

УДК 534.1

© 1997 г.

Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ
ТРЕТЬЕГО РОДА**

Разрабатывается эффективный метод построения решения задачи на собственные значения и функции для существенно неоднородной колебательной системы с переменными распределенными параметрами. Предлагаемый подход основан на сочетании вариационного подхода, теории краевых задач и методов возмущений. Дается оригинальное определение малого параметра задачи и предлагается рекуррентный алгоритм последовательного уточнения собственных чисел и функций, приводящий к ускоренной (квадратичной) сходимости типа "метода касательных" Ньютона. Методика комментируется и иллюстрируется решением модельных примеров.

1. Постановка задачи. Рассмотрим собственные колебания неоднородной системы с распределенными параметрами (типа струны, вала, бруса). На ее границе (на концах) будем предполагать выполненными условия упругого закрепления. Кроме того, допустим наличие распределенной внешней упругой среды. Применяя метод разделения переменных, приходим к третьей краевой задаче на собственные значения и функции вида [1–4]

$$(p(x)u')' + [\lambda r(x) - q(x)]u = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (1.1)$$

$$\alpha_0 p(0)u'(0) - \beta_0 u(0) = 0, \quad \alpha_0, \beta_0 \geq 0, \quad \alpha_0 + \beta_0 > 0$$

$$\alpha_1 p(1)u'(1) + \beta_1 u(1) = 0, \quad \alpha_1, \beta_1 \geq 0, \quad \alpha_1 + \beta_1 > 0$$

Здесь $u = u(x)$ – координатная функция, характеризующая форму, в частности линейного или углового смещения сечения x ; x – аргумент (переменная Эйлера), $0 \leq x \leq 1$; параметр λ – постоянная разделения пространственной и временной переменных, $\lambda = \omega^2 \geq 0$, ω – частота. Коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ имеют смысл распределенной жесткости и линейной плотности соответственно; предполагается, что они ограничены и строго положительны. Неотрицательная функция $q(x)$ есть коэффициент упругости внешней среды (в частности, при $q \equiv 0$ среда отсутствует). Функции p, r, q считаются достаточно гладкими (см. ниже).

Отметим, что задача Штурма – Лиувилля (1.1) с краевыми условиями третьего рода записана в безразмерных переменных. В качестве единицы длины взята протяженность системы (струны, упругого вала или бруса и т.п.), а в качестве единиц коэффициентов жесткости, плотности, упругости и т.д. взяты их характерные значения (средние или экстремальные).

Для самосопряженной краевой задачи (1.1) требуется определить систему собственных значений $\{\lambda_n\}$ и функций $\{u_n(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$). В прикладном аспекте существенное значение имеет высокоточное вычисление низших частот $\omega_1, \omega_2, \dots$ и форм $u_1(x), u_2(x), \dots$ колебаний, которые определяют качество функционирования системы

([1–5] и др.). Для определения высших частот ω_n , $n \gg 1$ и соответствующих форм $u_n(x)$ могут быть применены асимптотические методы [3, 4, 6]. Проблема нахождения первых собственных частот и форм приводит к принципиальным аналитическим и вычислительным трудностям в случае существенно неоднородной системы, когда коэффициенты $p(x)$, $r(x)$ и $q(x)$ значительно изменяются для $0 \leq x \leq 1$, см. пример 5.2. Отметим, что вид уравнения (1.1) может быть упрощен с помощью различного рода замен [3, 7].

Исследованию задачи на собственные значения и функции (1.1) посвящена огромная литература, см., в частности монографии и учебные пособия [1–10] и библиографию к ним. Разработаны многочисленные аналитические и численные методы ее решения. Однако эти исследования посвящены в основном случаю краевых условий первого рода ($\alpha_0 = \alpha_1 = 0$). Существенно меньше изучен случай условий второго рода ($\beta_0, \beta_1 = 0$). Общая ситуация краевых условий третьего рода исследована вовсе недостаточно. Предполагается на основе вариационного подхода разработать эффективный численно-аналитический метод определения низших частот и форм колебаний системы с существенно неоднородными (переменными по x) параметрами p, r, q . Предлагаемый алгоритм решения примыкает к исследованиям [11, 12], в которых рассматривались случаи краевых условий первого и второго рода.

