

УДК 62-50

© 1997 г. Н.В. Мельникова, А.М. Тарасьев

**СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО
УПРАВЛЕНИЯ В СЕТОЧНЫХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ
СХЕМАХ**

Предлагаются процедуры синтеза оптимальных управлений на основе метода экстремального прицеливания в направлении градиентов аппроксимаций функций цены для задач с терминальным и интегральным дисконтирующим функционалами. Функции цены аппроксимируются посредством конечно-разностных операторов для уравнения Гамильтона – Якоби, использующих конструкции суб- и супердифференциалов локальных выпуклых и вогнутых оболочек. Исследуется зависимость аппроксимационных шагов по фазовому пространству и временному интервалу. Обосновывается оптимальность траекторий, порожденных синтезируемым управлением. Возможности вычислительных методов иллюстрируются на примере решения эволюционной биматричной игры с нелинейной динамикой, обобщающей классические репликаторные модели.

Известно, что если функция цены дифференцируема, то она является классическим решением уравнения Гамильтона – Якоби. При этом оптимальная процедура управления конструируется как экстремальная в направлении градиентов функции цены. Для негладкой функции цены оптимальные стратегии могут быть построены методом экстремального сдвига на сопутствующие точки ее локальных экстремумов [1, 2]. Может быть использован также принцип экстремального прицеливания в направлении квазиградиентов, определенных с помощью преобразования Иосиды – Моро [3]. Упомянутые методы требуют точного знания функции цены или ее аппроксимации высокой точности. Построение функции цены является самостоятельной задачей, которая решается в рамках теории обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби [4, 5]. В рамках этой теории имеются сеточные аппроксимационные схемы построения функции цены [6–11]. В конечно-разностных операторах используются обобщенные градиенты различных типов [9–11].

Ниже предлагается объединить в единый алгоритм сеточную аппроксимационную схему построения значений функции цены и метод экстремального прицеливания в направлении обобщенных градиентов. Рассматриваются интерполяции экстремальных значений управляющих параметров, вычисленных в узлах сетки. При этом исследуется вопрос о соотношении шагов аппроксимации временного интервала и фазового пространства. Предлагаются модификации аппроксимационных схем для задач с интегральным дисконтирующим функционалом [11, 12].

1. Аппроксимационные схемы в терминальной задаче. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \quad (t, x) = T \times R^n, \quad T = (t_0, \theta) \quad (1.1)$$

$$w(\theta, x) = \sigma(x), \quad x \in R^n \quad (1.2)$$

Будем полагать, что этой краевой задаче отвечает задача гарантированного управления для динамической системы

$$\dot{x} = f(t, x, p, q) = A(t, x) + B(t, x)p + C(t, x)q \quad (1.3)$$

$$t \in T, \quad x \in R^n, \quad p \in P \subset R^p, \quad q \in Q \subset R^q$$

с терминальным функционалом платы

$$\gamma(x(\cdot)) = \sigma(x(\theta)) \quad (1.4)$$

Здесь x – n -мерный вектор системы, p – управляющее воздействие, q – возмущение. Множества P, Q – выпуклые компакты.

Функция $H(t, x, s): T \times R^n \times R^n \rightarrow R$ из уравнения (1.1) является гамильтонианом для системы (1.3), т.е. связана с динамикой $f(t, x, p, q)$ соотношением

$$H(t, x, s) = \langle s, A(t, x) \rangle + \min_{p \in P} \langle s, B(t, x)p \rangle + \max_{q \in Q} \langle s, C(t, x)q \rangle \quad (1.5)$$

Пусть для правой части $f(t, x, p, q)$ системы (1.3) выполнены условие непрерывности по Липшицу с константой L относительно переменных t, x и условие продолжимости решений.

Определим компактную область $G_r \in T \times R^n$, в которой будем рассматривать уравнение (1.1) и систему (1.3), условием инвариантности: если $(t_0, x_0) \in G_r$, то $(t, x_0 + (t - t_0)B_r) \in G_r$ при всех $t \in T, B_r = \{b \in R^n: \|b\| \leq r\}$.

Здесь

$$r > K, \quad K = \max_{(t, x, p, q) \in G \times P \times Q} \|f(t, x, p, q)\| \quad (1.6)$$

– максимальная скорость системы, определяемая на замкнутом множестве G , удовлетворяющем условию сильной инвариантности относительно дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0$$

$$F(\tau, y) = \{f \in R^n: f = f(\tau, y, p, q), \quad p \in P, \quad q \in Q\}, \quad (\tau, y) \in T \times R^n$$

В силу приведенных выше условий для правой части системы (1.3) гамильтониан $(t, x, s) \rightarrow H(t, x, s): G_r \times R^n \rightarrow R$ удовлетворяет условиям непрерывности по Липшицу и положительной однородности по переменной s .

Основная роль в решении задачи (1.3), (1.4) принадлежит функции цены $(t, x) \rightarrow w(t, x): G_r \rightarrow R$, определяемой для начальной позиции (t_0, x_0) , позиционных стратегий $U = U(t, x)$ и соответствующих траекторий $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U)$ формулой

$$w(t_0, x_0) = \min_U \max_{x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U)} \sigma(x(\theta)) \quad (1.7)$$

Отметим, что согласно теореме об альтернативе [1, 2] в (1.7) существует седловая точка

$$w(t_0, x_0) = \min_V \max_{y(\cdot) \in Y(t_0, x_0, V)} \sigma(y(\theta))$$

Здесь $y(\cdot) \in Y(t_0, x_0, V)$ – траектории, порожденные возмущением $V = V(t, x)$ из начальной позиции (t_0, x_0) .

Напомним, что функция цены является обобщенным (минимаксным, вязкостным) решением уравнения Гамильтона – Якоби (1.1), теория которых развита в работах [4, 5].

2. Оптимальные процедуры управления. Для построения оптимальных процедур управления необходимо аппроксимировать функцию цены. Рассмотрим конечно-разно-

стный оператор CU , который можно интерпретировать как минимаксную конструкцию

$$CU(t, \Delta, u)(x) = \min_{y \in O(x, K\Delta)} \min_{s \in D^*G(y)} \{\Delta H(t, x, s) + G(y) - \langle s, y - x \rangle\} \quad (t, x) \in G_r \quad (2.1)$$

на локальных вогнутых оболочках $y \rightarrow G(y)$: $\bar{O}(x, r, \Delta) \rightarrow R$ для функции $y \rightarrow u(y)$, аппроксимирующей функцию цены $y \rightarrow w(t + \Delta, y)$ (1.7) на интервале $(t, t + \Delta]$. Здесь множество $D^*G(y)$ – супердифференциал функции G в точке y

$$D^*G(y) = \{s \in R^n : G(\bar{y}) - G(y) \leq \langle s, \bar{y} - y \rangle, \quad \bar{y} \in \bar{O}(x, r\Delta), \quad y \in \bar{O}(x, K\Delta)\}$$

множества $\bar{O}(x, r\Delta), \bar{O}(x, K\Delta)$ – замкнутые окрестности точки x с размерами $r\Delta, K\Delta$, $r > K$.

