.1).

Действительно, из формулы Коши для процесса (1.1) следует представление

$$\pi z_i(T) = \xi_i(T, z_i^0, \gamma_i^0(\cdot)) + \int_0^T I_i^0 d\tau \quad (2.6)$$

Пусть $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))) \leq 0$. Тогда найдется такой номер j , ($j = 1, \dots, \nu$), что $\sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j^0(\cdot))) \leq 0$. При учете закона управления для группы преследователей имеем $\pi z_j(T) = \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j^0(\cdot))$. Поэтому из равенства (1.7) и представления (1.2) сразу следует справедливость соотношения (1.3).

Пусть теперь $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))) > 0$. Тогда соотношение (1.2) дает $\sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j^0(\cdot))) > 0$. Из равенства (2.5) следует, что существует номер j , ($j = 1, \dots, \nu$), такой, что

$$1 - H_j^0(t_*) = 0 \quad (2.7)$$

Проследим за j -м преследователем. Соотношения (1.7), (2.6) дают

$$\sigma_j(z_j(T)) = \max_{p_j \in \text{dom } \sigma_j} \left[J_j^0 + \int_0^T (p_j, I_j^0) d\tau \right] \quad (2.8)$$

Прибавив и вычтя в квадратных скобках величину $J_j H_j^0(t_*)$, заключаем что, если группа преследователей выбирает управление согласно указанному закону, j -й преследователь может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma_j(z_j(T)) \leq \sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j^0(\cdot)))[1 - H_j^0(t_*)]$$

Следовательно, при учете соотношений (2.7), (1.2) получим соотношение (1.3).

Следствие 2.1. Пусть параметры процесса (1.1) удовлетворяют условию Понтрягина, а функция платы (1.2) удовлетворяет условиям разд. 1. Тогда, если группа преследователей использует законы управления, описанные при доказательстве теоремы 2.1, то при любом T , $0 < T < T(z^0, \gamma^0(\cdot))$, существует такой номер $j = 1, \dots, v$, что справедлива оценка

$$\sup_{v(\cdot) \in \Omega_v} \sigma(z(T)) \leq \sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j^0(\cdot))) \left[1 - \inf_{v(\cdot) \in \Omega_v} \max_{1 \leq i \leq v} H_i^0(T) \right]$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1 при условии, что контрольную функцию следует задать в виде

$$h(t) = \inf_{v(\cdot) \in \Omega_v} \max_{1 \leq i \leq v} H_i^0(T) - \max_{1 \leq i \leq v} H_i^0(t)$$

3. Обобщенное расстояние и разрешающие функции. Пусть M_i^* выпуклые, замкнутые множества, S_i — выпуклые, замкнутые, ограниченные множества, внутренность которых содержит нуль. Тогда для всех $z = (z_1, \dots, z_v)$, $z_i \in R^{n_i}$ определена функция обобщенного расстояния [10]

$$d_S(z|M^*) = \min_{1 \leq i \leq v} d_{S_i}(z_i|M_i^*) \quad (3.1)$$

$$S = S_1 \times \dots \times S_v, \quad M^* = \bigcup_{i=1}^v M_i^*, \quad d_{S_i}(z_i|M_i^*) = \inf\{\rho_i \geq 0: z_i \in M_i^* + \rho_i S_i\}$$

Можно показать, что функция обобщенного расстояния (3.1) удовлетворяет условиям разд. 1.

Вычислим функции, сопряженные к функциям $d_{S_i}(z_i|M_i^*)$.

Прежде всего заметим, что справедлива формула

$$d_{S_i}(z_i|M_i^*) = \inf\{\mu_{S_i}(z_i - m): m \in M_i^*\}$$

где $\mu_{S_i}(x_i) = \inf\{\mu_i \geq 0: x_i \in \mu_i S_i\}$ — калибровочная функция множества S_i [10].

Поэтому исходя из определения операции инфимальной конволюции [1, 9] имеем

$$d_{S_i}(z_i|M_i^*) = (f_i \square g_i)(z_i) = \inf\{f_i(z_i - y_i) + g_i(y_i): y_i \in R^{n_i}\}$$

где $\square$ — знак операции инфимальной конволюции [1], $f_i(x_i) = \mu_{S_i}(x_i)$ — калибровочная функция множества S_i , $x_i \in R^{n_i}$, $g_i(y_i) = \delta(y_i|M_i^*)$ — индикаторная функция множества M_i^* [1].