2. Вариационный подход к решению задачи. Задача (1.1) может быть представлена в эквивалентной вариационной форме [3, 4, 9, 10]

$$\min J[u] = \lambda, \quad J[u] = \int_0^1 [p(x)u'^2 + q(x)u^2] dx - p(x)u'u \Big|_0^1 \quad (2.1)$$

$$I[u] = \|u\|^2 = \int_0^1 r(x)u^2 dx = 1, \quad [\alpha_{0,1}p(x)u' \mp \beta_{0,1}u]_{x=0,1} = 0$$

Соотношения (1.1) – необходимые и достаточные условия минимума функционала $J[u]$ (2.1) при изопериметрическом условии нормировки с весом $r(x)$: $I[u] = \|u\|^2 = 1$ и краевых условиях третьего рода. Абсолютный минимум функционала есть первое собственное число λ_1 , а функция $u(x, \lambda_1)$, на которой он достигается, – первая собственная функция $u_1(x)$ задачи. Последующие собственные значения λ_n , $n \geq 2$ определяются рекуррентно на более узких классах функций, удовлетворяющих дополнительным условиям ортогональности с весом $r(x)$ предыдущим собственным функциям $u_1, \dots, u_{n-1}$:

$$I_k[u] = \int_0^1 r(x)u_k(x)u dx = (u_k, u) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (2.2)$$

Решение вариационной задачи (2.1), (2.2) приводит к системе собственных значений $\{\lambda_n\}$ и ортонормированных функций $\{u_n(x)\}$. Решение задачи Штурма – Лиувилля (1.1) определяет собственные функции с точностью до произвольных множителей, которые можно выбрать из условия нормировки с весом $r(x)$.

Пусть $\lambda, u(x, \lambda)$ – некоторое решение задачи (1.1). Умножая уравнение (1.1) на $u(x, \lambda)$ и интегрируя на промежутке $0 \leq x \leq 1$, получим $\lambda = J[u]I^{-1}[u]$ (с учетом граничных условий). Это соотношение используется в принципе Релея [3–5, 8–12] для построения оценки сверху первого собственного числа λ_1 с помощью некоторой пробной функции $\psi(x)$, удовлетворяющей краевым условиям (1.1)

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_1^* = J[\psi]\|\psi\|^{-2}, \quad [\alpha_{0,1}p(x)\psi'(x) \mp \beta_{0,1}\psi(x)]_{x=0,1} = 0 \quad (2.3)$$

Точность оценки λ_1^* (2.3) зависит от удачного выбора пробной функции $\psi(x)$ и обычно бывает достаточно высокой при интуитивном учете свойств функций $p(x)$, $r(x)$ и $q(x)$ (см. ниже решение примеров, разд. 5). Равенство $\lambda_1^* = \lambda_1$ достигается тогда и только тогда, когда $\psi(x) = C u_1(x)$, где $C = \text{const}$. Отметим, что в оценке (2.3) свойство нормированности функции $\psi(x)$ излишне.

На основе метода Релея – Ритца [3 – 10], обоснованного в [8], можно добиться сколь угодно высокой точности оценки λ_1^* и последующих чисел λ_2^* , λ_3^* , Однако этот подход связан с крайне трудоемкими неустойчивыми вычислениями. При конкретных расчетах для подтверждения приемлемой точности требуется построение аналогичных оценок снизу λ_{n*} ($n = 1, 2, 3, \dots$). Построение оценок снизу представляет значительные трудности в теоретическом и вычислительном аспектах [9, 10]. Нахождение этих оценок часто имеет большое практическое значение.

3. Применение метода возмущений. Далее для определенности рассмотрим задачу нахождения первого собственного значения (числа) λ и функции $u(x)$. Индекс $n = 1$ не указывается с целью сокращения записи; это не должно привести к недоразумениям. Будем полагать, что имеется приближенное значение λ° первого собственного числа, в частности, $\lambda^\circ = \lambda^*$ (оценка сверху), достаточно точное для применимости метода возмущений. В качестве меры близости возьмем величину параметра ϵ , определяемого для каждого λ° посредством процедуры

$$\epsilon = 1 - \xi, \quad |\epsilon| \ll 1, \quad \xi = \min_x \arg E(x, \lambda^\circ) > 0$$

$$E(x, \lambda^\circ) = E^\circ(x) = \alpha_1 p(x) v'(x, \lambda^\circ) + \beta_1 v(x, \lambda^\circ)$$

$$(p(x)v')' + [\lambda^\circ r(x) - q(x)]v = 0, \quad 0 < x \leq \xi \quad (3.1)$$

$$1) \quad v(0) = \alpha_0 a, \quad v'(0) = \beta_0 a/p(0) \quad (a = 1)$$

$$2) \quad v(0) = \alpha_0 p(0)b, \quad v'(0) = \beta_0 b \quad (b = 1)$$

где $\arg_x E$ означает корень x уравнения $E = 0$.