Пусть

$$\Gamma = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = \theta\}, \quad \Delta = t_{i+1} - t_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

– произвольное разбиение временного отрезка T . Проведем анализ аппроксимационной схемы с конечно-разностным оператором CU (2.1) для разбиения Γ отрезка T

$$u(\theta, x) = \sigma(x) \quad (2.2)$$

$$u(t_i, x) = CU(t_i, \Delta, u(t_{i+1}, \cdot))(x) \quad (2.3)$$

$$(t_i, x), (t_{i+1}, x) \in G_r, \quad i = 0, \dots, N-1$$

Предположим, что в схеме (2.2), (2.3) с оператором CU (2.1) построена аппроксимация u для функции цены w (1.7) во всех точках $(t, x) \in G_r, t \in \Omega$. Определим значения позиционной стратегии $U^* = U^*(t, x)$ по принципу экстремального прицеливания в направлении обобщенных градиентов – субградиентов s^* локальной вогнутой оболочки G функции u

$$U^* = U^*(t, x) = \arg \min_{p \in P} \{\langle s^*, B(t, x)p \rangle\} \quad (2.4)$$

$$s^* = s^*(t, x, y^*) = \arg \min_{s \in D^*G(y^*)} \{\Delta H(t, x, s) + G(y^*) - \langle s, y^* - x \rangle\} \quad (2.5)$$

$$y^* = y^*(t, x) = \arg \min_{y \in O(x, K\Delta)} \min_{s \in D^*G(y)} \{\Delta H(t, x, s) + G(y) - \langle s, y - x \rangle\} \quad (2.6)$$

Установим соотношения для значений

$$u(t, x), \quad u(t + \Delta, y(t, x, \Delta, U^*, q))$$

аппроксимационной функции u на элементе $y(\cdot)$ ломаной Эйлера

$$y(t, x, \Delta, U^*, q) = x + \Delta(A(t, x) + B(t, x)U^* + C(t, x)q), \quad q \in Q$$

Лемма 2.1. Для управления U^* (2.4) справедливо неравенство

$$\max_{q \in Q} u(t + \Delta, y(t, x, \Delta, U^*, q)) \leq u(t, x) \quad (2.7)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию G^* , сопряженную к локальной вогнутой оболочке $y \rightarrow G(y): \bar{O}(x, K\Delta) \rightarrow R$. В силу вогнутости функций G и G^* имеем цепочку неравенств для любого $q \in Q$

$$\begin{aligned} u(t + \Delta, y(t, x, \Delta, U^*, q)) &\leq G(y(t, x, \Delta, U^*, q)) \leq \max_{q \in Q} G(y(t, x, \Delta, U^*, q)) = \\ &= \max_{q \in Q} \inf_{s \in R^n} \{ \langle s, y(t, x, \Delta, U^*, q) \rangle - G^*(s) \} = \min_{y \in \bar{O}(x, K\Delta)} \min_{s \in D^*G(y)} \{ \langle s, x \rangle + \Delta(\langle s, A(t, x) \rangle + \\ &+ \langle s, B(t, x)U^* \rangle + \max_{q \in Q} \langle s, C(t, x)q \rangle) - \langle s, y \rangle - G(y) \} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя определение позиционного управления U^* (2.4)–(2.6), получаем неравенство (2.7).

Имея неравенство (2.7) для функции u на элементе $y(\cdot)$ ломаной Эйлера, оценим качество всей траектории $x(\cdot)$, порожденной стратегией U^* .

Зафиксируем начальную позицию (t_0, x_0) . Рассмотрим ломаную Эйлера

$$x(\cdot) = \{x(t, t_0, x_0, U^*, q(\cdot)), \quad t \in \Gamma \cap T\} \quad (2.9)$$

порожденную стратегией U^* (2.4) и произвольным возмущением $t \rightarrow q(t)$

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= x(t_i + \Delta) = x(t_i) + \Delta(A(t_i, x(t_i)) + B(t_i, x(t_i))U^* + C(t_i, x(t_i))q(t_i)), \\ t_i, t_{i+1} &\in \Gamma, \quad x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

Неравенство (2.7) обеспечивает следующее утверждение для траектории $x(\cdot)$ (2.9).

Теорема 2.1. Для любых разбиений Γ , начальных позиций (t_0, x_0) и произвольных возмущений $t \rightarrow q(t)$ траектория $x(\cdot)$ (2.9), порожденная стратегией U^* (2.4), удовлетворяет оценке

$$\sigma(x(\theta)) \leq u(t_0, x_0) + L(\theta - t_0)\Delta \quad (2.10)$$

Так как аппроксимационная схема (2.2), (2.3), порождающая функцию u , сходится к функции цены w и оценка сходимости составляет величину $C\Delta^{1/2}$ [8], то соотношение (2.10) влечет неравенство

$$\sigma(x(\theta)) \leq w(t_0, x_0) + L(\theta - t_0)\Delta + C\Delta^{1/2} \quad (2.11)$$

Зафиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, можно указать шаг Δ разбиения Γ , обеспечивающий оценку

$$\sigma(x(\theta)) \leq w(t_0, x_0) + \varepsilon \quad (2.12)$$

3. Аппроксимационные схемы в дифференциальной игре с дисконтированием. Рассмотрим стационарную управляемую систему на бесконечном промежутке времени $[0, +\infty)$

$$\dot{x} = f(x, p, q) = A(x) + B(x)p + C(x)q \quad (3.1)$$

$$x \in R^n, \quad p \in P \subset R^p, \quad q \in Q \subset R^q$$

Пусть $x(\cdot) = \{x(t): t \in [0, +\infty)\}$ – произвольная траектория системы (3.1). Будем оценивать качество траектории интегральным функционалом с коэффициентом дисконтирования

$$J(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda\tau} g(x(\tau), p(\tau), q(\tau)) d\tau, \quad \lambda > 0 \quad (3.2)$$

Функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ непрерывны по совокупности переменных, удовлетворяют условию Липшица по x и ограничены постоянной K .

Стационарная функция цены $w^0: R^n \rightarrow R$ в игре (3.1), (3.2) в точках дифференцируемости удовлетворяет уравнению

$$-\lambda w^0 + H\left(x, \frac{\partial w^0}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in R^n \quad (3.3)$$

Функция $H(x, s): R^n \times R^n \rightarrow R$ из уравнения (3.3) является гамильтонианом для системы (3.1) и связана с динамикой $f(x, p, q)$ соотношением

$$\begin{aligned} H(x, s) &= \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \{ \langle s, f(x, p, q) \rangle + g(x, p, q) \} = \\ &= \langle s, A(x) \rangle + \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \{ \langle s, B(x)p + C(x)q \rangle + g(x, p, q) \} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Перенесем конструкции аппроксимационной схемы (2.2), (2.3) на стационарную функцию w^0 . Значения функции $u_\theta^m(x)$, аппроксимирующей решение $w^0(x)$, определяются следующей итерационной процедурой:

$$u_\theta^0(x) = 0, \quad x \in R^n \quad (3.5)$$

$$u_\theta^i(x) = CUS(u_\theta^{i-1})(x), \quad i = 0, \dots, m, \quad m = \theta / \Delta \quad (3.6)$$

$$CUS = \min_{y \in O(x, K\Delta)} \min_{s \in D^*(G(y))} \{ \Delta H(x, e^{-\lambda\Delta} s) + G_\Delta(y) - \langle e^{\lambda\Delta} s, y - x \rangle \}$$

Здесь $G_\Delta(y) = e^{-\lambda\Delta}(\dot{G}(y), D^*G(y))$ – супердифференциал локальной вогнутой оболочки $G(y)$ для $u_\theta^{i-1}(y)$, $y \in \bar{O}(x, K\Delta)$.

