

УДК(531.352+531.36):531.4

© 1997 г. О.В. Холостова

О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СПУТНИКА ПРИ РЕЗОНАНСЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассматриваются плоские нелинейные колебания спутника – твердого тела относительно центра масс на эллиптической орбите малого эксцентриситета. Предполагается, что утроенная частота малых колебаний спутника на круговой орбите близка к частоте обращения его центра масс. Методами классической теории возмущений исследование сведено к рассмотрению модельной системы, описываемой гамильтонианом, характерным для задач о движении гамильтоновых систем с одной степенью свободы в случае резонанса третьего порядка. Проведен подробный анализ такой системы. При помощи теории периодических движений Пуанкаре и КАМ-теории результаты исследования модельной системы перенесены на полную систему и применены к задаче о движении спутника. В зависимости от инерционного параметра спутника и эксцентриситета орбиты рассмотрен вопрос о существовании, числе и устойчивости периодических движений, имеющих период, равный утроенному периоду обращения центра масс спутника по орбите. Показана ограниченность движений спутника, начинающихся в окрестности его эксцентриситетных колебаний, и дана оценка размеров этой окрестности.

1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана. Плоские нелинейные колебания спутника – твердого тела относительно центра масс на эллиптической орбите описываются уравнением [1]

$$(1 + e \cos v) d^2 \psi / dv^2 - 2e \sin v d\psi / dv + \omega_0^2 \sin \psi \cos \psi = 2e \sin v \quad (1.1)$$

Здесь e – эксцентриситет орбиты центра масс спутника, v – истинная аномалия, $\omega_0^2 = 3(C - A)/B$, где A, B, C – главные центральные моменты инерции тела, B – момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости орбиты; ψ – угол между радиусом-вектором центра масс спутника относительно притягивающего центра и осью, соответствующей моменту инерции A .

Если эксцентриситет орбиты мал и $\omega_0 \neq 1$, то уравнение (1.1) имеет [1] 2π -периодическое решение вида

$$\psi = \psi^* = \frac{2e \sin v}{\omega_0^2 - 1} + O(e^2) \quad (1.2)$$

которое при $e = 0$ переходит в решение $\psi^* = 0$, отвечающее устойчивому равновесию спутника в орбитальной системе координат. Вопрос об устойчивости эксцентриситетных колебаний (1.2) подробно изучен [1, 2].

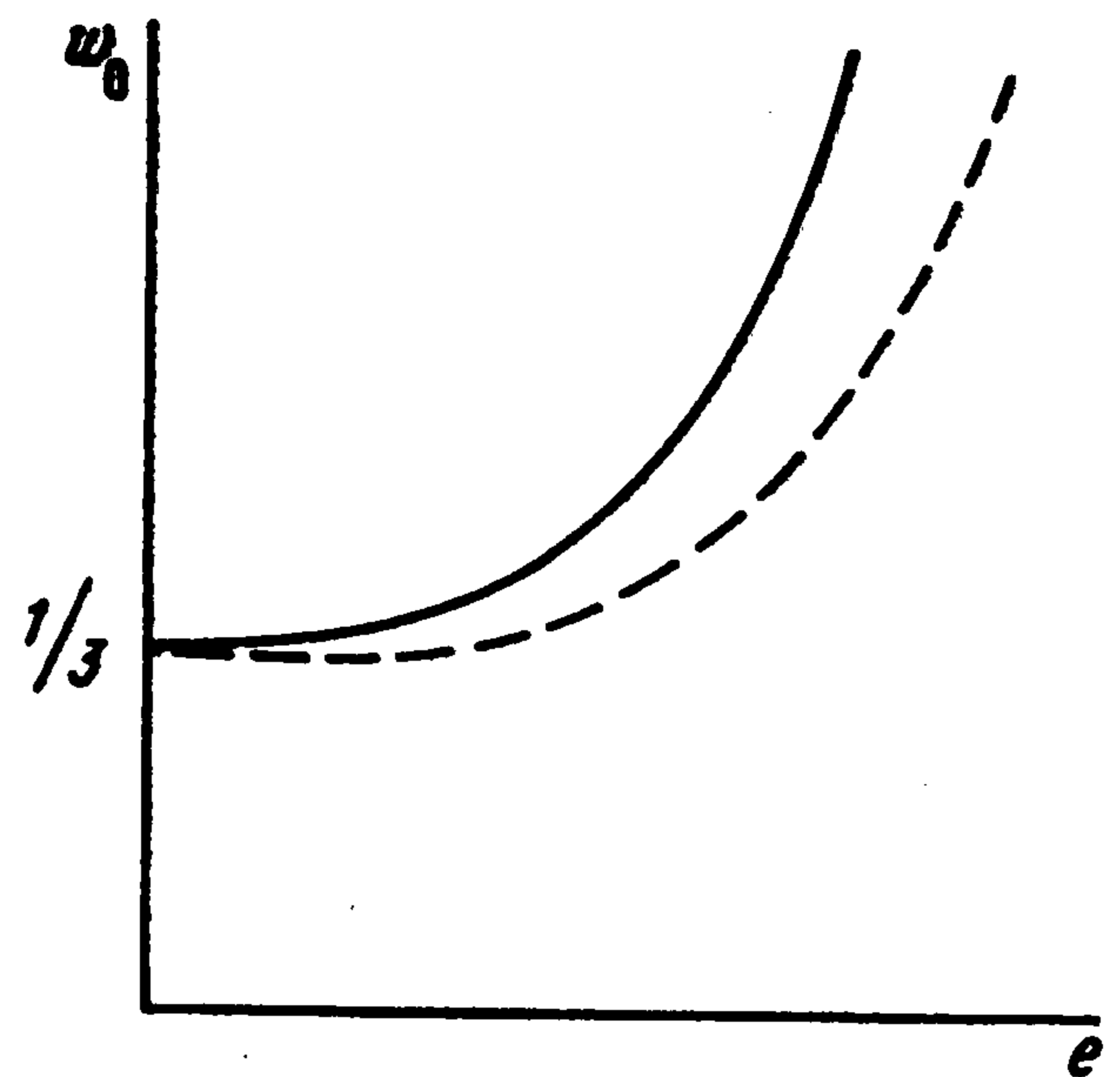
Цель работы – исследование нелинейных колебаний спутника в случае, когда утроенная частота ω_0 его малых колебаний на круговой орбите ($e = 0$) близка к частоте обращения его центра масс.