Согласно (3.1) требуется решить задачу Коши для одного из эквивалентных видов условий 1, 2 при $x = 0$, которые пригодны как при $\alpha_0 = 0$ ($\beta_0 > 0$), так и $\beta_0 = 0$ ($\alpha_0 > 0$). В случае 1 задается $v(0)$, а $v'(0)$ вычисляется согласно (1.1), (3.1); в случае 2 – наоборот; функция v будет содержать множителем параметр a или b соответственно, который можно положить равным единице. Величина $E^\circ(x)$ характеризует граничное условие вблизи правого конца $x = 1$. Отметим, что $E^\circ(1) = 0$ только при условии $\lambda^\circ = \lambda$, причем $\epsilon \rightarrow 0$, если $\lambda^\circ \rightarrow \lambda$. Более того, имеют место оценки $|\lambda - \lambda^\circ| \leq D|\epsilon|$, $|\epsilon| \leq d|\lambda - \lambda^\circ|$, где $0 < D, d < \infty$. Это свойство используется для принятой меры близости λ и λ° .

В приведенных соотношениях (3.1) сделано допущение о продолжимости функций $p(x)$, $r(x)$ и $q(x)$ на интервал $1 \leq x \leq \xi$ при $\xi > 1$. Далее это продолжение предполагается достаточно гладким. Отметим, что при $q(x) \equiv 0$ (внешняя упругая среда отсутствует) величина $\xi < 1$, если $\lambda^\circ = \lambda^* > \lambda$ [3, 7, 11, 12]. Решение задачи (3.1) далее считается известным: $v = v(x, \lambda^\circ)$, $\xi = \xi(\lambda^\circ)$.

Малости величины параметра ϵ , определяемого согласно (3.1), можно добиться на основе метода Релея – Ритца [8]. Вычислительная практика показывает, что обычно достаточной для выполнения условий теории возмущений оказывается величина $|\epsilon| \sim 10^{-1} - 10^{-2}$ (см. разд. 5). Как правило, такая оценка получается с помощью принципа Релея (2.3).

Итак, пусть параметр ε достаточно мал; совершим тождественные преобразования краевой задачи (1.1) на основе замен аргумента, функции и параметра

$$\begin{aligned} y &= x\xi, \quad 0 \leq y \leq \xi, \quad U(y, \varepsilon) \equiv u(x), \quad \Lambda = \xi^{-2}\lambda \\ (p(y(1-\varepsilon)^{-1})U')' + [\Lambda r(y(1-\varepsilon)^{-1}) - (1-\varepsilon)^{-2}q(y(1-\varepsilon)^{-1})]U &= 0 \\ \alpha_0 p(0)(1-\varepsilon)U'(0, \varepsilon) - \beta_0 U(0, \varepsilon) &= 0 \\ \alpha_1 p(\xi + \varepsilon)(1-\varepsilon)U'(\xi, \varepsilon) + \beta_1 U(\xi, \varepsilon) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Соотношения (3.2) рассматриваются как возмущенная задача на собственные значения (числа) Λ и функции U для значений y на интервале $0 \leq y \leq \xi$. В качестве невозмущенной (порождающей) задачи берутся уравнение и краевые условия при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} (p(y)U_0')' + [\Lambda_0 r(y) - q(y)]U_0 &= 0, \quad 0 \leq y \leq \xi \\ \alpha_0 p(0)U_0'(0) - \beta_0 U_0(0) &= 0 \\ \alpha_1 p(\xi)U_0'(\xi) + \beta_1 U_0(\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

т.е. краевая задача (1.1) на интервале $0 \leq y \leq \xi$.

Решение задачи Штурма – Лиувилля (3.3) Λ_0, U_0 известно; оно совпадает с построенным согласно (3.1) решением задачи Коши

$$\Lambda_0 = \lambda^\circ, \quad U_0(y) = v(y, \lambda^\circ), \quad 0 \leq y \leq \xi \quad (3.4)$$

Для исходной возмущенной задачи (3.2) искомое решение строим в виде представления

$$\Lambda(\varepsilon) = \lambda^\circ + \varepsilon\Lambda_1 + \varepsilon^2 \dots, \quad U(y, \varepsilon) = v(y, \lambda^\circ) + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 \dots \quad (3.5)$$

