

УДК 531.38

© 1997 г. Г.В. Горр

## О ЛИНЕЙНОМ ИНВАРИАНТНОМ СООТНОШЕНИИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

На основе метода инвариантных соотношений найдены условия существования линейного инвариантного соотношения типа Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Указан частный случай, когда редуцированная система дифференциальных уравнений движения допускает дополнительный первый интеграл.

В классической задаче о движении тяжелого твердого тела Гесс [1] нашел новое решение уравнений Эйлера–Пуассона, которое имеет место для гироскопов, подвешенных в некоторой точке перпендикуляра, проведенного через центр масс к круговому сечению гирационного эллипсоида. Л.Н. Сретенский [2] обобщил решение В. Гесса на случай движения тяжелого гиростата. В дальнейшем было установлено и существование инвариантного соотношения типа Гесса в других задачах динамики. Так, найдено [3] новое решение уравнений Кирхгоффа движения тела в жидкости, которое при определенных условиях переходит в решение Гесса, установлен [4] класс движений гироскопа Гесса, подвешенного на стержне, получено [5] обобщение инвариантного соотношения Гесса в задаче о движении  $n$  тяжелых шарнирно связанных твердых тел.

Поскольку в задаче о движении тела в магнитном поле [6, 7] с учетом эффекта Барнетта–Лондона рассмотрены [8, 9] некоторые случаи существования новых алгебраических интегралов уравнений движения, исследование в этой задаче инвариантных соотношений представляет интерес.

**1. Уравнения движения.** Известно, что "нейтральный" ферромагнетик при вращении становится намагниченным вдоль оси вращения (эффект Барнетта [6]). Аналогичное явление имеет место и при вращении сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона). Магнитный момент  $\mathbf{H}$  связан с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  соотношением  $\mathbf{H} = B\boldsymbol{\omega}$  (оператор  $B$  вычислен для тел простой формы [7]).

Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона запишем в виде

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s} - B\boldsymbol{\omega}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1.1)$$

Эти уравнения допускают первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k \quad (1.2)$$

$\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость гиростата,  $\boldsymbol{\nu}$  – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести,  $\boldsymbol{\lambda}$  – гиростатический момент,  $\mathbf{s}$  – вектор центра масс гиростата,  $A, B, C$  – симметричные матрицы третьего порядка, причем  $A$  – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке.

**2. Инвариантное соотношение типа Гесса.** Поставим задачу исследования условий существования у системы (1.1) инвариантного соотношения

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{s} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{b} = \alpha_0 \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega} = (x_1, x_2, x_3)$  – вектор момента количества движения гиростата,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\alpha_0$  – некоторая постоянная. Систему координат выберем так, чтобы компоненты угловой скорости имели вид

$$\omega_l = a_{ll}x_l + a_{l3}x_3, \quad l = 1, 2 \quad (2.2)$$

$$\omega_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

а вектор  $\mathbf{s} = (0, 0, 1)$ . В формулах (2.2)  $a_{ij}$  – компоненты гирационного тензора. Тогда из (2.1) имеем

$$x_3 = \alpha_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \quad (2.3)$$

Вычислим производную от соотношения (2.3) в силу уравнений (1.1) и учтем равенство (2.3). Получим

$$\begin{aligned} & (a_{22} - a_{11})x_1x_2 + x_1(a_{23}x_3 - \lambda_2a_{11}) + x_2(\lambda_1a_{22} - a_{13}x_3) + x_3(\lambda_1a_{23} - \lambda_2a_{13}) + \\ & + x_1(n_{11}v_2 - n_{21}v_1) + x_2(n_{12}v_2 - n_{22}v_1) + x_3(n_{13}v_2 - n_{23}v_1) + \\ & + (C_{22} - C_{11})v_1v_2 + C_{12}(v_1^2 - v_2^2) + C_{23}v_1v_3 - C_{13}v_2v_3 + \\ & + x_1[a_{11}(b_2v_3 - b_3v_2) + a_{13}(b_1v_2 - b_2v_1)] + \\ & + x_2[a_{22}(b_3v_1 - b_1v_3) + a_{23}(b_1v_2 - b_2v_1)] + \\ & + x_3[a_{13}(b_2v_3 - b_3v_2) + a_{23}(b_3v_1 - b_1v_3) + a_{33}(b_1v_2 - b_2v_1)] = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$n_{1l} = B_{1l}a_{ll} + B_{13}a_{l3}, \quad n_{l3} = B_{1l}a_{l3} + B_{l2}a_{23} + B_{l3}a_{33}, \quad (2.5)$$