Если положить

$$\psi = \psi^* + q/(1 + e \cos v), \quad p = dq/dv$$

то уравнения возмущенного движения в окрестности решения (1.2) можно представить в гамильтоновой форме с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{e \cos v}{2(1 + e \cos v)} q^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 [(1 + e \cos v) \times \\ \times \sin \left(2\psi^* + \frac{q}{1 + e \cos v} \right) \sin \frac{q}{1 + e \cos v} - \\ - q \sin 2\psi^*] \quad (1.3)$$



Фиг. 1

При помощи нескольких канонических замен переменных приведем гамильтониан (1.3) к виду, характерному для задач о нелинейных колебаниях периодических по времени гамильтоновых систем с одной степенью свободы в случае рассматриваемого здесь резонанса третьего порядка [3].

Учитывая (1.2), представим гамильтониан (1.3) в виде ряда

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (1.4)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} (p^2 + \omega_0^2 q^2) - \frac{e \cos v}{2(\omega_0^2 - 1)} q^2 + O(e^2)$$

$$H_3 = -\frac{2}{3} \frac{e \omega_0^2 \sin v}{\omega_0^2 - 1} q^3 + O(e^2), \quad H_4 = H_4^{(0)} + O(e), \quad H_4^{(0)} = -\frac{1}{6} \omega_0^2 q^4$$

В (1.4) многоточием обозначена совокупность членов выше четвертой степени по q и p .

При помощи линейного 2π -периодического по v канонического преобразования $q, p \rightarrow q_*, p_*$ вида

$$q = \frac{q_*}{\sqrt{\omega_0}} + \frac{e(\cos v q_* - 2\omega_0 \sin v p_*)}{\sqrt{\omega_0}(\omega_0^2 - 1)(4\omega_0^2 - 1)} + O(e^2)$$

$$p = \sqrt{\omega_0} p_* + \frac{e\sqrt{\omega_0}}{(\omega_0^2 - 1)(4\omega_0^2 - 1)} \left(\frac{2\omega_0^2 - 1}{\omega_0} \sin v q_* - \cos v p_* \right) + O(e^2)$$

приведем H_2 к нормальной форме H_{2*} , где

$$H_{2*} = \frac{1}{2} \lambda (q_*^2 + p_*^2), \quad \lambda = \omega_0 + O(e^2)$$

Будем считать, что величина λ близка к $1/3$. В плоскости параметров e, ω_0 соотношение $3\lambda = 1$ определяет резонансную кривую, изображенную на фиг. 1 сплошной линией, уравнение которой имеет вид [2]

$$\omega_0 = 1/3 + (71/160)e^2 + O(e^4) \quad (1.5)$$

Далее полагаем $\lambda = 1/3 + e^2 \beta$.

С помощью канонического преобразования $q_*, p_* \rightarrow x_*, y_*$ типа преобразования Биркгофа приведем $H_4^{(0)}$ к нормальной форме вида $-(x_*^2 + y_*^2)^2 / 16$. Осуществляя затем

замену переменных $x^3 = e^{-1}x_*$, $y = e^{-1}y_*$, получим следующий гамильтониан:

$$K = \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2) + \frac{\sqrt{3}}{4}e^2 \sin vx^2 - \frac{1}{16}e^2(x^2 + y^2)^2 + O(e^3) \quad (1.6)$$

Перейдем в (1.6) к координатам φ, r по формулам $x = \sqrt{2r} \sin \varphi$, $y = \sqrt{2r} \cos \varphi$ и уничтожим с помощью близкого к тождественному 2π -периодического по v канонического преобразования слагаемые с нерезонансными гармониками в членах третьей степени, при этом гамильтониан примет вид

$$\Gamma = \lambda r - \frac{1}{4}e^2 r^2 - \frac{\sqrt{6}}{16}e^2 r^{3/2} \cos(3\varphi - v) + O(e^3) \quad (1.7)$$

Наконец, замена переменных $\varphi, r \rightarrow \theta, \rho$ по формулам

$$r = \frac{3}{8}\rho, \quad \varphi = -\theta - \frac{2}{3}\pi + \frac{v}{3}$$

и введением новой независимой переменной $\tau = (3/32)e^2 v$ преобразует гамильтониан (1.7) к следующей окончательной форме:

$$\gamma = \gamma_0 + e\gamma_1(\theta, \rho, \tau, e) \quad (1.8)$$

где

$$\gamma_0 = \rho^2 + \rho^{3/2} \cos 3\theta - \mu\rho, \quad \mu = (32/3)\beta \quad (1.9)$$

Функция γ_1 в (1.8) 2π -периодична по θ , периодична по τ с периодом $T = (9/16)\pi e^2$ и в области $0 < \rho \leq 1$ аналитична по всем переменным.

2. Интегрирование невозмущенной системы. Рассмотрим невозмущенную систему, описываемую гамильтонианом (1.9), типичным для задач о движении гамильтоновых систем с одной степенью свободы в случае резонанса третьего порядка. Качественный характер нелинейных колебаний таких систем, а также вопросы о существовании и устойчивости 6π -периодических движений изучались в [3–6]. В данной части работы проводится подробное аналитическое исследование системы с гамильтонианом γ_0 .