Неизвестные Λ_1, U_1 удовлетворяют неоднородной краевой задаче, которая получается после подстановки выражений (3.5) в (3.2) и приравнивания коэффициентов при первой степени ε :

$$\begin{aligned} (p(y)U_1')' + [\lambda^\circ r(y) - q(y)]U_1 &= -\Lambda_1 r(y)U_0(y) - \\ - (yp'(y)U_0'(y))' - \lambda^\circ yr'(y)U_0(y) + 2q(y)U_0(y) + yq'(y)U_0(y) \\ \alpha_0 p(0)U_1'(0) - \beta_0 U_1(0) &= \beta_0 U_0(0) \\ \alpha_1 p(\xi)U_1'(\xi) + \beta_1 U_1(\xi) &= -\alpha_1 p'(\xi)U_0'(\xi) - \beta_1 U_0(\xi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для определения неизвестных $\Lambda_1, U_1(y)$ воспользуемся свойством самосопряженности соответствующей однородной задачи (альтернативой Фредгольма). Умножим уравнение для U_1 (3.6) на U_0 и проинтегрируем по y на промежутке $0 \leq y \leq \xi$. В результате интегрирования по частям слагаемые, содержащие U_1 , исчезают. Коэффициент при U_1 в левой части соотношения тождественно равен нулю при учете граничных условий (3.6). Получается линейное уравнение для Λ_1 , разрешая которое находим искомое значение через известные величины

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & \|U_0\|^{-2} \int_0^\xi yp'(y)U_0'^2(y)dy + \|U_0\|^{-2} \int_0^\xi [-\lambda^\circ yr'(y) + \\ & + 2q(y) + yq'(y)]U_0^2(y)dy + \|U_0\|^{-2} [(\beta_1 / \alpha_1)U_0^2(\xi) + (\beta_0 / \alpha_0)U_0^2(0)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

При вычислении Λ, U в первом приближении по ε (с погрешностью $O(\varepsilon^2)$) без уменьшения точности по степеням ε можно положить $\xi = 1$ в (3.7). Поэтому продолжимость функций p, r, q может потребоваться только для решения задачи (3.1).

Следуя определению Λ (3.2) и его представлению в виде разложения (3.5), находим $\lambda^\circ = \lambda^*$, что величина λ_* будет оценкой снизу для λ при выполнении некоторого неравенства относительно $\varepsilon\Lambda_1$, т.е.

$$0 < \lambda_* = \xi^2 \lambda^* < \lambda, \quad \varepsilon\Lambda_1 > 0 \quad (3.8)$$

Величина $|\varepsilon|$ предполагается достаточно малой. Из (3.8) следует, что совместное выполнение неравенств $\xi(\lambda^*) > 1$ (т.е. $\varepsilon < 0$) и $\varepsilon\Lambda_1 > 0$ (т.е. $\Lambda_1 < 0$) невозможно. Знак числа ε определяется согласно (3.1), а знак коэффициента Λ_1 находится с помощью (3.7). В частности, устанавливается без интегрирования, что $\Lambda_1 > 0$ при $p'(y) \geq 0$, $r'(y) \leq 0$ и $q'(y) \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$. Следует обратить внимание, что внеинтегральные слагаемые в (3.7) равны нулю при $\alpha_{0,1} = 0$ или $\beta_{0,1} = 0$.

Итак, пусть коэффициент Λ_1 вычислен по формуле (3.7); тогда функция $U_1(y)$ может быть построена как решение задачи (3.6) с помощью метода вариации постоянных интегрирования. Для этой цели используется общее решение однородного уравнения, которое находится посредством формулы Лиувилля [7]. Затем аналогично вышеизложенному определяются последующие коэффициенты $\Lambda_2, U_2, \dots$ разложений (3.5). Может быть также применен метод последовательных приближений по степеням ε типа метода Пикара. Однако такой подход представляется весьма трудоемким и малопродуктивным. Ниже разрабатывается эффективный экономичный метод ускоренной сходимости, приводящий к простым однотипным расчетам на ЭВМ: интегрирование задачи Коши и определению корня. Отметим также, что в практических ситуациях часто оказывается достаточным вычисление первого приближения согласно (3.5), (3.7) при построении двусторонних оценок типа (2.3), (3.8). Полученные основные результаты и утверждения справедливы и для последующих собственных чисел, поскольку специфика первого числа никак не использовалась.