$$n_{2l} = B_{l2}a_{ll} + B_{23}a_{l3}, \quad l = 1, 2$$

Соотношение (2.4) должно выполняться на инвариантном многообразии (2.3), поэтому считаем, что в нем положено  $x_3 = \alpha_0 - b_1v_1 - b_2v_2 - b_3v_3$ . Тогда левая часть равенства (2.4) – функция переменных  $x_1, x_2, v_1, v_2, v_3$ . Потребуем, чтобы для всех значений этих переменных левая часть (2.4) обращалась в нуль. Тогда, приравнявая к нулю коэффициент при  $x_1, x_2$ , имеем

$$a_{22} = a_{11} \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) позволяет выбрать подвижную систему координат таким образом, чтобы имело место равенство  $a_{23} = 0$ . В силу этого центр масс гиростата лежит на перпендикуляре, проведенном через неподвижную точку к круговому сечению гирационного эллипсоида, т.е. гиростат представляет собой гироскоп Гесса [1].

Учитывая равенства (2.5), (2.6), получим два варианта условий, при выполнении которых соотношение (2.4) превращается в тождество для всех значений  $x_1, x_2$  и  $v_1, v_2, v_3$ .

Для варианта 1 к соотношениям

$$\begin{aligned} & \alpha_0 = \lambda_1 a_{11} a_{13}^{-1}, \quad \lambda_2 = 0, \quad a_{12} = a_{23} = 0, \quad a_{11} = a_{22} \\ & b_1 = \kappa_0 a_{13}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \kappa_0 a_{11}, \quad B_{12} = B_{23} = 0 \\ & B_{11} = \varepsilon_0 a_{13} + \kappa_0 a_{11}, \quad B_{22} = \kappa_0 (a_{11}^2 + a_{13}^2) a_{11}^{-1}, \quad B_{13} = -\varepsilon_0 a_{11} - \kappa_0 a_{13} \\ & C_{12} = C_{23} = 0, \quad C_{13} = \varepsilon_0 \kappa_0 a_{11} (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) \\ & C_{11} - C_{22} = \kappa_0 \varepsilon_0 a_{13} (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\epsilon_0, \kappa_0$  – некоторые произвольные параметры, необходимо добавить условие  $\lambda_1 = 0$ , а для варианта 2 в (2.7) следует положить  $\epsilon_0 = 0$ . При этом инвариантное соотношение (2.3) имеет вид

$$x_3 = \lambda_1 a_{11} a_{13}^{-1} - \kappa_0 (a_{13} v_1 + a_{11} v_3) \quad (2.8)$$

Соотношение (2.8) позволяет понизить порядок системы уравнений (1.1) и записать систему относительно переменных  $x_1, x_2, v_1, v_2, v_3$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & a_{13} x_1 x_2 - x_1 v_2 (a_{11} B_{13} + a_{13} B_{33}) + x_2 [a_{11} a_{13}^{-1} (-\lambda_2 a_{13} + \lambda_1 a_{33} - \lambda_1 a_{11}) + \\ & + a_{13} \kappa_0 (a_{11} - a_{33}) v_1 + \kappa_0 (a_{13}^2 - a_{11} a_{33} + 2a_{11}^2) v_3] + v_2 v_1 (C_{13} + \kappa_0 a_{13}^2 B_{13} + \kappa_0 a_{13} a_{33} B_{33}) + \\ & + v_2 v_3 [C_{33} - C_{22} + a_{11} \kappa_0 (a_{13} B_{13} + a_{33} B_{33})] - \\ & - v_2 a_{13}^{-1} [s a_{13} + \lambda_1 a_{11} (B_{13} a_{13} + B_{33} a_{33})] \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -x_1^2 a_{13} + x_1 [\lambda_3 a_{11} + \lambda_1 a_{13}^{-1} (a_{11}^2 - a_{13}^2 - a_{11} a_{33}) + \\ & + v_1 (\kappa_0 a_{13} a_{33} - \kappa_0 a_{11} a_{13} + a_{13} B_{33} + a_{11} B_{13}) + \\ & + v_3 (\kappa_0 a_{11} a_{33} - \kappa_0 a_{11}^2 - a_{13} B_{13} - a_{11} B_{11})] + \\ & + v_1^2 [\kappa_0 a_{13} (\kappa_0 a_{13}^2 - a_{13} B_{13} - a_{33} B_{33}) - C_{13}] + \\ & + v_3^2 [\kappa_0 a_{11} (\kappa_0 a_{11} a_{13} + a_{13} B_{11} + a_{33} B_{33}) - C_{13}] + \\ & + v_1 v_3 [\kappa_0 a_{11} (\kappa_0 a_{13}^2 - a_{13} B_{13} - a_{33} B_{33}) + \\ & + \kappa_0 a_{13} (\kappa_0 a_{11} a_{13} + a_{13} B_{11} + a_{33} B_{13}) + C_{11} - C_{33}] + \\ & + v_1 [s + \lambda_1 a_{11} a_{13}^{-1} (a_{13} B_{13} + a_{33} B_{33} - \kappa_0 a_{13}^2) - \kappa_0 a_{13} (a_{13} \lambda_3 + \lambda_1 (a_{11} - a_{33}))] - \\ & - v_3 [\lambda_1 a_{11} a_{13}^{-1} (\kappa_0 a_{11} a_{13} + a_{13} B_{11} + a_{33} B_{13}) + \kappa_0 a_{11} (a_{13} \lambda_3 + \lambda_1 (a_{11} - a_{33}))] + \\ & + \lambda_1 a_{11} a_{13}^{-1} [a_{13} \lambda_3 + \lambda_1 (a_{11} - a_{33})] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\dot{v}_1 = a_{13} v_2 x_1 - a_{11} v_3 x_2 + \lambda_1 a_{11} a_{33} a_{13}^{-1} v_2 - a_{33} \kappa_0 v_2 (a_{13} v_1 + a_{11} v_3) \quad (2.11)$$