2.1. Соответствующие γ_0 уравнения движения имеют вид

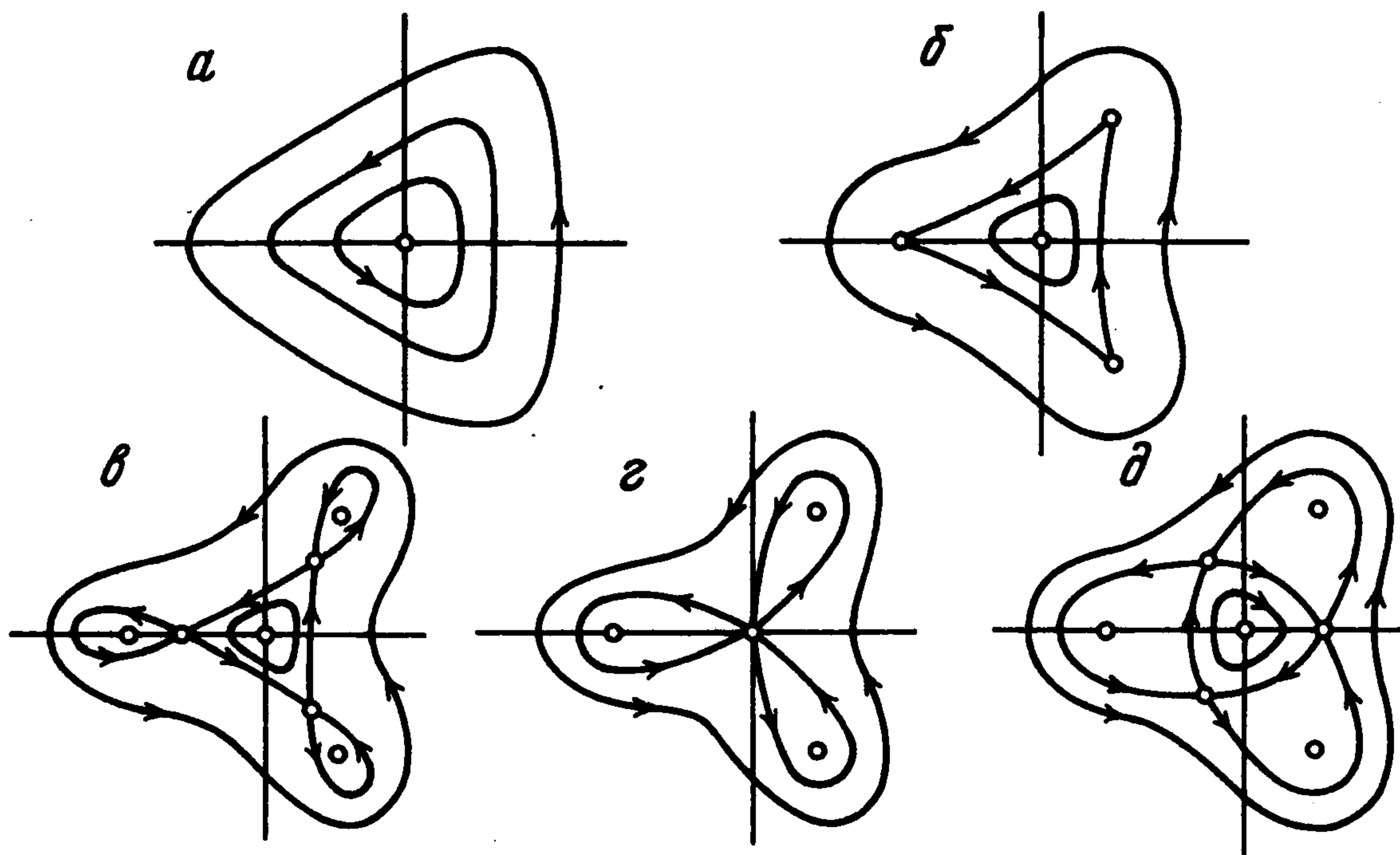
$$d\theta/d\tau = 2\rho + \frac{3}{2}\sqrt{\rho} \cos 3\theta - \mu, \quad d\rho/d\tau = 3\rho^{3/2} \sin 3\theta \quad (2.1)$$

Укажем положения равновесия системы (2.1) и характер их устойчивости [3]. Положение равновесия $\rho = 0$, существующее при любых значениях μ , устойчиво при $\mu \neq 0$ и неустойчиво при $\mu = 0$. При $\mu \geq -9/32$ имеется еще два типа положений равновесия, при которых $\sin 3\theta = 0$, а равновесные значения ρ являются корнями $(16\mu + 9 \pm 3\sqrt{9 + 32\mu})/32$ квадратного уравнения.