4. Метод ускоренной сходимости. Громоздкое выражение Λ_1 (3.7), содержащее квадратуры от функций, определяемых, как правило, численно в результате интегрирования задачи Коши (3.1), можно существенным образом упростить. Интегрируем их по частям, избавляясь от производных p', r', q' . В результате громоздких элементарных преобразований с учетом уравнений (3.1), (3.3) для $U_0 = v$ получим конечное выражение для λ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$:

$$\lambda = \lambda^\circ + \varepsilon\mu + \varepsilon^2 \dots, \quad \mu = \mu(\lambda^\circ) = -\xi p(\xi) V_0'^2(\xi) - [\lambda^\circ r(\xi) - q(\xi)] V_0^2(\xi) \quad (4.1)$$

$$V_0(x) \equiv U_0(x) \|U_0\|^{-1}$$

Здесь $V_0(x)$ — нормированная с весом $r(x)$ на интервале $0 \leq x \leq \xi$ функция $U_0(x) = v(x, \lambda^\circ)$. Вновь отметим, что без потери точности по степеням ε (в первом приближении по ε) величину ξ в μ можно положить равной единице ($\xi = 1$), т.е. продолжение функций p, r, q и решения v, v' не требуется (при $\xi > 1$). Норма функции $U_0(x)$ также связана с взятием квадратуры от функции $v(x, \lambda^\circ)$, определяемой численным интегрированием согласно (3.1). Эта операция может быть заменена процедурой совместного интегрирования задачи Коши для переменной v и ее производной $h = \partial v / \partial \lambda$:

$$(p(x)h')' + [\lambda^\circ r(x) - q(x)]h = -r(x)v, \quad h(0) = h'(0) = 0 \quad (4.2)$$

$$\|U_0\|^2 = \|v\|^2 = [v'(\xi, \lambda^\circ)h(\xi, \lambda^\circ) - v(\xi, \lambda^\circ)h'(\xi, \lambda^\circ)]p(\xi)$$

Формула (4.1) для μ существенно упрощается, если имеют место граничные условия первого или второго рода [11, 12]. В этом случае остается только одно слагаемое (первое или второе). Таким образом, получено компактное простое в вычислительном аспекте выражение для уточненного (с погрешностью $O(\varepsilon^2)$) собственного значения λ : $|\lambda - \lambda^{(1)}| \leq C\varepsilon^2$, где $\lambda^{(1)} = \lambda^0 + \varepsilon\mu$, а постоянная C и интервал значений ε могут быть эффективно оценены в терминах коэффициентов p, r, q .

Используем вновь соотношения (3.1), (4.1) (и (4.2)) для построения уточненного значения λ на основе найденного $\lambda^{(1)}$ и рассматриваемого как начальное приближение (аналогично λ^0). Подставим $\lambda^{(1)}$ в уравнение (3.1) вместо λ^0 , проинтегрируем задачу Коши (с условиями 1) или 2)) $v_{(1)} = v(x, \lambda^{(1)})$ и определим корень $\xi_{(1)}$ уравнения $E(x, \lambda^{(1)}) = 0$, ближайший к значению $x = 1$. Вследствие указанной простоты корня для параметра $\varepsilon_{(1)}$ и решения $v_{(1)}, v'_{(1)}$ имеют место оценки

$$|\varepsilon_{(1)}| \leq d|\lambda - \lambda^{(1)}| \leq dC\varepsilon^2, \quad |v - v_{(1)}| \leq K|\varepsilon_{(1)}|, \quad |v' - v'_{(1)}| \leq K|\varepsilon_{(1)}|$$

$$0 < d, C, K < \infty, \quad 0 \leq x \leq \xi_{(1)}, \quad \xi_{(1)} = 1 - \varepsilon_{(1)}$$
(4.3)

Воспользуемся формулами (4.1), (4.2) для получения уточненного значения λ :

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + \varepsilon_{(1)}\mu(\lambda^{(1)}), \quad |\lambda - \lambda^{(2)}| \leq C\varepsilon_{(1)}^2 \leq d^2C^3\varepsilon^4$$
(4.4)

Затем процесс уточнения ξ, ε, v, v' и λ повторяется. Получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \varepsilon_{(k)}\mu(\lambda^{(k)}), \quad |\lambda - \lambda^{(k+1)}| \leq C\varepsilon_{(k)}^2$$

$$\varepsilon_{(k)} = 1 - \xi_{(k)}, \quad \xi_{(k)} = \min_x \arg E(x, \lambda^{(k)}) > 0$$

$$E(x, \lambda^{(k)}) = \alpha_1 p(x)v'(x, \lambda^{(k)}) + \beta v(x, \lambda^{(k)})$$
(4.5)

$$|\varepsilon_{(k)}| \leq d|\lambda - \lambda^{(k)}| \leq dC\varepsilon_{(k-1)}^2, \quad |v - v_{(k)}| \leq K|\varepsilon_{(k)}|, \quad |v' - v'_{(k)}| \leq K|\varepsilon_{(k)}|$$