$$\dot{v}_2 = a_{11} v_3 x_1 - a_{13} x_1 v_1 + \lambda_1 a_{11} v_3 - \lambda_1 a_{11} a_{33} a_{13}^{-1} v_1 + \kappa_0 (a_{13} v_1 + a_{11} v_3) (a_{33} v_1 - a_{13} v_3) \quad (2.12)$$

$$\dot{v}_3 = a_{11} (x_2 v_1 - x_1 v_2) - \lambda_1 a_{11} v_2 + a_{13} \kappa_0 v_2 (a_{13} v_1 + a_{11} v_3) \quad (2.13)$$

В соотношениях (2.9)–(2.13) необходимо учесть условия (2.7) для варианта 1 или варианта 2.

Уравнения (2.9)–(2.13) имеют два интеграла:

$$(x_1 + \lambda_1) v_1 + x_2 v_2 + v_3 [(\lambda_3 + \lambda_1 a_{11} a_{13}^{-1}) - \kappa_0 (a_{13} v_1 + a_{11} v_3)] = \bar{k} \quad (2.14)$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

которые следуют из (1.2) при наличии соотношения (2.3).

**3. Один частный случай.** Указанных интегралов недостаточно для сведения задачи к квадратурам. Поэтому приведем пример, когда в рамках существования линейного

интеграла (2.8) задача сводится к квадратурам. Пусть параметр  $\kappa_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ,  $B_{33} = \varepsilon_0 a_{11}^2 a_{13}^{-1}$ , тогда уравнения (2.9)–(2.13) принимают вид

$$\dot{x}_1 = a_{13}x_1x_2 + (C_{33} - C_{22})v_2v_3 - sv_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_{13}x_1^2 - (C_{33} - C_{22})v_1v_2 + sv_1$$

$$\dot{v}_1 = a_{13}v_2x_1 - a_{11}v_3x_2, \quad \dot{v}_2 = x_1(a_{11}v_3 - a_{13}v_1)$$

$$\dot{v}_3 = a_{11}(x_2v_1 - x_1v_2)$$

и в дополнение к интегралам

$$x_1v_1 + x_2v_2 = k, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

вытекающим из (2.14), допускают новый интеграл

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + (C_{33} - C_{22})v_3^2 - 2sv_3 = c$$

При  $C_{22} - C_{33} = 0$  получим классический случай Гесса [1], аналитическое и геометрическое исследования которого провели Н.Е. Жуковский [10], П.А. Некрасов [11] и А.М. Ковалев [12].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1890. B. 37. H. 2. S. 153–181.
2. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гириостата // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 292–294.
3. Харламов П.В. Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // ПММ. 1955. Т. 19. С. 231–233.
4. Горр Г.В., Кононыхин Г.А. Полурегулярная прецессия гироскопа Гесса, подвешенного на стержне, и ее обобщение в задаче о движении системы двух твердых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 2. С. 48–51.
5. Горр Г.В., Рубановский В.Н. Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 707–712.
6. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Физматгиз. 1963. 696 с.
7. Егармин И.Е. О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела // Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: МФТИ, 1983. С. 95–96.
8. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.
9. Самсонов В.А. О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 32–34.
10. Жуковский Н.Е. Локсодромический маятник Гесса // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1893. Т. 5. Вып. 2. С. 37–45.
11. Некрасов П.А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Мат. сб. 1896. Т. 18. Вып. 2. С. 161–274.
12. Ковалев А.М. О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1969. Вып. 1. С. 12–27.