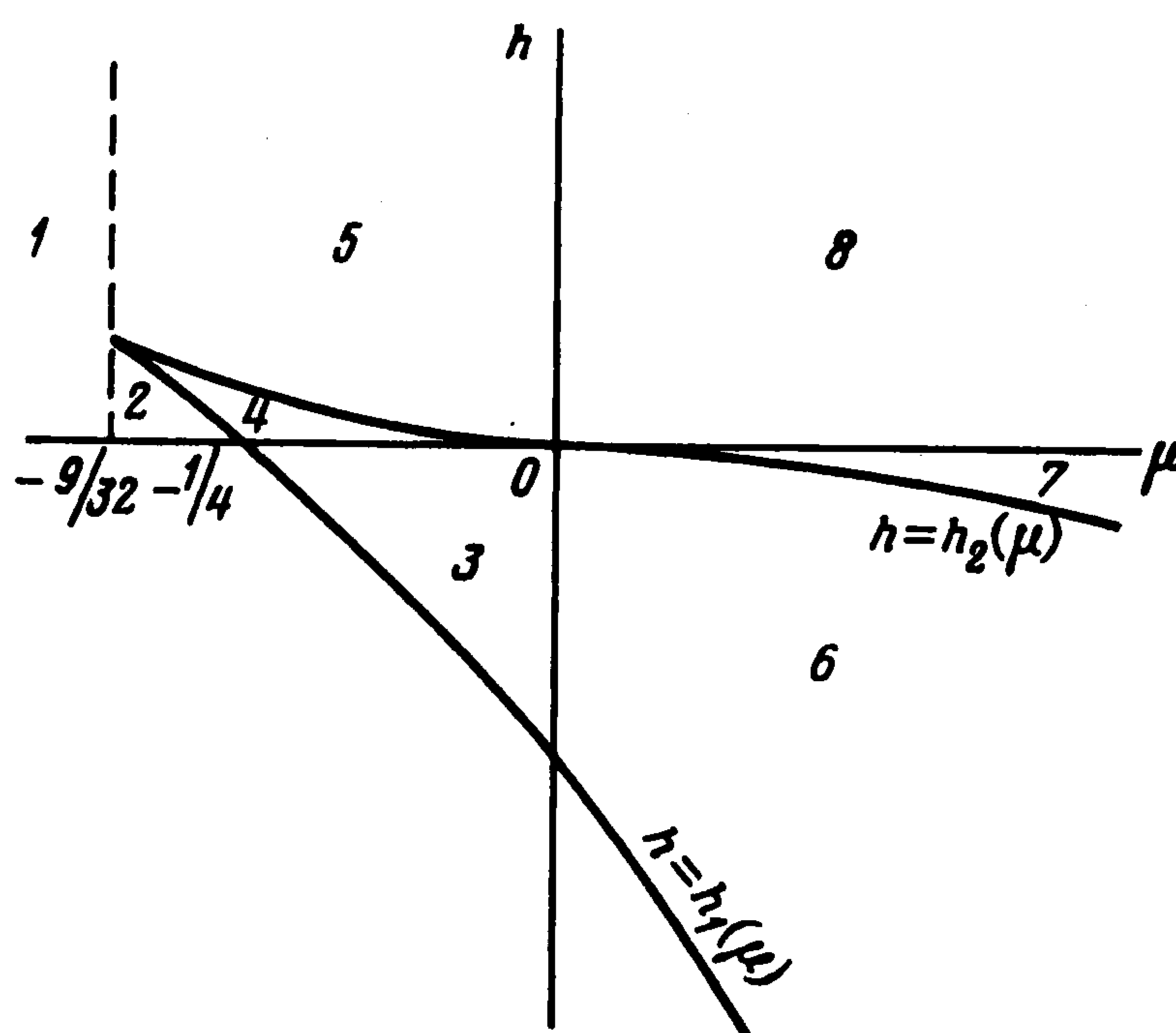
Большему корню (ρ_*) отвечают устойчивые, а меньшему (ρ_{**}) – неустойчивые положения равновесия системы (2.1). При $\mu = 0$ неустойчивые положения равновесия совпадают с началом координат ($\rho_{**} = 0$). При $\mu = -9/32$ уравнение имеет двойной корень ($\rho_* = \rho_{**} = 9/64$); соответствующие положения равновесия неустойчивы.

На фиг. 2 в плоскости переменных $x_1 = \sqrt{2r} \cos \theta$, $x_2 = \sqrt{2r} \sin \theta$ приведены качественно различные фазовые портреты системы (2.1) [3] для случаев $\mu < -9/32$ (а), $\mu = -9/32$ (б), $-9/32 < \mu < 0$ (в), $\mu = 0$ (г), $\mu > 0$ (д).

Устойчивым положениям равновесия системы (2.1) отвечают на фиг. 2 особые точки типа "центр", неустойчивым (при $\mu \neq -9/32$, $\mu \neq 0$) – седловые особые точки. При $\mu = 0$ (фиг. 2, г) начало координат – сложная особая точка, окрестность которой состоит из шести седловых секторов. Неустойчивые положения равновесия при



Фиг. 2



Фиг. 3

$\mu = -9/32$ (фиг. 2, б) соответствуют сложным особым точкам – вырожденным седлоузлам.

Неустойчивые особые точки системы соединяются сепаратрисами, отделяющими области колебаний системы (вблизи устойчивых положений равновесия) от области вращений. Траектории в области вращений охватывают все особые точки системы; угол θ на этих траекториях монотонно возрастает.

2.2. Система уравнений (2.1) имеет первый интеграл

$$\gamma_0(\theta, \rho) = h = \text{const} \quad (2.2)$$

используя который, можно исключить θ из второго уравнения (2.1). Тогда уравнение для ρ примет вид

$$d\rho / \sqrt{E(\rho)} = \pm 3d\tau, \quad F(\rho) = \rho^3 - (h + \mu\rho - \rho^2)^2 \quad (2.3)$$

Верхнему знаку в (2.3) отвечает движение в секторах $2\pi k/3 \leq \theta \leq \pi(2k + 1)/3$ ($k = 0, 1, 2$), где ρ возрастает, а нижнему знаку – движение в секторах $\pi(2k - 1)/3 \leq \theta \leq 2\pi k/3$ ($k = 1, 2, 3$) убывания ρ .

Вид решения уравнения (2.3) зависит от числа и кратности вещественных корней многочлена $F(\rho)$. Из вида $F(\rho)$ следует, что все его вещественные корни положительны.

После того как уравнение (2.3) проинтегрировано, зависимость $\theta(\tau)$ определится из соотношения (2.2).