Из (4.5) (см., в частности, (4.3), (4.4)) следует, что скорость сходимости итераций весьма высокая. Она имеет квадратичный порядок по ε (аналогично методу касательных Ньютона):

$$|\varepsilon_{(k)}| \leq (dC)^{-1}(\varepsilon dC)^{\theta(k)}, \quad \theta(k) = 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
(4.6)

Из (4.6) следует, что несколько итераций (обычно две, три) приводят к высокоточным оценкам числа λ и функции u . Рекуррентная процедура уточнения (4.5) может быть применена к нахождению последующих собственных чисел λ_n и функций $u_n(x)$, $n \geq 2$. Она привлекательна по простоте реализации, экономичности и высокой точности и может быть легко реализована при помощи современных персональных компьютеров.

Обратимся вновь к неформальной процедуре выбора пробной функции $\psi(x)$ или системы $\{\psi_i(x)\}$ и построению начальной оценки λ^0 . Если величина $|\varepsilon|$, точнее $|\varepsilon|dC$, оказывается "не очень малой", то на предварительном этапе можно применить хорошо разработанные методы "пристрелки" или малокоординатного приближения по методу Релея – Ритца. На практике часто функции p, r, q зависят также от скалярного или векторного параметра $\gamma, \gamma \in \Gamma$ и требуется построить семейства собственных значений и функций. Пусть при некотором значении $\gamma = \gamma^0 \in \Gamma$ высокоточное (в частности, точное) решение задачи Штурма – Лиувилля известно: $\lambda = \lambda(\gamma^0), u = u(x, \gamma^0)$. Тогда эти величины могут быть приняты в качестве начальных приближений для других достаточно близких дискретных значений $\gamma_j \in \{\gamma_j\}$, где $\{\gamma_j\}$ –

достаточно плотное множество, $\{\gamma_j\} \in \Gamma$. Этот прием продолжения по параметру может быть также реализован искусственным введением параметра γ , $0 \leq \gamma \leq 1$, т.е. заменой $p(x)$ на $P(x, \gamma)$, $r(x)$ на $R(x, \gamma)$ и $q(x)$ на $Q(x, \gamma)$, где $P(x, 0)$, $R(x, 0)$, $Q(x, 0)$ "простые функции" (например постоянные), а $P(x, 1) \equiv p(x)$, $R(x, 1) \equiv r(x)$, $Q(x, 1) \equiv q(x)$. В частности, можно положить

$$\begin{aligned} P(x, \gamma) &= p_0 + \gamma(p(x) - p_0), & R(x, \gamma) &= r_0 + \gamma(r(x) - r_0) \\ Q(x, \gamma) &= q_0 + \gamma(q(x) - q_0), & p_0, r_0 &> 0, & q_0 &\geq 0 \end{aligned}$$

где p_0, r_0, q_0 — некоторые характерные значения функций $p(x), r(x), q(x)$ для $0 \leq x \leq 1$, например их средние или экстремальные значения. Параметр γ может принимать дискретные значения $\gamma_j = j/N$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N$), где N должно быть взято достаточно большим, что устанавливается в результате численного эксперимента.

5. Расчет модельных примеров. С целью иллюстрации эффективности разработанного метода и комментария к полученным формулам и аналитическим выражениям рассмотрим некоторые примеры.

5.1. Система с постоянными коэффициентами. В этом частном случае делением на $p > 0$ и переобозначением других параметров задача (1.1) преобразуется к виду

$$u'' + \lambda u = 0, \quad \alpha_0 u'(0) - \beta_0 u(0) = 0, \quad \alpha_1 u'(1) + \beta_1 u(1) = 0 \quad (5.1)$$

Пусть коэффициент β_0 или (и) β_1 не равен нулю; возьмем для определенности $\beta_0 > 0$. Тогда собственные значения λ_n и функции $u_n(x)$, $n \geq 1$ задачи (5.1) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a(\sin v_n x + (\alpha_0 / \beta_0) \cos v_n x), \quad v_n = \lambda_n^{1/2}, \quad a = \text{const} \\ \lambda_n &= \text{Arg}_\lambda [(\beta_0 \beta_1 - \lambda \alpha_0 \alpha_1) \sin \lambda^{1/2} + (\alpha_0 \beta_1 + \beta_0 \alpha_1) \lambda^{1/2} \cos \lambda^{1/2}] \end{aligned} \quad (5.2)$$

где Arg_λ означает множество положительных корней λ .