Теорема 3.1. Существует функция $\theta = \theta(\Delta)$ такая, что аппроксимация $u_\theta^m(\cdot)$ (3.5), (3.6) равномерно сходится к функции $w^0: R^n \rightarrow R$ – обобщенному решению уравнения (3.3), когда $\Delta \rightarrow 0$. При этом для некоторого $\tau \in [t_0, +\infty)$ справедлива оценка

$$\sup \|w^0(x) - u_\theta^m(x)\| \leq C\Delta^{\gamma/2} \quad (3.7)$$

Числа C и $\gamma \in (0, 1)$ определяются из условия непрерывности по Гельдеру [12]

Доказательство. Сведем стационарную систему с интегральным функционалом платы к системе вида (1.3), (1.4), путем добавления к системе (3.1) $(n+1)$ -го уравнения, задающего в дифференциальной форме функционал (3.2)

$$\dot{\xi} = k(t, \xi, p, q) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, p, q) \\ e^{-\lambda t} g(x, p, q) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\xi(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} = \xi_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\xi = (x, z) \in R^{n+1}, \quad t \in [0, +\infty], \quad p \in P, \quad q \in Q, \quad \lambda > 0$$

Функционал платы определим соотношением

$$J^*(\xi(\cdot)) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} z(\theta) \quad (3.9)$$

Здесь $z(\theta)$ – значение $(n+1)$ -й координаты движения $\xi(\cdot)$ системы (3.8) в момент времени θ . Отметим, что при $z_0 = 0$ значения функционалов J (3.2) и J^* (3.9) совпадают.

Рассмотрим игру (3.8), (3.9) в классах позиционных стратегий первого игрока $(t, \xi) \rightarrow U(t, \xi): R^{n+1} \rightarrow P$ и контрстратегий $(t, \xi, p) \rightarrow V(t, \xi, p): R^{n+1} \times P \rightarrow Q$ второго игрока. Множества стратегий U и V обозначим символами U и V соответственно. Основываясь на известных результатах [1, 2], можно показать, что игра (3.8), (3.9) имеет цену

$$w^\xi(t_0, \xi_0) = \inf_U \sup_{\xi_1(\cdot)} \lim_{\theta \rightarrow +\infty} z_1(\theta) = \sup_V \inf_{\xi_2(\cdot)} \lim_{\theta \rightarrow +\infty} z_2(\theta) \quad (3.10)$$

$$U \in U, \quad V \in V; \quad \xi_1(\cdot) = \begin{pmatrix} x_1(\cdot) \\ z_1(\cdot) \end{pmatrix}; \quad \xi_2(\cdot) = \begin{pmatrix} x_2(\cdot) \\ z_2(\cdot) \end{pmatrix}$$

Супремум по $\xi_1(\cdot)$ и инфимум по $\xi_2(\cdot)$ в (3.10) вычисляются на множествах $X_1(t_0, \xi_0, U)$, $X_2(t_0, \xi_0, V)$, элементами которых являются движения $\xi_1(\cdot)$, $\xi_2(\cdot)$ системы (3.8), порожденные стратегией U или контрстратегией V .

Известно [12], что функции цены $w^0(x)$ и $w^\xi(t, \xi)$ связаны соотношением

$$w^\xi(t, \xi) = w^\xi(t, x, z) = z + e^{-\lambda t} w^0(x), \quad w^0(x) = w^\xi(0, x, 0) \quad (3.11)$$

$$x \in R^n, \quad z \in R, \quad t \in [0, +\infty)$$

Рассмотрим промежуток времени $T = [0, \theta]$. Пусть $w_\theta^\xi: T \times R^{n+1} \rightarrow R^1$ – функция цены в игре конечной продолжительности θ ($\theta \in [t_0, +\infty]$) с динамикой (3.8) и функционалом платы

$$J_\theta^*(\xi(\cdot)) = z(\theta) \quad (3.12)$$

Для функций цены w^ξ , w_θ^ξ имеем оценку

$$\sup ||w^\xi(t, \xi) - w_\theta^\xi(t, \xi)|| \leq K\lambda^{-1}e^{-\lambda\theta}, \quad \theta \in [0, +\infty) \quad (3.13)$$

Функция w_θ^ξ цена в игре (3.8), (3.12) с фиксированным моментом окончания, поэтому для ее аппроксимации будем использовать попятную процедуру с конечно-разностным оператором CU (2.1). Отрезок времени T разбивается на m равных частей с шагом $\Delta > 0$ так, что $\theta = m\Delta$. В момент времени θ аппроксимации $u_\theta^\xi(t, \cdot)$ определяется формулой

$$u_\theta^\xi(\theta, \xi) = z, \quad (\theta, \xi) \in R^{n+1}, \quad z \in R^1 \quad (3.14)$$

Предположим далее, что в момент $(i+1)\Delta$ аппроксимация $u_\theta^\xi((i+1)\Delta, \cdot)$ ($i = 0, \dots, m-1$) построена. Определим аппроксимацию $u_\theta^\xi(i\Delta, \cdot)$ в момент времени $i\Delta$ формулой

$$u_\theta^\xi(i\Delta, \xi) = \max_{\eta \in \bar{O}(\xi, 2K\Delta)} \max_{l \in D^*G(\eta)} \{\Delta H(i\Delta, \xi, l) + G(\eta) - \langle l, \eta - \xi \rangle\}, \quad \xi \in R^{n+1}, \quad r > 2K \quad (3.15)$$

Функция $\eta \rightarrow G(\eta): \bar{O}(\xi, r\Delta) \rightarrow R$ – локальная вогнутая оболочка функции $u_\theta^\xi(i\Delta, \xi)$. Множество $D^*G(\eta)$ – супердифференциал функции $G(\eta)$ в точке η . Функция $H(t, \xi, l) = R^{n+1} \times R^{n+1} \rightarrow R$ из уравнения (3.15) является гамильтонианом расширенной системы (3.8) и связана с динамикой $k(t, \xi, p, q)$ соотношением

$$H(t, \xi, l) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \langle l, k(t, \xi, p, q) \rangle \quad (3.16)$$