Выпишем решения уравнений (2.3) во всем диапазоне изменения параметров μ и h . На фиг. 3 в плоскости параметров (μ, h) выделено восемь подобластей с различным характером решений системы (2.1). Границами подобластей служат прямые $\mu = -9/32$, $\mu = 0$, а также прямая $h = 0$ и кривые $h = h_1(\mu)$, $h = h_2(\mu)$, отвечающие соответственно уровням энергии в положениях равновесия системы (2.1), при которых $\rho = 0$ и $\rho = \rho_*$, $\rho = \rho_{**}$, причем $h_1(\mu) = \rho_*^2 + \rho_*^{3/2} - \mu\rho_*$ ($\mu \geq -9/32$), $h_2(\mu) = \rho_{**}^2 - \rho_{**}^{3/2} - \mu\rho_{**}$ при $-9/32 \leq \mu < 0$ и $h_2(\mu) = \rho_{**}^2 + \rho_{**}^{3/2} - \mu\rho_{**}$ при $\mu \geq 0$. Кривые $h = h_1(\mu)$ и $h = h_2(\mu)$ выходят из общей точки с координатами $(-9/32, 27/4096)$; кривая $h = h_1(\mu)$ пересекает ось Oh при $h = -27/256$.

При $h < 0$ в области $\mu < -1/4$ и при $h < h_1(\mu)$ в области $\mu \geq -1/4$ движение невозможно.

Точкам прямой $h = 0$ ($\mu < -1/4$) отвечает устойчивое равновесие $\rho = 0$ системы (2.1). В областях 1 и 2 (фиг. 3) и разделяющем их отрезке прямой $\mu = -9/32$ имеем колебания вблизи этого равновесия (см. фиг. 2, а-в), происходящие в интервале $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$ изменения ρ . Здесь ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2 < \rho_1$) – вещественные корни многочлена $F(\rho)$, два другие его корня комплексно-сопряженные. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(1 + 2\mu - \rho_1 - \rho_2), \quad \beta = h^2 / (\rho_1 \rho_2) \\ \gamma &= \beta - \alpha^2, \quad p = [(\alpha - \rho_1)^2 + \gamma]^{1/2}, \quad q = [(\alpha - \rho_2)^2 + \gamma]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Используя табличные интегралы [7], получим из уравнения (2.3) следующую зависимость:

$$\rho(\tau) = \frac{\rho_1 q + \rho_2 p - (\rho_1 q - \rho_2 p) \operatorname{cn}(3\sqrt{pq}\tau)}{p + q + (p - q) \operatorname{cn}(2\sqrt{pq}\tau)} \quad (2.5)$$

В (2.5) модуль эллиптического косинуса равен

$$k_1 = \frac{1}{2} \{ [(\rho_1 - \rho_2)^2 - (p - q)^2] / (pq) \}^{1/2} \quad (2.6)$$

а постоянная интегрирования выбрана так, чтобы при $\tau = 0$ переменная ρ принимала свое минимальное значение $\rho = \rho_2$. Частота рассматриваемых колебаний равна $\omega_1/3$, где

$$\omega_1 = \frac{3\pi\sqrt{pq}}{2K(k_1)} \quad (2.7)$$

а $K(k_1)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Точкам кривой $h = h_1(\mu)$ (при $\mu \geq -1/4$) отвечают устойчивые равновесия системы (2.1), соответствующие $\rho = \rho_*$. В областях 3 и 6 и на разделяющем их отрезке прямой $\mu = 0$ (фиг. 3) имеем колебания вблизи этих равновесий (см. фиг. 2, в-д), при этом $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$ (ρ_1, ρ_2 – вещественные корни многочлена $F(\rho)$, два другие его корня комплексно-сопряженные). Зависимость $\rho(\tau)$ для этих колебаний определяется соотношениями (2.4)–(2.6), а их частота равна ω_1 (формула (2.7)).

В области 4 (фиг. 3) каждому значению μ и h отвечают колебания двух типов: колебание первого типа происходит в окрестности устойчивого равновесия $\rho = 0$, при

этом ρ меняется в интервале $\rho_4 \leq \rho \leq \rho_3$; колебания второго типа – в окрестности устойчивых равновесий, соответствующих $\rho = \rho_*$, в этом случае ρ принимает значения из интервала $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$ (см. фиг. 2, в). Здесь $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ ($\rho_4 < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1$) – вещественные корни многочлена $F(\rho)$.

Для колебания первого типа из уравнений (2.3) получим [7]

$$\rho(\tau) = \frac{\rho_4(\rho_1 - \rho_3) + \rho_1(\rho_3 - \rho_4) \operatorname{sn}^2 u}{\rho_1 - \rho_3 + (\rho_3 - \rho_4) \operatorname{sn}^2 u} \quad (2.8)$$

причем принято, что $\rho = \rho_4$ при $\tau = 0$, а для колебаний второго типа

$$\rho(\tau) = \frac{\rho_2(\rho_1 - \rho_3) - \rho_3(\rho_1 - \rho_2) \operatorname{sn}^2 u}{\rho_1 - \rho_3 - (\rho_1 - \rho_2) \operatorname{sn}^2 u} \quad (2.9)$$

где принято, что $\rho = \rho_2$ при $\tau = 0$. В (2.8) и (2.9) введено обозначение $u = \frac{3}{2}[(\rho_1 - \rho_3) \cdot (\rho_2 - \rho_4)]^{1/2} \tau$; модуль эллиптической функции $k_2 = [(\rho_1 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_4)/(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_4)]^{1/2}$.

Колебания в окрестности равновесий, отвечающих $\rho = \rho_*$, происходят с частотой

$$\omega_2 = \frac{3}{4} \pi K^{-1}(k_2) [(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_4)]^{1/2} \quad (2.10)$$

а колебание в окрестности $\rho = 0$ – с частотой $\omega_2/3$.

Каждой точке области 7 соответствуют два движения (см. фиг. 2, д): колебание в окрестности устойчивого равновесия $\rho = 0$, при этом $\rho_4 \leq \rho \leq \rho_3$, и одно из вращений, для которого $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$ ($\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ – вещественные корни многочлена $F(\rho)$, причем $\rho_4 < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1$). Для указанных колебания и вращения законы изменения $\rho(\tau)$ задаются соотношениями (2.8) и (2.9) соответственно. Частота колебания и средняя частота вращения равны $\omega_2/3$, где ω_2 определяется формулой (2.10).