Величины λ_n могут быть найдены численно. Характеристическое уравнение для определения положительных собственных значения λ_n (5.2) приводится к более привычному и удобному для анализа виду

$$\text{tg } v = v(\alpha_0 \beta_1 + \beta_0 \alpha_1)(v^2 \alpha_0 \alpha_1 - \beta_0 \beta_1)^{-1}, \quad v^2 = \lambda \quad (5.3)$$

Непосредственным дифференцированием по v соотношения (5.3) можно установить, что корни v_n — простые для всех значений параметров $\alpha_{0,1}, \beta_{0,1}$, удовлетворяющих условиям типа (1.1).

Вычислим теперь неявную производную $\partial \lambda_n / \partial \xi$, исходя из уравнения (5.3). Во избежание загромождений рассмотрим более простой случай $\alpha_0 = 0$, т.е. закрепление левого конца абсолютно жесткое, а правого — упругое. Получим выражение

$$\partial \lambda_n / \partial \xi = -2(\alpha_1^2 \lambda_n^2 + \beta_1^2 \lambda_n)[(\alpha_1 + \beta_1 \xi) \beta_1 + \alpha_1^2 \xi \lambda_n]^{-1} < 0. \quad (5.4)$$

Применим теперь формулу (4.1), согласно которой указанная производная определяется коэффициентом μ , т.е.

$$\partial \lambda_n / \partial \xi = \mu(\lambda_n(\xi)) = -V_0'^2(\xi) - \lambda_n V_0^2(\xi) \quad (5.5)$$

Прямое вычисление значения функции $U_{n0}(x) = u(x, \lambda_n) = \sin v_n x$, ее производной и квадрата нормы $\|U_{n0}\|^2$ и подстановка в выражение для μ показывает, что значения (5.4) и (5.5) совпадают. Тем самым проведена проверка справедливости основной формулы (4.1) в частном случае однородной системы с упруго закрепленным правым концом. Отметим, что для краевых условий первого или второго рода (на левом или/и правом концах) значение производной одинаково и равно $\partial \lambda_n / \partial \xi = -2\lambda_n / \xi$.

5.2. *Расчет для сильно неоднородной системы.* Рассмотрим конкретный численный пример определения первого собственного числа для задачи вида

$$u'' + \lambda(1 - 0,9 \sin \pi x)^{-1} u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + 2u(1) = 0 \quad (5.6)$$

Здесь коэффициент $r(x)$, см. (1.1), изменяется в 10 раз, т.е. изучается система с сильно изменяющимися параметрами (линейной плотностью). Эквивалентная вариационная задача имеет вид (2.1)

$$J[u] = \int_0^1 u'^2 dx + 2u^2(1) \rightarrow \min$$

$$I[u] = \int_0^1 (1 - 0,9 \sin \pi x)^{-1} u^2 dx = 1 \quad (5.7)$$

с краевыми условиями (5.6) на u . Для начальной оценки λ воспользуемся принципом Релея, а в качестве пробной функции $\psi(x)$ возьмем $\psi = \sin \eta x$, где η – первый корень уравнения $\eta + 2 \operatorname{tg} \eta = 0$, т.е. $\psi(x)$ ищется в виде, отвечающем постоянной функции $r(x)$. Краевое условие первого рода на левом конце удовлетворяется автоматически, а краевое условие третьего рода на правом конце будет выполнено при $\eta = 2,28893$ (с пятью значащими цифрами после запятой). Вычисление оценки сверху согласно (2.3) приводит к значению $\lambda^* = 1,12451$. Далее, интегрируя задачу Коши согласно (3.1) при $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$, получим искомое значение корня $\xi = 0,93321$ функции $E(x, \lambda^*) = v'(x, \lambda^*) + 2v(x, \lambda^*)$. В результате находим величину параметра $\varepsilon = 6,679 \cdot 10^{-2}$, которая оказывается достаточно малой для применимости метода возмущений и метода ускоренной сходимости. Уточненное по формуле (4.1) собственное число вновь приводит к оценке сверху $\lambda^{(1)} = 1,07907$ и к соответствующему корню $\xi_{(1)} = 0,99170$ и параметру $\varepsilon_{(1)} = 8,30 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, согласно первому неравенству (4.3) имеем $dC \approx 1,8$, т.е. должна иметь место квадратичная сходимость процесса (4.5) типа (4.6) с параметром $\varepsilon dC \approx 0,12$. Следующие итерации приводят к величинам собственного числа $\lambda^{(2)} = 1,0739955$, корня $\xi_{(2)} = 0,9991044$ и $\varepsilon_{(2)} = 8,956 \cdot 10^{-4}$ (с семью цифрами после запятой). Дальнейшие расчеты позволяют получить $\lambda^{(3)} = 1,0734555$ и $\xi_{(3)} = 0,9999726$, т.е. $\varepsilon_{(3)} = 2,74 \cdot 10^{-5}$; и, наконец, $\lambda_{(4)} = 1,0734400$.