Согласно (3.11) функция цены, а следовательно, и ее локальная выпуклая оболочка обладают свойством линейности по $(n+1)$ -й переменной z . Вектор l , таким образом, имеет структуру $l = (s, 1)$, а гамильтониан определяется равенством

$$\begin{aligned} H(t, \xi, l) &= \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \{ \langle s, f(x, p, q) \rangle + e^{-\lambda t} g(x, p, q) \} = \\ &= \langle s, A(x) \rangle + \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \{ \langle s, B(x)p + C(x)q \rangle + e^{-\lambda t} g(x, p, q) \} \end{aligned}$$

Сравнивая формулы для аппроксимаций $u_\theta^\xi(t, \cdot)$ (3.14), (3.15) и u_θ^m (3.5), (3.6), получаем соотношение

$$u_\theta^\xi(t, \xi) = z + e^{-\lambda t} u_\theta^m(x) \quad (3.17)$$

Известно [7, 8], что для аппроксимационной схемы на конечном промежутке времени T имеет место сходимость с оценкой

$$\sup ||w_\theta^\xi(0, x, 0) - u_\theta^m(x)|| \leq \Delta^{1/2} L \int_0^\theta e^{(L-\lambda)\tau} d\tau \quad (3.18)$$

Учитывая (3.11), (3.17) и (3.13), (3.18), получаем неравенство

$$\sup ||w_\theta^0(x) - u_\theta^m(0, x)|| \leq \Delta^{1/2} L \int_0^\theta e^{(L-\lambda)\tau} d\tau + K\lambda^{-1} e^{-\lambda\theta} \quad (3.19)$$

Минимизируя правую часть (3.19) по θ , выводим необходимое соотношение (3.7).

4. Синтез стационарных стратегий. Предположим, что функция u_θ^m построена по аппроксимационной схеме (3.5), (3.6). Определим значение позиционного управления $U^* = U^*(x)$ в точке $x \in R^n$

$$\begin{aligned} U^* = U^*(x) &= \arg \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \{ \langle s^*, f(x, p, q) \rangle + g(x, p, q) \} = \\ &= \arg \min_{p \in P} \{ \langle s^*, B(x)p \rangle + \max_{q \in Q} \{ \langle s^*, C(x)q \rangle + g(x, p, q) \} \} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$s^* = s^*(x, y^*) = \arg \min_{s \in D^*(G(y))} \{ \Delta H(x, e^{-\lambda\Delta} s) + G_\Delta(y^*) - \langle e^{-\lambda\Delta} s, y^* - x \rangle \} \quad (4.2)$$

$$y^* = y^*(x) = \arg \min_{y \in O(x, K\Delta)} \min_{s \in D^*(G(y))} \{ \Delta H(x, e^{-\lambda\Delta} s) + G_\Delta(y) - \langle e^{-\lambda\Delta} s, y - x \rangle \} \quad (4.3)$$

Для точек

$$\xi = (x, z), \quad \eta(t, \xi, \Delta, U^*, q) = (y(x, \Delta, U^*, q), z(t, x, \Delta, U^*, q))$$

$$y(x, \Delta, U^*, q) = x + \Delta(A(x) + B(x)U^* + C(x)q)$$

$$z(t, x, \Delta, U^*, q) = z + \Delta e^{-\lambda t} g(x, U^*, q), \quad q \in Q$$

проанализируем соотношение значений $u_\theta^m(x)$ и $u_\theta^m(y(x, \Delta, U^*, q))$ аппроксимационной функции u_θ^m .

Лемма 4.1. Для управления U^* (4.1) справедливо неравенство

$$\max_{q \in Q} \{ z(t, x, \Delta, U^*, q) + e^{-\lambda(t+\Delta)} u_\theta^m(y(t, x, \Delta, U^*, q)) \} \leq z + e^{-\lambda t} u_\theta^m(x) \quad (4.4)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию G^* , сопряженную к локальной вогнутой оболочке $\eta \rightarrow G(\eta)$: $\bar{O}(\xi, 2K\Delta) \rightarrow R$. В силу вогнутости функции G и G^* имеем цепочку неравенств для любого $q \in Q$

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{\xi}(t+\Delta, \eta(t, \xi, \Delta, U^*, q)) &\leq G(\eta(t, \xi, \Delta, U^*, q)) \leq \max_{q \in Q} G(\eta(t, \xi, \Delta, U^*, q)) = \\ &= \max_{q \in Q} \inf_{l \in R^{n+1}} \{ \langle l, \eta \rangle - G^*(\eta) \} = \max_{q \in Q} \min_{\eta \in \bar{O}(\xi, 2K\Delta)} \min_{l \in D^*G(\eta)} \{ \langle l, \eta \rangle - \inf_{\eta \in R^{n+1}} \{ \langle l, \eta \rangle - G(\eta) \} \} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из свойства (3.11) для функции цены расширенной системы (3.8) следует, что ее локальная вогнутая оболочка G удовлетворяет соотношению

$$G(\eta(t, \xi, \Delta, U^*, q)) = z(t, x, \Delta, U^*, q) + e^{-\lambda(t+\Delta)} G(y(t, x, \Delta, U^*, q))$$

а вектор l имеет структуру

$$l = (e^{-\lambda(t+\Delta)} s, 1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle l, \eta \rangle &= \langle e^{-\lambda(t+\Delta)} s, x \rangle + \Delta \left(\langle e^{-\lambda(t+\Delta)} s, A(x) \rangle + \right. \\ &\left. + \langle e^{-\lambda(t+\Delta)} s, B(x)U^* \rangle + \langle e^{-\lambda(t+\Delta)} s, C(x)q \rangle \right) + z + \Delta e^{-\lambda t} g(x, U^*, q) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Отметим, что при $l \in D^*G(\eta)$ для сопряженной функции $G^*(\eta)$ верно равенство

$$\inf_{\eta \in R^{n+1}} \{ \langle l, \eta \rangle - G^*(\eta) \} = \langle e^{-\lambda(t+\Delta)} s, y \rangle - e^{-\lambda(t+\Delta)} G(y) \quad (4.7)$$

Используя теорему о минимаксах и соотношения (4.5)–(4.7), получаем неравенство

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{\xi}(t+\Delta, \eta(t, \xi, \Delta, U^*, q)) &\leq z + e^{-\lambda t} \min_{y \in O(x, K\Delta)} \min_{s \in D^*(G(y))} \left(\langle e^{-\lambda \Delta} s, x - y \rangle + \right. \\ &+ G_{\Delta}(y) + \Delta \left(\langle e^{-\lambda \Delta} s, A(x) \rangle + \langle e^{-\lambda \Delta} s, B(x)U^* \rangle + \right. \\ &\left. \left. + \max_{q \in Q} \left\{ \langle e^{-\lambda \Delta} s, C(x)q \rangle + g(x, U^*, q) \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Учитывая определение позиционного управления U^* (4.1)–(4.3), получаем неравенство (4.4).