В областях 5 и 8 и на границах – прямых $\mu = 0$ и $\mu = -9/32$ (фиг. 3) каждому значению μ и h соответствует вращение (см. фиг. 2, в–д). При этом $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$, где ρ_1, ρ_2 – вещественные корни многочлена $F(\rho)$ (два других его корня комплексно-сопряженные). Зависимость $\rho(\tau)$ определяется соотношениями (2.4)–(2.6), а средняя частота вращений равна $\omega_1/3$, ω_1 задается формулой (2.7).

Точкам прямой $h = 0$ при $-1/4 < \mu < 0$ (фиг. 3) отвечают устойчивое равновесие $\rho = 0$ и одно из колебаний вблизи равновесия, при котором $\rho = \rho_*$ (фиг. 2, в). Точкам прямой $h = 0$ при $\mu > 0$ соответствуют устойчивое равновесие $\rho = 0$ и одно из вращений (фиг. 2, д). И в том, и в другом случае многочлен $F(\rho)$ в (2.4) имеет двойной нулевой корень и еще два вещественных корня $\rho_{1,2} = (1 + 2\mu \pm \sqrt{1 + 4\mu})/2$ ($\rho_2 < \rho_1$). Движение (колебание либо вращение) происходит при $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$. Уравнение (2.3) интегрируется в элементарных функциях, результат имеет вид [7]

$$\rho(\tau) = 2\mu^2 \frac{1 + 2\mu - \sqrt{1 + 4\mu} \cos 3\mu\tau}{(1 + 2\mu)^2 \sin^2 3\mu\tau + 4\mu^2 \cos^2 3\mu\tau}$$

где принято, что $\rho(0) = \rho_2$.

Точке $h = 0, \mu = 0$ соответствуют (фиг. 2, в) неустойчивое равновесие $\rho = 0$ и движение по сепаратрисе, задаваемое соотношениями

$$\rho(\tau) = \frac{4}{4 + 9\tau^2}, \quad \theta(\tau) = \frac{1}{3} \left[(2m - 1)\pi + \operatorname{arctg} \frac{3\tau}{2} \right], \quad m = 1, 2, 3$$

Точкам кривой $h = h_1(\mu)$ (фиг. 3) при $-9/32 < \mu < -1/4$ отвечают два типа движений (см. фиг. 2, в): устойчивые равновесия, при которых $\rho = \rho_*$, и колебание в окрестности равновесия $\rho = 0$. В этом случае многочлен $F(\rho)$ в (2.3) имеет двойной корень $\rho = \rho_*$ и

еще два вещественных корня ρ_1 и ρ_2 , причем $\rho_2 < \rho_1 < \rho_*$. Указанное колебание в окрестности $\rho = 0$ происходит при $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$. Уравнение (2.3) интегрируется в элементарных функциях, результат имеет вид [7]

$$\rho(\tau) = \frac{\rho_1(\rho_* - \rho_2)\sin^2 u + \rho_2(\rho_* - \rho_1)\cos^2 u}{(\rho_* - \rho_2)\sin^2 u + (\rho_* - \rho_1)\cos^2 u}, \quad u = \frac{3}{2}[(\rho_* - \rho_1)(\rho_* - \rho_2)]^{1/2}\tau$$

где принято, что $\rho(0) = \rho_2$.

Точкам кривой $h = h_2(\mu)$ ($\mu > -9/32$, $\mu \neq 0$) отвечают неустойчивые равновесия, при которых $\rho = \rho_{**}$, и движение по сепаратрисам (фиг. 2, в, д). Многочлен $F(\rho)$ имеет при этом двойной корень $\rho = \rho_{**}$ и еще два вещественных корня ρ_1, ρ_2 , причем $\rho_2 < \rho_{**} < \rho_1$. Если $-9/32 < \mu < 0$ (фиг. 2, в), то величина ρ при движении по гетероклиной и гомоклиной асимптотическим траекториям меняется соответственно в промежутках $\rho_2 \leq \rho < \rho_{**}$ и $\rho_{**} < \rho \leq \rho_1$. В обоих случаях зависимость $\rho(\tau)$ определяется неявно соотношением [7]

$$\ln^2 \frac{[\sqrt{(\rho_1 - \rho)(\rho_{**} - \rho_2)} + \sqrt{(\rho - \rho_2)(\rho_1 - \rho_{**})}]^2}{(\rho_1 - \rho_2)|\rho_{**} - \rho|} = 9(\rho_1 - \rho_{**})(\rho_{**} - \rho_2)\tau^2 \quad (2.11)$$

где $\rho(0) = \rho_2$ для гетероклиной и $\rho(0) = \rho_1$ для гомоклиной асимптотических траекторий; $\rho \rightarrow \rho_{**}$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$.

При $\mu > 0$ (фиг. 2, д) зависимость $\rho(\tau)$ на внутренней ($\rho_2 \leq \rho < \rho_{**}$) и внешней ($\rho_{**} < \rho \leq \rho_1$) гетероклиных асимптотических траекториях также определяется соотношением (2.11).

Наконец, общей точке $(-9/32, 27/4096)$ кривых $h = h_1(\mu)$ и $h = h_2(\mu)$ отвечают (фиг. 2, б) неустойчивые равновесия системы, при которых $\rho = 9/64$, и движение по сепаратрисе, задаваемое соотношениями

$$\rho(\tau) = \left(\frac{81}{64}\tau^2 + 4 \right) (256 + 9\tau^2)^{-1}, \quad \cos 3\theta = \left(\frac{27}{4096} - \frac{9}{32}\rho - \rho^2 \right) \rho^{-3/2}$$

3. О нелинейных колебаниях возмущенной системы. Выясним, как результаты исследования невозмущенной системы с гамильтонианом γ_0 могут быть перенесены на полную систему с гамильтонианом γ (см. (1.8)).