Проверка показывает (см. разд. 3 и формулу (3.8)), что величина $\xi_{(3)}^2 \lambda^{(3)}$ есть оценка снизу; таким образом, справедлива двусторонняя оценка $\lambda_* = \xi_{(3)}^2 \lambda^{(3)} = 1,073380 < \lambda < 1,073440$.

В качестве высокоточного приближенного значения λ примем среднее арифметическое $\frac{1}{2}(\lambda_* + \lambda^{(4)})$, которое приводит к относительной погрешности $\Delta\lambda/\lambda \approx 2 \cdot 10^{-5}$. Отметим, что ухудшение точности расчетов по сравнению с теоретической обусловлено ошибками округления.

Используем теперь для пробной функции $\psi(x)$ так называемое двухкоординатное приближение $\psi = c_1 \sin \eta_1 x + c_2 \sin \eta_2 x$, где $\eta_1 = 2,28893$, $\eta_2 = 5,08699$ – соответственно первый и второй корень уравнения $\eta + 2 \operatorname{tg} \eta = 0$. Согласно разд. 2 вычислим интегралы $J[\psi]$ и $I[\psi]$ (5.7); получим задачу минимизации квадратичной формы $J(c)$ при условии $I(c) = 1$, где $c = (c_1, c_2)^T$, а функции $J(c)$, $I(c)$ имеют вид

$$J(c) = c^T A c, \quad A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}), \quad a_{11} = 3,18666, \quad a_{22} = 13,80483$$

$$I(c) = c^T B c, \quad B = (b_{ij}), \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad i, j = 1, 2 \quad (5.8)$$

$$b_{11} = 2,83381, \quad b_{12} = b_{21} = 0,91900, \quad b_{22} = 1,81257$$

Применяя метод множителей Лагранжа, приходим к решению векового квадратного уравнения относительно λ : $\det(A - \lambda B) = 0$. Наименьший корень уравнения $\lambda^* = 1,09432$ есть оценка сверху первого собственного числа задачи (5.6). Нетрудно видеть, что она более точная, чем в рассмотренном ранее однокоординатном приближении пробной функции $\psi(x)$. Определение абсциссы ξ и параметра ε согласно процедуре (3.1) приводит к следующим значениям: $\xi = 0,97028$, $\varepsilon = 2,972 \cdot 10^{-2}$. Как и следовало ожидать, двухкоординатное

приближение дает более точный результат по отношению к ϵ (приблизительно в 2 раза). В первом приближении метода возмущений (4.1), (4.3) получим $\lambda^{(1)} = 1,0754351$, $\epsilon_{(1)} = 1 - \xi_{(1)} = 3,0094 \cdot 10^{-3}$. Далее рекуррентным образом по формулам (4.4), (4.5) находим следующие приближения: $\lambda^{(2)} = 1,0736612$, $\epsilon_{(2)} = 1 - \xi_{(2)} = 3,284 \cdot 10^{-4}$ и, наконец, $\lambda^{(3)} = 1,0734133$. Третья итерация привела практически к той же точности, что и четвертая при однокоординатном приближении $\psi(x)$. Аналогичное трехкоординатное представление пробной функции приводит к той же относительной погрешности $\Delta\lambda/\lambda \approx 2 \cdot 10^{-5}$ при выполнении второй итерации. Вновь отметим, что ухудшение точности вычислений по сравнению с теоретической обусловлено небольшими возможностями микрокалькулятора.

Полученные выше результаты свидетельствуют о высокой эффективности предлагаемого метода ускоренной сходимости для высокоточного решения весьма сложных задач на собственные значения и функции без привлечения дорогостоящего программного и математического обеспечения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00221, 96-01-00265).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
4. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с.
8. Крылов Н.М. Методы приближенного решения задач математической физики // Избр. тр. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. Т. 2. С. 150–204.
9. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.
10. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
11. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Accelerated convergence method in the Sturm – Liouville problem // Rus. J. of Math. Phys. 1995. V. 3. N 4. P. 517–521.
12. Нестеров С.В., Акуленко Л.Д. Эффективное решение задачи Штурма – Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 1. С. 44–46.

Москва

Поступила в редакцию
23.VI.1996