Оценим качество всей траектории $x(\cdot)$, порожденной стратегией U^* (4.1) и произвольным возмущением $\tau \rightarrow q(\tau)$

$$x(\cdot) = \{x(t, x_0, U^*, q(\cdot)), t \in \Gamma \cap [0, +\infty]\}$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta) = x(t_i) + \Delta(A(x(t_i)) + B(x(t_i))U^* + C(x(t_i))q(t_i)), \quad (4.9)$$

$$t_i, t_{i+1} \in \Gamma, \quad x(0) = x_0$$

Теорема 4.1 Для любых разбиений Γ , начальных позиций x_0 и произвольных возмущений $\tau \rightarrow q(\tau)$ траектория $x(\cdot)$ (4.9), порожденная стратегией U^* (4.1), удовлетворяет оценке

$$J(x(\cdot), U^*, q(\cdot)) < w^0(x_0) + C\Delta^{\gamma/2} \quad (4.10)$$

Зафиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, можно указать шаг Δ разбиения Γ , обеспечивающий оценку

$$J(x(\cdot), U^*, q(\cdot)) < w^0(x_0) + \varepsilon \quad (4.11)$$

Доказательство теоремы аналогично выкладкам к теоремам 2.1, 3.1

5. Соотношения между шагами аппроксимационной сеточной схемы. Реально аппроксимационная процедура (2.2), (2.3) может быть реализована не в каждой точке $(t, x) \in G_r$, $t \in \Gamma$, а только в узлах сетки $GR(t)$. Будем полагать, что сетка $GR(t)$, $t \in \Gamma$ равномерная и прямоугольная

$$GR(t) = \{x \in R^n : (t, x) \in G_r, x = \sum (m_1 e_1 + \dots + m_n e_n) \gamma \Delta\} \quad (5.1)$$

$$m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = 1, \dots, n$$

$$e_i = (e_i^1, \dots, e_i^n), e_i^i = 1, e_i^j = 0, i = 1, \dots, n, i \neq j$$

Значения оператора CU будем определять только в узлах y_j сетки $GR(t)$ и линейно интерполировать согласно заданному симплицальному разбиению Ω

$$CU(t, \Delta, w)(y) = \sum_{j=0}^n \alpha_j CU(t, \Delta, w)(y_j) \quad (5.2)$$

$$y = \sum \alpha_j y_j, y_j \in GR(t), \alpha_j \geq 0, j = 0, \dots, n, \sum \alpha_j = 1$$

Числа $\alpha_j = \alpha_j(\Omega)$ и узлы $y_i = y_i(\Omega)$ определяются в соответствии с разбиением Ω .

Рассмотрим аппроксимационную схему с конечно-разностным оператором CU (5.2) для разбиения Γ отрезка T с шагом Δ

$$u^*(\theta, y) = \sigma(y) = \sum \alpha_j \sigma(y_j), y = \sum \alpha_j y_j$$

$$\sum \alpha_j = 1, \alpha_j = \alpha_j(\Omega) \geq 0, y_j = y_j(\Omega) \in GR(\theta), j = 0, \dots, n$$

$$u(t, x) = CU(t, t_{i+1} - t, u(t_{i+1}, \cdot))(x)$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}), i = 0, \dots, N-1$$

Определим сначала значение управления $U^* = U^*(t, x)$ в узлах сетки $x \in GR(t)$, $t \in \Gamma$ на основе оператора $CU(t, \Delta, u(t + \Delta, \cdot))(x)$ (2.4)–(2.6). Стратегию $U^c(t, y)$ в точке y определим кусочно-постоянной интерполяцией значений $\{U^*(t, x), x \in GR(t), t \in \Gamma\}$ (2.4), вычисленных в ближайших узлах x сетки $GR(t)$

$$U^c(t, y) = U^*(t, x), x = x(y) = \arg \min_{z \in GR(t)} \|y - z\| \quad (5.3)$$

Рассмотрим ломаную Эйлера

$$y(\cdot) = \{y(t, t_0, y_0, U^c, q), t \in \Gamma\} \quad (5.4)$$

порожденную стратегией U^c (5.3) и произвольным возмущением $\tau \rightarrow q(\tau)$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + \Delta) = y(t_i) + \Delta(A(t_i, y(t_i)) + B(t_i, y(t_i))U^c + C(t_i, y(t_i))q(t_i)), t_i, t_{i+1} \in \Gamma, y(t_0) = y_0$$

Определим для траектории $y(\cdot)$ (5.4) сопутствующие точки $x_-(t_i), x_+(t_{i+1})$ соотношениями

$$x_-(t_i) = x(y(t_i)) = \arg \min_{z \in GR(t)} \|y(t_i) - z\| \quad (5.5)$$

$$x_+(t_{i+1}) = x_-(t_i) + \Delta(A(t_i, x_-(t_i)) + B(t_i, x_-(t_i))U^c + C(t_i, x_-(t_i))q(t_i)), t_i, t_{i+1} \in \Gamma \quad (5.6)$$

Лемма 5.1. Для траектории $y(\cdot)$ (5.4) и сопутствующих точек $x_-(t_i)$, $x_+(t_{i+1})$ (5.5), (5.6) справедлива оценка

$$\|y(t_{i+1}) - x_+(t_{i+1})\| < (1 + L\Delta)\|y(t_i) - x_-(t_i)\| \quad (5.7)$$

Лемма 5.2. Пусть параметр γ сетки $GR(t)$, $t \in \Gamma$ является бесконечно малой величиной по сравнению с шагом разбиения Δ

$$\gamma = \epsilon(\Delta), \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \epsilon(\Delta) = 0$$

например,

$$\gamma = \rho\Delta^a, \quad a > 0, \quad \rho > 0 \quad (5.8)$$

т.е. шаг h сетки $GR(t)$ по фазовым переменным x ($i = 1, \dots, n$) является бесконечно малой величиной

$$h = \rho\Delta^{1+a} \quad (5.9)$$

более высокого порядка малости, чем шаг Δ разбиения Γ временного интервала T .

Тогда

$$u(t_i, y(t_i)) \geq u(t_{i+1}, y(t_{i+1})) - L_w \frac{n^{1/2}}{2} (2 + L\Delta) \rho \Delta^a \Delta \quad (5.10)$$

Доказательство. Из непрерывности по Липшицу функции u и соотношений (2.7), (5.7) следуют неравенства

$$\begin{aligned} u(t_i, y(t_i)) &> u(t_i, x_-(t_i)) - L_w \|y(t_i) - x_-(t_i)\| > u(t_{i+1}, x_+(t_{i+1})) - L_w \|y(t_i) - x_-(t_i)\| > \\ &> u(t_{i+1}, y(t_{i+1})) - L_w (2 + L\Delta) \|y(t_i) - x_-(t_i)\| \end{aligned}$$

Соотношение (5.8) влечет неравенство

$$\|y(t_i) - x_-(t_i)\| < \frac{n^{1/2}}{2} \rho \Delta^a \Delta \quad (5.11)$$

Последние два неравенства обеспечивают оценку (5.10).