На основании теоремы о двойственности операций сложения и инфимальной конволюции [1] получим формулу для сопряженных функций

$$d_{S_i}^*(\cdot|M_i^*)(p_i) = f_i^*(p_i) + g_i^*(p_i) = \begin{cases} C(M_i^*, p_i), & p_i \in S_i^0 \\ +\infty, & p_i \notin S_i^0 \end{cases}$$

где $S_i^0 = \{p_i \in R^{n_i}: (p_i, x_i) \leq 1 \text{ для каждого } x_i \in S_i\}$ — поляр множества S_i [1]; $f_i^*(p_i) = \delta(p_i|S_i^0)$ — индикаторная функция поляры множества S_i ; $g_i^*(p_i) = C(M_i^*, p_i)$ — опорная функция множества M_i^* .

Здесь использован тот факт, что калибровочная функция множества S_i является опорной функцией поляры S_i^0 [1], а также двойственность индикаторной и опорной функций выпуклого замкнутого множества [1].

Таким образом, при учете соотношения (1.5) имеем

$$\text{dom } d_{S_i}^*(\cdot | M_i^*)(p_i) = S_i^0, \quad d_{S_i}(z_i | M_i^*) = \max_{p_i \in S_i^0} [(p_i, z_i) - C(M_i^*, p_i)]$$

Используя это представление, можно доказать следующую лемму.

Лемма 3.1. Пусть X_i – компактное множество, M_i^* – выпуклое, замкнутое множество, S_i – выпуклый компакт, внутренность которого, содержит нуль. Тогда для того, чтобы $X_i \cap M_i^* \neq \emptyset$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\min_{z_i \in X_i} \max_{p_i \in S_i^0} [(p_i, z_i) - C(M_i^*, p_i)] \leq 0$$

где S_i^0 – поляр множества S_i .

Возьмем в качестве M_i^* цилиндрические множества вида $M_i^* = M_i^0 + M_i$, где M_i^0 – линейное подпространство из R^{n_i} , M_i – выпуклый компакт из ортогонального дополнения L_i к M_i^0 в пространстве R^{n_i} . Тогда из соотношения (2.1) получим выражение для разрешающих функций $\beta_i(t, \tau, z_i, \nu, \gamma_i(\cdot))$ в виде

$$\sup\{\beta_i \geq 0: \min_{u_i \in U_i} \max_{p_i \in S_i^0 \cap L_i} [(p_i, W_i(t - \tau, u_i, \nu)) - \gamma_i(t - \tau)] + \\ + \beta_i[(p_i, \xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))) - C(M_i, p_i)] \leq 0\}, \quad t \geq \tau \geq 0, \quad z_i \in R^{n_i}, \quad \nu \in V$$

где S_i – выпуклый компакт пространства R^{n_i} , внутренность которого содержит нуль этого пространства.

При учете леммы 3.1 можно показать, что эти функции совпадают с разрешающими функциями $\alpha_i(t, \tau, z_i, \nu, \gamma_i(\cdot))$, введенными по формуле [2]

$$\sup\{\alpha_i \geq 0: [W_i(t - \tau, \nu) - \gamma_i(t - \tau)] \cap \alpha[M_i - \xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))] \neq \emptyset\}$$

Таким образом, установлена связь полученных результатов с общей схемой метода разрешающих функций для группового преследования [2, 5].

Отметим, что нахождение разрешающих функций, вообще говоря, непростая задача. При некоторых частных предположениях относительно параметров процесса (1.1) и функции платы (1.2) она может быть существенно облегчена.