3.1. Согласно теории периодических движений Пуанкаре [8] из каждого не совпадающего с началом координат положения равновесия невозмущенной системы (случай $\mu = -9/32$ исключаем из рассмотрения) рождается, при достаточно малых значениях ϵ , единственное, T -периодическое по τ , аналитическое по ϵ решение полной системы. В исходных переменных ему соответствует 6π -периодическое движение спутника.

Неустойчивые положения равновесия системы (2.1), отвечающие равновесному значению $\rho = \rho_{**}$, переходят в неустойчивые периодические решения полной системы, что следует из непрерывности по ϵ характеристических показателей соответствующих линейных уравнений возмущенного движения.

Решим вопрос об устойчивости периодических движений, рождающихся из устойчивых (отвечающих $\rho = \rho_*$) положений равновесия невозмущенной системы. С этой целью проведем сначала нормализацию гамильтониана γ_0 в окрестности этих

равновесий. Пусть $\theta = \theta_* + x$ (θ_* – равновесное значение угла θ), $\rho = \rho_* + y$, тогда гамильтониан γ_0 можно представить в виде ряда

$$\gamma_0 = \gamma_0^{(2)} + \gamma_0^{(3)} + \gamma_0^{(4)} + \dots \quad (3.1)$$

$$\gamma_0^{(2)} = \frac{9}{2} \rho_*^{3/2} x^2 + \left(1 - \frac{3}{8} \rho_*^{-1/2}\right) y^2, \quad \gamma_0^{(3)} = \frac{27}{4} \rho_*^{1/2} x^2 y + \frac{1}{16} y^3 \rho_*^{-3/2}$$

$$\gamma_0^{(4)} = -\frac{27}{8} \rho_*^{3/2} x^4 + \frac{27}{16} \rho_*^{-1/2} x^2 y^2 - \frac{3}{128} \rho_*^{-5/2} y^4$$

Многоточием обозначена совокупность слагаемых выше четвертой степени по x и y .

Замена переменных $x = x_1/\alpha$, $y = \alpha y_1$, $\alpha = \sqrt{6} \rho_*^{1/2} / (8\rho_*^{1/2} - 3)^{1/4}$ нормализует в (3.1) квадратичную часть и приводит ее к виду $\frac{1}{2} \Omega (x_1^2 + y_1^2)$, $\Omega = \frac{3}{2} \rho_*^{1/2} (8\rho_*^{1/2} - 3)^{1/2}$. Далее, осуществляя каноническое преобразование $x_1, y_1 \rightarrow \xi, \eta$ типа преобразования Биркгофа, уничтожим в гамильтониане члены третьей степени и упростим члены четвертой степени. Искомая нормальная форма гамильтониана γ_0 в окрестности рассматриваемого равновесия имеет вид

$$G = \frac{1}{2} \Omega (\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{4} c (\xi^2 + \eta^2)^2 + \dots \quad (3.2)$$

$$c = -\frac{9}{64} [z(z-3)^2 + 3(9z^2 + 6z + 5)] \rho_*^{-1/2} z^{-2}, \quad z = 8\rho_*^{1/2} - 3$$

Величина z в (3.2) положительна в области $\mu > -9/32$ существования устойчивых положений равновесия, и следовательно, $c < 0$.

Если теперь провести нормализацию гамильтониана γ в окрестности порождаемого рассматриваемым устойчивым равновесием периодического решения полной системы, то получим гамильтониан вида (3.2), в котором коэффициенты Ω и c получают поправки порядка ϵ . При достаточно малых значениях ϵ в силу неравенства $c < 0$ выполняется условие невырожденности гамильтониана γ в окрестности указанного периодического решения. Отсюда, на основании теоремы Арнольда–Мозера [9, 10], следует его устойчивость по Ляпунову.

3.2. Покажем ограниченность движений полной системы, начинающихся в некоторой конечной окрестности начала координат, и оценим размеры этой окрестности.

Введем в области вращений невозмущенной системы переменные действие – угол I, ω [11], полагая

$$I(h) = (2\pi)^{-1} \oint \rho(\theta, h) d\theta \quad (3.3)$$

где интегрирование проводится вдоль замкнутой траектории $\rho = \rho(\theta, h)$, определяемой соотношением (2.3). Обратная к (3.3) функция $h = h(I)$ представляет собой гамильтониан γ_0 , записанный в переменных действие – угол.

Дадим оценку размеров окрестности начала координат, вне которой в области вращений выполняется условие невырожденности $d^2 h/dI^2 \neq 0$. Используя соотношения (3.3) и (2.3), можно показать, что

$$\frac{d^2 h}{dI^2} = \frac{\omega^3}{2\pi} \oint \frac{\partial^2 \gamma_0 / \partial \rho^2}{(\partial \gamma_0 / \partial \rho)^3} d\theta = \frac{\omega^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{8\rho^{1/2} + 3 \cos 3\theta}{\rho^{1/2} (2\rho + \frac{3}{2} \rho^{1/2} \cos 3\theta - \mu)^3} d\theta \quad (3.4)$$

Так как знаменатель дроби в (3.4) положителен в области вращений ($\partial \gamma_0 / \partial \rho = d\theta/d\tau > 0$), то подынтегральное выражение положительно на таких траекториях-

вращениях (Т-В), на которых $\rho > 9/64$. При этом $d^2h/dI^2 > 0$, и выполняется условие невырожденности.

Можно показать, что при $\mu < 27/32$ существует Т-В, проходящая через точку $\rho = 9/64$, $\theta = 0$. На этой Т-В $9/64 \leq \rho \leq R_1$, где R_1 — единственный (за исключением случая $\mu = 33/64$) в рассматриваемой области вещественный корень уравнения

$$\rho^2 - \rho^{3/2} - \mu\rho = \frac{9}{64} \left(\frac{33}{64} - \mu \right) \quad (3.5)$$

При $\mu = 33/64$, что соответствует $h = 0$, это уравнение имеет три корня: 0, $9/64$ и $121/64$; тогда $R_1 = 121/64$.