Используя оценку (5.10), можно доказать следующее утверждение для траектории $y(\cdot)$ (5.4), порожденной позиционным управлением (5.3).

Теорема 5.1. Для любых разбиений Γ , сеток $GR(t)$, $t \in \Gamma$ с параметрами (5.8) высокого порядка малости, начальных позиций (t_0, y_0) и произвольных возмущений $\tau \rightarrow q(\tau)$ траектория $y(\cdot)$ (5.4), порожденная стратегией U^c (5.3) с кусочно-постоянной интерполяцией, удовлетворяет оценке

$$\sigma(y(\theta)) \leq u(t_0, y_0) + \varphi(\Delta) \quad (5.12)$$

$$\varphi(\Delta) = (\theta - t_*) L_w \frac{n^{1/2}}{2} (2 + L\Delta) \rho \Delta^a, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varphi(\Delta) = 0$$

и, следовательно,

$$\sigma(y(\theta)) < w(t_0, y_0) + C^* \Delta^{1/2} + \varphi(\Delta) \quad (5.13)$$

Зафиксировав произвольное число $\epsilon > 0$, можно указать шаг Δ разбиения Γ , обеспечивающий оценку

$$\sigma(y(\theta)) \leq w(t_0, y_0) + \epsilon \quad (5.14)$$

Замечание 5.1. Возможны другие кусочно-постоянные интерполяции стратегии $U^* = U^*(t, x)$ (2.4). Например, стратегию $U^e(t, y)$ можно доопределить в соответствии с симплицальным разбиением Ω значениями управлений $U^*(t, x)$, вычисленными в узлах x сетки $GR(t)$ с наименьшими значениями функции u

$$U^e(t, y) = U^*(t, x), \quad x = x(y) = \arg \min_{y_j} u(y_j) \quad (5.15)$$

$$y_j \in GR(t), \quad \sum \alpha_j y_j = y, \quad \sum \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \alpha_j = \alpha_j(\Omega)$$

В этом случае оценки (5.10) и (5.13) перепишутся в виде

$$u(t_i, y(t_i)) \geq u(t_{i+1}, y(t_{i+1})) - L_w n^{1/2} (1 + L\Delta) \rho \Delta^a \Delta \quad (5.16)$$

$$\sigma(y(\theta)) < w(t_0, y_0) + C^* \Delta^{1/2} + \phi(\Delta) \quad (5.17)$$

$$\phi(\Delta) = (\theta - t_0) L_w n^{1/2} (1 + L\Delta) \rho \Delta^a$$

Отметим, что аналогичные результаты можно получить для траектории $y(\cdot)$ в стационарной задаче с дисконтированием (3.1)

Теорема 5.2. Для любых разбиений Γ , сеток $GR(t)$, $t \in \Gamma$ с параметрами (5.8) высокого порядка малости, начальных позиций y_0 и произвольных возмущений $\tau \rightarrow \rightarrow q(\tau)$ траектория $y(\cdot)$, порожденная стратегией U^c (5.3) с кусочно-постоянной интерполяцией, удовлетворяет оценке

$$J(y(\cdot), U^c, q(\cdot)) < w^0(y_0) + C(\Delta^{1/2} + R(\Delta)\Delta^a)^{\lambda/(L+1)} \quad (5.18)$$

$$R(\Delta) = \frac{n^{1/2}}{2} \rho (2 + 3L\Delta)$$

Зафиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, можно указать шаг Δ разбиения Γ , обеспечивающий оценку

$$J(y(\cdot), U^c, q(\cdot)) < w^0(y_0) + \varepsilon \quad (5.19)$$

Доказательство. Вновь обратимся к аппроксимационной функции u_θ^ξ расширенной системы (3.8). При выполнении условий леммы 6.2 для u_θ^ξ и траектории $\eta(\cdot) = (y(\cdot), z(\cdot))$ верно неравенство

$$u_\theta^\xi(t_i, \eta(t_i)) > u_\theta^\xi(t_{i+1}, \eta(t_{i+1})) - L_w^\xi \frac{n^{1/2}}{2} (2 + 3L\Delta) \rho \Delta^{a+1}$$

где константа Липшица для аппроксимационной функции определяется соотношением

$$L_w^\xi = \frac{L}{L - \lambda} (e^{(L-\lambda)\theta} - 1)$$

Тогда на всей траектории $\eta(\cdot)$ справедливо неравенство

$$u_\theta^\xi(t_0, \eta(t_0)) > J_\theta^*(\cdot) - R(\Delta) \Delta^a \theta (e^{(L-\lambda)\theta} - 1)$$

Используя технику доказательства теоремы 2.1, получаем оценку

$$J(y(\cdot)) < w^0(y_0) + \phi(\theta, \Delta)$$

$$\phi(\theta, \Delta) = \frac{2K}{\lambda} e^{-\lambda\theta} + \Delta^{1/2} \frac{L}{L - \lambda} (e^{(L-\lambda)\theta} - 1) + R(\Delta) \Delta^a \frac{L}{L - \lambda} (e^{(L-\lambda)\theta} - 1)$$

В случае $L - \lambda > 0$ функция $\phi(\theta, \Delta)$ – бесконечно малая величина при $\Delta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \infty$.

В противном случае заменим $\phi(\theta, \Delta)$ большей функцией

$$\phi(\theta, \Delta) = \frac{2K}{\lambda} e^{-\lambda\theta} + (\Delta^{1/2} + R(\Delta)\Delta^a) \frac{L}{L-\lambda} (e^{(L-\lambda)\theta} - 1)$$

Для функции $\phi(\theta)$ существует точка минимума по θ

$$e^\theta = \left(\frac{2K(L-\lambda)}{L(L-\lambda+1)(\Delta^{1/2} + R(\Delta)\Delta^a)} \right)^{1/(L+1)} \quad (5.20)$$

Соотношение (5.20) определяет вид второго слагаемого в теореме 5.2.

6. Вычислительные эксперименты. В биологических процессах [13] эволюция взаимодействия двух популяций развивается в соответствии с процессом накопления опыта в повторяющихся ситуациях, где каждый участник действует по одному из двух возможных для его популяции вариантов поведения. Пусть x – относительная часть первой популяции, придерживающаяся в данный момент времени первого варианта поведения (стратегии), $0 \leq x \leq 1$, $(1-x)$ – соответственно второго варианта. Параметр y , $(1-y)$ имеет аналогичную интерпретацию для второй популяции. Считаем, что интересы популяций задаются матрицами выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Средние выигрыши коалиций определяются функциями

$$g_1 = C_a xy - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22}, \quad g_2 = C_b xy - \beta_1 x - \beta_2 y + b_{22}$$

$$C_a = 12, \quad \alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 3, \quad C_b = -6, \quad \beta_1 = -3, \quad \beta_2 = -4$$

Процесс моделируется репликаторной динамикой [13]

$$\dot{x} = x(1-x)(C_a y - \alpha_1), \quad \dot{y} = y(1-y)(C_b x - \beta_2) \quad (6.1)$$

в которой скорости изменения групп, разыгрывающих разные стратегии в одной популяции, линейно связаны с выигрышами популяций

$$\ln \left(\frac{x}{1-x} \right)' = (C_a y - \alpha_1) = \frac{\partial g_1}{\partial x}, \quad \ln \left(\frac{y}{1-y} \right)' = (C_b x - \beta_2) = \frac{\partial g_2}{\partial y} \quad (6.2)$$

Анализ произвольной эволюционной системы с гладкой динамикой, в том числе и репликаторной (6.1), проведен в [14]. Здесь предлагается исследовать динамическую игровую постановку, в которой управляющие стратегии могут быть разрывными функциями от позиции.