Лемма 3.2. Пусть процесс (1.1) линеен, т.е. функции $\Phi_i: U_i \times V \rightarrow R^{n_i}$ имеют вид $\Phi_i(u_i, \nu) = u_i - \nu$ и выполнено условие Понтрягина. Терминальное множество M^* состоит из множеств $M_i^*, M_i^* \subset R^{n_i}$, каждое из которых представлено в виде $M_i^* = M_i^0 + l_i S_i$, где M_i^0 – линейное подпространство из R^{n_i} , l_i – неотрицательное число, S_i – выпуклый компакт из ортогонального дополнения L_i к M_i^0 в R^{n_i} , внутренность которого содержит нуль подпространства L_i . Существуют непрерывные положительные функции $r_i(t)$, такие, что $\pi_i \Phi_i(t) U_i = r_i(t) S_i$. Тогда разрешающие функции

$$\beta_i(t, \tau, z_i, \nu, \gamma_i(\cdot)), t \geq \tau \geq 0, \quad z_i \in R^{n_i}, \quad \nu \in V, \quad \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i$$

при $\mu_{S_i}(\xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))) > l_i$ являются наибольшими положительными корнями уравнения

$$\mu_{S_i}(\chi_i(\beta_i)) = r_i(t - \tau) + \beta_i l_i$$

относительно β_i , где $\chi_i(\beta_i) = \pi_i \Phi_i(t - \tau) \nu + \gamma_i(t - \tau) - \beta_i \xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))$.

Доказательство. Из соотношения (2.1) с учетом предположений леммы имеем, что разрешающие функции $\beta_i(t, \tau, z_i, \nu, \gamma_i(\cdot))$ при фиксированном значении аргументов яв-

ляются такими максимальными числами β_i , что

$$\min_{u_i \in S_i} \max_{p_i \in S_i^0} [(p_i, r_i(t-\tau)u_i - \pi_i \Phi_i(t-\tau)u - \gamma_i(t-\tau)) + \beta_i[(p_i, \xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))) - C(l_i S_i, p_i)]] \leq 0$$

Последние соотношения равносильны следующим:

$$\max_{p_i \in S_i^0} [(-p, \chi_i(\beta_i)) - (r_i(t-\tau) + \beta_i l_i) \mu_{S_i^0}(p_i)] \leq 0$$

Здесь использована теорема о минимаксе [1, 10] и известное соотношение выпуклого анализа [1]

$$C(S_i, p_i) = \mu_{S_i^0}(p_i), \quad p_i \in L_i \quad (3.2)$$

При учете этого соотношения в силу неравенства (3.2) получим требуемый результат.

Следствие 3.1. Пусть выполнены условия леммы 3.2, а S_i — единичный шар подпространства L_i с центром в нуле. Тогда разрешающие функции являются большими положительными корнями квадратных уравнений

$$\|\chi_i(\beta_i)\| = r_i(t-\tau) + \beta_i l_i$$

относительно β_i .

Доказательство следует из соотношения (3.3) при учете того, что опорная функция единичного шара равна евклидовой норме.

4. Простое движение. Обозначим через S выпуклый компакт пространства R^k , $k > 1$, внутренность которого содержит нуль. Рассмотрим v преследователей

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i \in R^k, \quad k > 1, \quad \mu_S(u_i) \leq 1 \quad (4.1)$$

и убегающего

$$\dot{y}_i = v, \quad y_i \in R^k, \quad \mu_S(v) \leq 1 \quad (4.2)$$

Игра считается оконченной, если $d_S(x_i|y) = 0$ для некоторого i . Приведем эту задачу к виду (1.1)–(3.1). Для этого положим $z_i = x_i - y$. Тогда вместо уравнений (4.1), (4.2) получим конфликтно управляемый процесс

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad z_i \in R^k, \quad \mu_S(u_i) \leq 1, \quad \mu_S(v) \leq 1 \quad (4.3)$$

с терминальной функцией платы

$$\sigma(z) = \min_{1 \leq i \leq v} d_S(z_i|0)$$

В данном случае $L_i = R^k$, а π_i — оператор тождественного преобразования, который задается k -мерной единичной матрицей. Матрицы A_i — k -мерные нуль-матрицы, а $\Phi_i(t)$ — k -мерные единичные матрицы.