На рассматриваемой Т-В выполняется условие невырожденности, следовательно, на основании теоремы Мозера об инвариантных кривых [10], отображение, порождаемое движениями возмущенной системы за период T , при достаточно малых e имеет инвариантную кривую, близкую к указанной Т-В. Для всех начинающихся внутри этой кривой траекторий возмущенной системы справедливо соотношение $\rho(\tau) < R_1(1 + O(e))$.

Пусть теперь $\mu \geq 27/32$. Так как при этом $\rho_{**} \geq 9/64$, то окружность $\rho = 9/64$ не пересекает область вращений, и для всех Т-В выполняется условие невырожденности. Отсюда в силу теоремы Мозера следует существование инвариантных кривых. Выберем одну из них, например, близкую к Т-В, на которой величина ρ не превосходит $2R_2$, где R_2 — максимальное значение ρ на сепаратрисе (см. фиг. 2, д). Величина R_2 является единственным в рассматриваемой области корнем уравнения

$$\rho^2 - \rho^{3/2} - \mu\rho = \rho_{**}^2 + \rho_{**}^{3/2} - \mu\rho_{**} \quad (3.6)$$

Для всех начинающихся внутри указанной инвариантной кривой траекторий имеем $\rho(\tau) < 2R_2(1 + O(e))$.

4. О нелинейных колебаниях спутника. Полученные в разд. 3 выводы касаются достаточно широкого класса систем, описываемых гамильтонианом вида (1.8). Применим результаты разд. 3 к задаче о плоских нелинейных колебаниях спутника.

Отметим, что из положений равновесия невозмущенной системы с гамильтонианом γ_0 (вновь полагаем $\mu \neq -9/32$, что в исходных обозначениях соответствует $\beta \neq -27/1024$), отвечающих одним и тем же равновесным значениям ρ и разным (отличающимся на $2\pi/3$) значениям θ , рождаются 6π -периодические решения уравнения (1.1), переходящие одно в другое при сдвиге по v на 2π и 4π . Эти движения соответствуют одному и тому же 6π -периодическому движению спутника, происходящему вблизи эксцентриситетных колебаний (1.2).

Граничному значению $\beta = -27/1024$, разделяющему области изменения λ с различным числом периодических движений спутника, в плоскости e, ω_0 соответствует бифуркационная кривая

$$\omega_0 = 1/3 + (2137/5120)e^2 + O(e^4) \quad (4.1)$$

изображенная на фиг. 1 штриховой линией. Для значений параметров e и ω_0 , таких, что точка (e, ω_0) лежит ниже кривой (4.1), 6π -периодические движения спутника, отличные от колебаний (1.2), отсутствуют.

Для точек (e, ω_0) , лежащих между кривой (4.1) и резонансной кривой (1.5), существует два 6π -периодических движения спутника, отличных от (1.2). Они рождаются из положений равновесия невозмущенной системы, отвечающих $\rho = \rho_*$ и $\rho = \rho_{**}$, и описываются соотношениями вида

$$\psi(v) = -\frac{9}{4}e \sin v - \frac{3}{2}e\sqrt{\sigma} \sin \frac{v}{3} + O(e^2) \quad (4.2)$$

при $\sigma = \rho_*$ и $\sigma = \rho_{**}$ соответственно. Первое из этих движений, согласно разд. 3, устойчиво, а второе неустойчиво.

Для значений e, ω_0 , лежащих на резонансной кривой (1.5), существует единственное (отличное от (1.2)) 6π -периодическое движение спутника, описываемое соотношением (4.2); это движение устойчиво. Периодическое движение, отвечающее $\rho = \rho_{**}$, совпадает с эксцентриситетными колебаниями (1.2) и является неустойчивым.

Если точка (e, ω_0) лежит выше резонансной кривой (1.5), то движение, отвечающее $\rho = \rho_{**}$, вновь отделяется от эксцентриситетных колебаний (1.2), и имеем два (отличных от (1.2)) 6π -периодических движения спутника, описываемые соотношениями (4.2): одно, устойчивое, – при $\sqrt{\sigma} = \sqrt{\rho_*}$, а второе, – неустойчивое, при $\sqrt{\sigma} = -\sqrt{\rho_{**}}$.

Любые движения $\psi = \psi(v)$ спутника, начинающиеся достаточно близко к его эксцентриситетным колебаниям $\psi = \psi^*(v)$, остаются в конечной окрестности этих колебаний. Оценка размеров такой окрестности дана в разд. 3: $|\psi(v) - \psi^*(v)| \leq \leq 3/2e\xi(1 + O(e))$, где $\xi = \sqrt{R_1}$, если $\beta < 81/1024$, и $\xi = \sqrt{2R_2}$, если $\beta \geq 1024$.

Здесь величины $R_i = R_i(\mu) = R_i((32/3)\beta)$ ($i = 1, 2$) – корни уравнений (3.5), (3.6) соответственно, а величина β для данных значений e и ω_0 определяется из соотношения

$$\omega_0 = 1/3 + e^2(71/160 + \beta) + O(e^4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00220).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Zlatoustov V.A., Markeev A.P. Stability of planar oscillations of a satellite in an elliptic orbit // Celest. Mech. 1973. V. 7. № 1. P. 31–45.
3. Маркеев А.П. О резонансе третьего порядка в близкой к гамильтоновой системе с одной степенью свободы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 2. С. 46–53.
4. Маркеев А.П. Резонанс третьего порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 37–48.
5. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
6. Lemaître A. High-order resonances in the restricted three-body problem // Celest. Mech. 1984. V. 32. № 2. P. 109–126.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
8. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
9. Арнольд В.И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 255–257.
10. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
11. Борн М. Лекции по атомной механике. Харьков. Киев: Гоус. научн.-тех. изд-во Украины, 1934. 312 с.