Предположим, что скорости p, q изменения структуры популяций являются управляющими параметрами

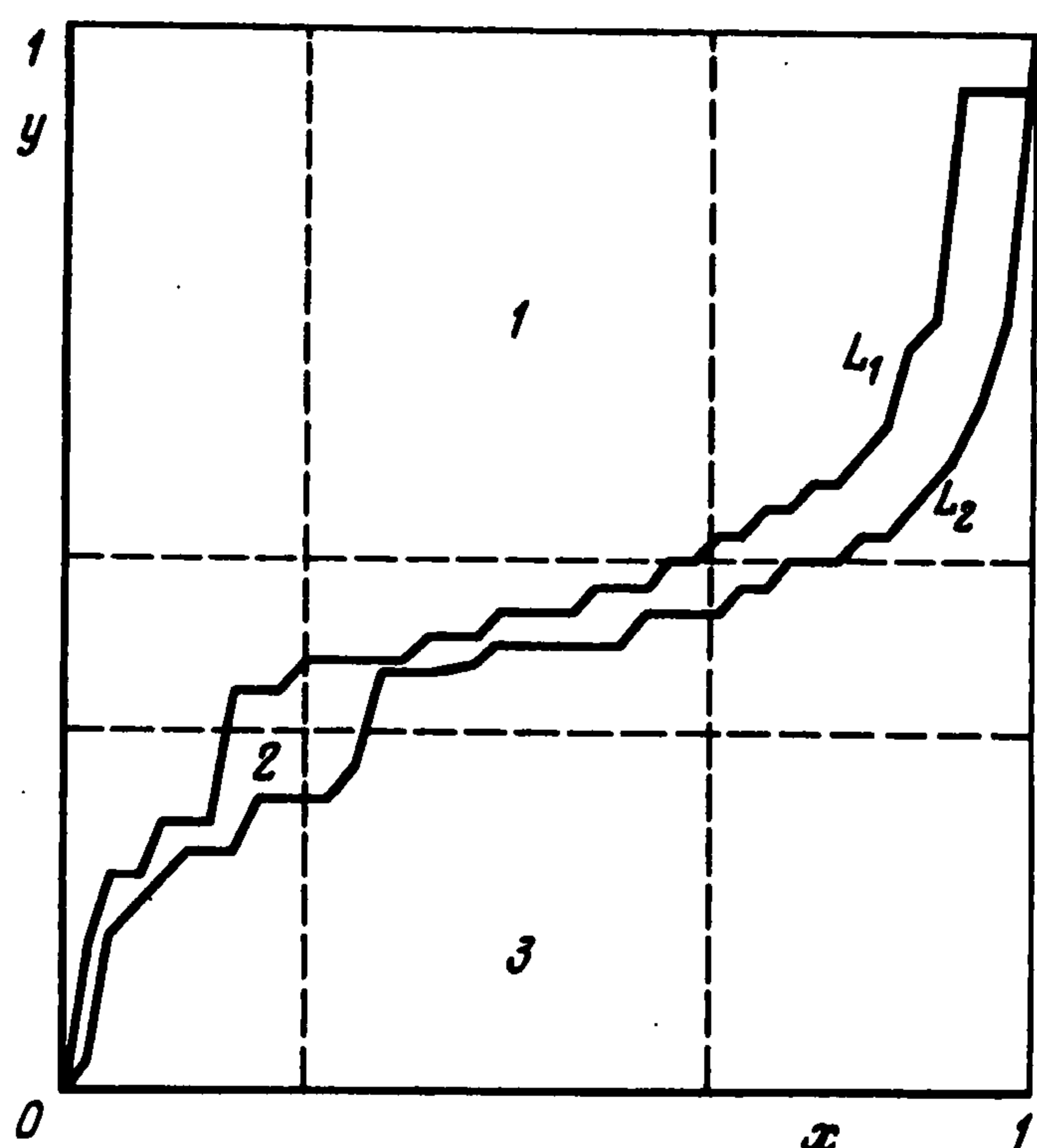
$$\dot{x} = x(1-x)p, \quad \dot{y} = y(1-y)q \quad (6.3)$$

и ограничения на p, q связаны с репликаторной динамикой (6.1)

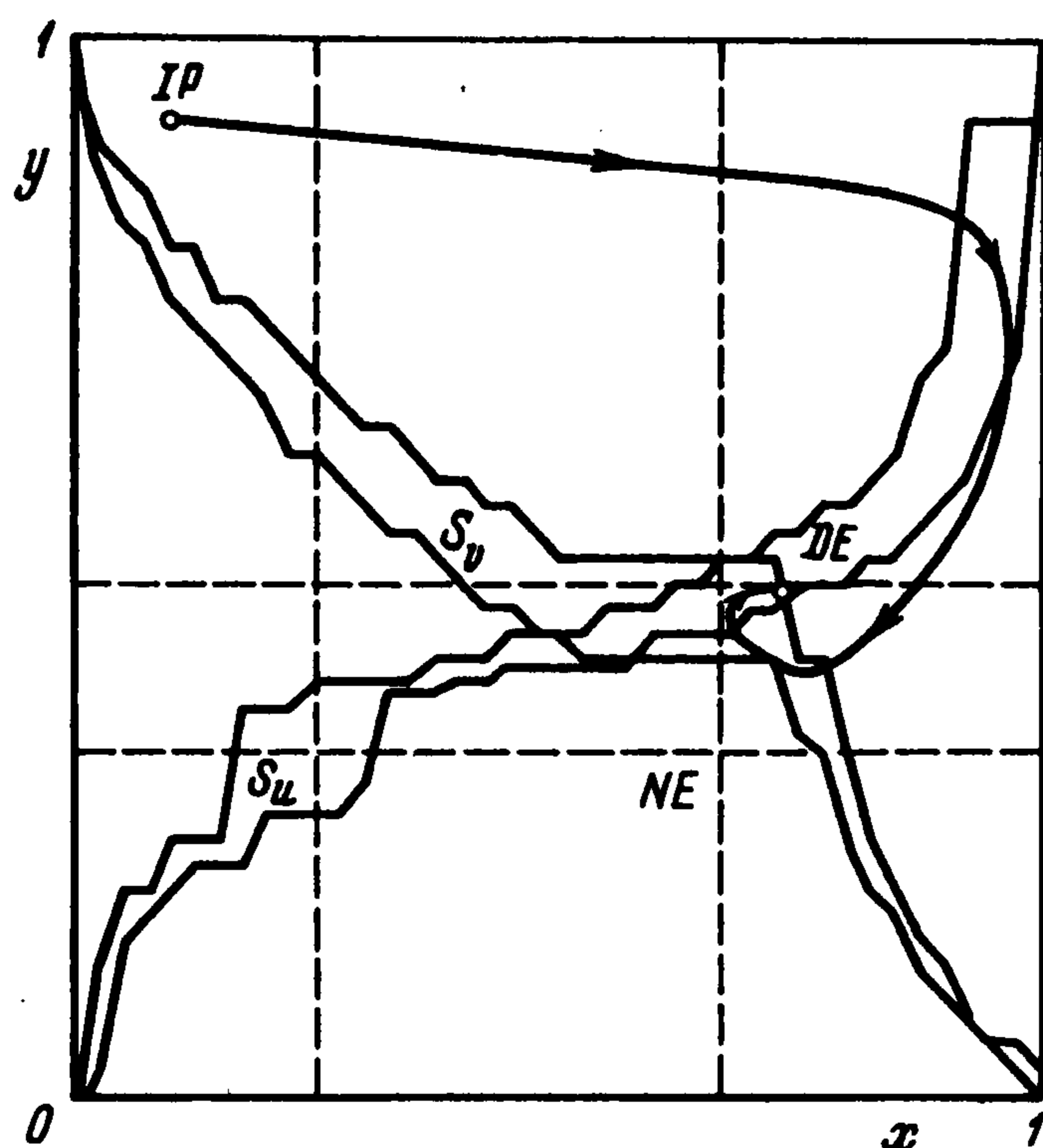
$$p \in P, \quad P = [\min\{0, C_a\} - \alpha_1, \max\{0, C_a\} - \alpha_1]$$