Проверим условие Понтрягина:

$$W_i(t, v) = S - v, \quad W_i(t) = \{0\}$$

Условие $W_i(t) = \{0\}$ однозначно определяет селекторы $\gamma_i(t) \equiv 0$ и функции $\xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot)) = z_i$, тогда для $z_i \neq 0$ при учете соотношения (2.1) имеем

$$\beta_i(t, \tau, z_i, v, 0) = \sup\{\beta_i \geq 0: \min_{u_i \in S} \max_{p_i \in S^0} [(p_i, u_i - v) + \beta_i(p_i, z_i)] \leq 0\},$$

$$t \geq \tau \geq 0, \quad z_i \in R^k, \quad v \in S$$

В силу леммы 3.2 разрешающие функции преследователей при $\mu_S(z_i) > 0$ являются наибольшими положительными корнями уравнений $\mu_S(\nu - \beta_i z_i) = 1$ относительно β_i .

В частности, если в качестве S взять единичный шар с центром в нуле, то при учете следствия 3.1 разрешающие функции запишем в виде

$$\beta_i(z_i, \nu) = \{(z_i, \nu) + [(z_i, \nu)^2 + \|z_i\|^2 (1 - \|\nu\|^2)]^{1/2}\} \times \|z_i\|^{-2}$$

Время завершения группового преследования

$$T(z, 0) = T(z) = \min \left\{ t \geq 0: \inf_{\nu(\cdot) \in \Omega_S} \max_{1 \leq i \leq v} \int_0^t \beta_i(z_i, \nu(\tau)) d\tau = 1 \right\}$$

Можно показать [2], что справедливо неравенство

$$\inf_{\nu(\cdot) \in \Omega_S} \max_{1 \leq i \leq v} \int_0^t \beta_i(z_i, \nu(\tau)) d\tau \geq \frac{t}{v} \delta(z), \quad \delta(z) = \min_{\mu_S(\nu) \leq 1} \max_{1 \leq i \leq v} \beta_i(z_i, \nu)$$

откуда следует оценка

$$T(z) \leq v/\delta(z) \quad (4.4)$$

Заметим, что здесь рассматривается только решение задачи качества, т.е. обеспечения конечности времени группового преследования $T(z)$, и не рассматривается вопрос о минимизации этого времени.

Так как по определению $\delta(z) \geq 0$ для всех $z = (z_1, \dots, z_v)$, $z_i \in R^k$, для того, чтобы гарантировать конечность времени группового преследования $T(z)$, необходимо определить состояния z , для которых $\delta(z) > 0$.

Положим

$$\rho(z) = \min_{\mu_S(\nu) \leq 1} \max_{1 \leq i \leq v} (Z_i, \nu), \quad Z_i = z_i / \mu_S(z_i)$$

Видно, что $\rho(z) > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta(z) > 0$. С другой стороны, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. Функция $\rho(z)$ положительна тогда и только тогда, когда нуль пространства R^k принадлежит внутренности выпуклого многогранника, натянутого на векторы Z_i , т.е.

$$0 \in \inf \text{co}\{Z_i\}_{i=1}^v \quad (4.5)$$

Доказательство. Пусть справедливо включение (4.5). Это означает, что нуль принадлежит внутренности выпуклого многогранника, натянутого на векторы Z_i . На языке опорных функций [1] этот факт может быть выражен следующим образом:

$$0 < \max_{1 \leq i \leq v} (Z_i, \nu) \quad \text{для всех } \nu, \mu_S(\nu) = 1$$

или, поскольку левая часть неравенства не зависит от ν , то $\rho(z) > 0$. Рассуждая в обратном порядке, получим требуемый результат.

Теорема 4.1. Пусть $z^0 = (z_1^0, \dots, z_v^0)$ – начальное состояние процесса (4.3). Тогда, если

$$0 \in \inf \text{co}\{Z_i^0\}, \quad Z_i^0 = z_i^0 / \mu_S(z_i^0) \quad (4.6)$$

то задача группового преследования разрешима в момент $T(z^0)$, для которого справедлива оценка

$$T(z^0) \leq v/\delta(z^0)$$

При этом, если $t_* = t_*(v(\cdot))$ — момент переключения, являющийся нулем контрольной функции

$$1 - \max_{1 \leq i \leq v} \int_0^t \beta_i(z_i^0, v(\tau)) d\tau$$

то управления преследователей, реализующих время $T(z^0)$, на интервале $[0, t_*]$ имеют вид

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \beta_i(z_i^0, v(\tau)) z_i^0$$

а на интервале $(t_*, T(z^0)]$ для индексов, удовлетворяющих равенству

$$\int_0^{t_*} \beta_i(z_i^0, v(\tau)) d\tau = \max_{1 \leq i \leq n} \int_0^{t_*} \beta_i(z_i^0, v(\tau)) d\tau \quad (4.7)$$

управления преследователей положим $u_i(\tau) = v(\tau)$. При этом для остальных индексов i управления преследователей произвольны на интервале $(t_*, T(z^0)]$.