$$q \in Q, \quad Q = [\min\{0, C_b\} - \beta_2, \max\{0, C_b\} - \beta_2]$$

Рассмотрим задачу о построении оптимальных гарантирующих стратегий в неантогонистической игре и равновесной по Нэшу траектории, порожденной этими стратегиями.



Фиг. 1



Фиг. 2

Определим выигрыш каждой коалиции интегральным функционалом с коэффициентом дисконтирования λ . Этот функционал можно рассматривать как глобальный выигрыш на бесконечном промежутке времени $[0, +\infty]$

$$J_i = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} g_i(x(t), y(t)) dt, \quad i = 1, 2 \quad (6.4)$$

Для построения оптимальных управлений вышеизложенной игры необходимо рассмотреть две однотипные задачи гарантированного управления относительно функционалов J_1, J_2 [15]. Рассмотрим, например, первую из них. Функция цены $(x, y) \rightarrow w_1(x, y)$ является решением уравнения Гамильтона – Якоби

$$-\lambda w_1(x, y) + g_1(x, y) + x(1-x) \max_{p \in P} \frac{\partial w_1}{\partial x} p + y(1-y) \min_{q \in Q} \frac{\partial w_1}{\partial y} q = 0 \quad (6.5)$$

Аппроксимационная схема для решения уравнения Гамильтона – Якоби определяется следующим образом.

Рассмотрим отрезок T и разбиение $\Gamma = [t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = \theta]$ с шагом Δ . Зададим аппроксимационную функцию W следующей итерационной процедурой. Полагаем $W(T, x, y) = 0$. Пусть в некоторый момент времени $t + \Delta$ функция $W(t + \Delta, x, y)$ известна. В момент t функция $W(t, x, y)$ определяется соотношением

$$W(t, x, y) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \{ \Delta g_1(x, y) + (1 - \lambda \Delta) W(t + \Delta, x + \Delta x(1-x)p, y + \Delta y(1-y)q) \}$$

При $t = 0$ получим аппроксимацию $W(0, x, y)$ для решения $w_1(x, y)$.

Параллельно с вычислением функции цены строилась максимизирующая стратегия первой коалиции u^0 . Структура этой стратегии изображена на фиг. 1. Квадрат фазового состояния расслаивается на три области. В первой области, расположенной выше кривой L_1 , стратегия u^0 принимает крайнее значение $u^0 = C_a - \alpha_1 = 8$. Это означает, что для наибольшего успеха популяции надлежит с максимальной скоростью соориентировать участников на первый вариант поведения. В третьей области, расположенной ниже кривой L_2 , значение стратегии u^0 достигает другого крайнего значения $u^0 = -\alpha_1 = -4$, и участники ориентируются на второй вариант. Область с номером 2, располагающаяся между кривыми L_1, L_2 , представляет собой промежуточный слой, в котором значения управления не достигают крайних значений.

Аналогично были построены аппроксимация функции цены $w_2(x, y)$ и максимизирующая стратегия второй коалиции v^0 в игре с матрицей выигрыша B .

На фиг. 2 изображены промежуточные слои S_u для стратегии u^0 , S_v для стратегии v^0 и равновесная траектория (линия со стрелками), порожденная стратегиями u^0 , v^0 для начальной позиции $IP = (0,1; 0,95)$. Эта траектория является основой конструкции динамического равновесия по Нэшу, предложенной в работе [15]. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что равновесные траектории для различных начальных позиций сходятся к стационарной точке $DE = (0,729; 0,496)$, в которой скорости управляемой системы (6.3) равны нулю $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.

Отметим, что траектории классических моделей с репликаторной динамикой (6.1) сходятся к точке статического равновесия по Нэшу $NE = (0,67; 0,33)$ или циркулируют в ее окрестности. Значение функций выигрыша $g_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) в точке DE лучше (строго больше), чем в точке статического равновесия NE . Следовательно, значения функционалов выигрыша J_i ($i = 1, 2$) на траекториях, сходящихся к точке динамического равновесия, лучше, чем на траекториях, сходящихся к точке статического равновесия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00219).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Гарнышева Г.Г., Субботин А.И. Стратегии минимаксного прицеливания в направлении квазиградиента // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 5–11.
4. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
5. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. № 1. P. 1–42.
6. Crandall M.G., Lions P.-L. Two approximations of solutions of Hamilton – Jacobi equations // Math. Comput. 1984. V. 43. № 167. P. 1–19.
7. Souganidis P.E. Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations // J. Different. Equat. 1985. V. 59. № 1. P. 1–43.
8. Тарасьев А.М. Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона – Якоби // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 22–36.
9. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
10. Мельникова Н.В., Тарасьев А.М. Среднеквадратичные обобщенные градиенты в аппроксимационных схемах // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С.
11. Dolcetta I.C. On a discrete approximation of Hamilton – Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. Optimiz. 1983. V. 10. № 4. P. 367–377.
12. Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М. Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 531–537.
13. Hofbauer J., Sigmund K. The Theory of Evolution and Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. 321 p.
14. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О дифференциально-эволюционных играх // Труды МИРАН им. В.А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 257–287.
15. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры // Екатеринбург: Наука, УрО, 1993. 185 с.