Если начальная позиция $z^0 = (z_1^0, \dots, z_v^0)$ такова, что условие (4.6) не выполняется, то убегающий избежит поимки на бесконечном полуинтервале.

Доказательство. Пусть начальная позиция $z^0 = (z_1^0, \dots, z_v^0)$ такова, что справедливо соотношение (4.6). Тогда в силу леммы 4.1 $\rho(z^0) > 0$ и, следовательно, $\delta(z^0) > 0$. Отсюда следует утверждение о конечности времени $T(z^0)$ в силу оценки (4.4). Законы выбора управлений преследователей до и после переключения вытекают из доказательства теоремы 2.1. Заметим при этом, что для определения момента переключения t_* в каждый момент t требуется информация о предыстории управления убегающего $v_t(\cdot)$. В момент $T(z^0)$ каждый из преследователей с индексом, удовлетворяющим условию (4.7), ловит убегающего.

Пусть начальная позиция $z^0 = (z_1^0, \dots, z_v^0)$ такова, что соотношение (4.6) не выполняется. Тогда $\rho(z^0) \leq 0$ и множество

$$\{\mu_S(v) = 1: \max_{1 \leq i \leq v} (Z_i^0, v) \leq 0\} \neq \emptyset$$

Выберем в качестве управления убегающего элемент v^0 из этого множества. Тогда $\beta_i(z^0, v^0) = 0$. Следовательно, при учете соотношения (4.4) имеем для всех $\beta_i > 0$

$$\min_{u_i \in S} \max_{p_i \in S^0} [(p_i, u_i - v^0) + \beta_i(p_i, z_i^0)] > 0$$

Умножим обе части неравенства на $t > 0$, положим $\beta_i = 1/t$ и при учете теоремы о минимаксе $[1, 10]$ получим

$$\max_{p_i \in S^0} [(p_i, z_i^0) + t \min_{u_i \in S} (p_i, u_i) - t(p_i, v^0)] > 0$$

для всех $t > 0$. Так как

$$t \min_{u_i \in S} (p_i, u_i) = \int_0^t \min_{u_i \in S} (p_i, u_i) d\tau = \inf_{u_i(\cdot) \in \Omega_S} \int_0^t (p_i, u_i(\cdot)) d\tau$$

то из формулы Коши следует, что для всех $t > 0$

$$\inf_{u_i(\cdot) \in \Omega_S} d_S(z_i(t)|0) > 0$$

Таким образом, если убегающий на полубесконечном интервале времени использует в качестве управления указанный вектор v^0 , то для любого закона управления группы

преследователей выполняется неравенство $\sigma(z(t)) > 0$, что и означает, что убегающий избежит поимки.

Следствие 4.1. Пусть в задаче простого группового преследования (4.3) терминальная функция платы имеет вид

$$\sigma(z) = \min_{1 \leq i \leq v} d_S(z_i | \varepsilon_i S), \quad \varepsilon_i > 0$$

Тогда если начальное состояние $z^0 = (z_1^0, \dots, z_v^0)$ такое, что $0 \in \text{intco}\{z_i^0 + \varepsilon_i S\}_{i=1}^v$, то хотя бы один из преследователей ловит убегающего за конечное время. Если $0 \notin \text{intco}\{z_i^0 + \varepsilon_i S\}_{i=1}^v$, то убегающий избежит поимки на полубесконечном интервале времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
2. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 383 с.
3. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Гарантированный результат в квазилинейной дифференциальной игре // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 4. С. 452–455.
4. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Калибровочные функции в дифференциальных играх // Автоматика. 1992. № 6. С. 9–16.
5. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 3. С. 530–535.
6. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 196 с.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 575 с.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
10. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
11. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 512 с.
12. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.

Киев

Поступила в редакцию
19.VIII.1996