условия, при которых на этом интервале времени возможно возрастание амплитуды продольных смещений. При $t > 2\tau$ продольные смещения стержня в каждом сечении убывают по экспоненциальному закону: $u(x, t) \sim \exp(t \ln|\gamma|/(2\tau))$.

Быстрота затухания колебаний характеризуется величиной $D = -\ln|\gamma|$, которая имеет смысл логарифмического декремента колебаний.

По аналогии с электродинамикой и акустикой назовем $EF/c = Z_0$ импедансом стержня для продольных волн, $\alpha = Z$ импедансом закрепления. На фигуре показана зависимость логарифмического декремента $D = \ln|(1 + Z_0/Z)/(1 - Z_0/Z)$ от величины, равной отношению импеданса стержня к импедансу гасителя Z_0/Z.

Видно, что при $Z = Z_0$, когда импедансы гасителя и стержня равны, логарифмический декремент стремится к бесконечности, т.е. абсолютное затухание колебаний при любых начальных возмущениях, начиная с момента времени $t = 2\tau$, осуществляется практически мгновенно. Такой гаситель дает наибыстрейшее затухание колебаний в системе и в этом смысле оптимален.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00680).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
2. *Нагаев Р.Ф., Степанов А.В.* Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 24–28.
3. *Горошко О.А.* Критические случаи движения стержня с демпфером на конце // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 4. С. 129–132.
4. *Солдатов М.А., Миролюбов А.А.* Однородные разностные уравнения. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1975. 183 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию 19.XII.1995

УДК 539.3

© 1997 г. **В.А. Бучин, И.В. Панферов**

ОБОБЩЕННО-ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О ВРАЩЕНИИ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ С КВАДРАТНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Решается задача об обобщенно-плоской деформации вращающейся длинной квадратной упругой призмы. Концы призмы свободны от нагрузок. Для построения решения этой задачи с массовыми силами предлагается модификация метода Матье, которая заключается в том, что кроме ординарных рядов Фурье используются решения бигармонического уравнения в полиномах. Наличие этих решений в полиномах позволяет существенным образом усилить сходимость рядов Фурье. Исследуются напряженное состояние призмы и искажение ее граней.

Для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольника при произвольном нагружении кромок прямоугольников и при наличии массовых сил был предложен [1] метод двойных тригонометрических рядов. Недостатком этого метода является слабая сходимость рядов. Другой подход к исследованию плоской задачи теории упругости использует наложение ординарных рядов Фурье по одной и по другой координатам (метод Матье), причем каждый член этих рядов удовлетворяет бигармоническому уравнению. Обзор работ, посвященных развитию этого метода решения плоских задач, приведен в [2].

1. Постановка задачи и метод решения. Длинная квадратная в сечении изотропная упругая призма вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z, проходящей через центры ее поперечных сечений. Концы призмы свободны от нагрузок. Задачу об обобщенно-плоской деформации этой призмы мы будем решать в прямоугольной системе безразмерных координат x, y, отнесенных к полудлине стороны квадрата, с началом в центре квадратного поперечного сечения. Оси x и y направлены параллельно сторонам квадрата, поверхности $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ – соответственно боковые грани призмы.

Уравнения равновесия и совместности деформаций, описывающие обобщенно-плоскую деформацию исследуемой призмы, имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+xP=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+yP=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y},\quad E\varepsilon_{zz}=C_z,\quad P=\rho\omega^2 l^2$$

Связь между напряжениями и деформациями запишем в форме

$$E(1-\nu^2)^{-1}\varepsilon_{xx}=\sigma_{xx}-\nu(1-\nu)^{-1}\sigma_{yy}-\nu(1-\nu^2)^{-1}C_z$$

$$E(1-\nu^2)^{-1}\varepsilon_{yy}=\sigma_{yy}-\nu(1-\nu)^{-1}\sigma_{xx}-\nu(1-\nu^2)^{-1}C_z \tag{1.2}$$

$$E(1-\nu^2)^{-1}\varepsilon_{xy}=2(1-\nu)^{-1}\sigma_{xy},\quad E\varepsilon_{zz}=\sigma_{zz}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала, ω – угловая скорость вращения призмы, l – половина длины сторон квадратного поперечного сечения призмы.

Постоянная C_z определяется из условия равенства нулю равнодействующей силы на концах призмы

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sigma_{zz}dxdy=0 \tag{1.3}$$

Запишем граничные условия на боковых поверхностях призмы

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xy}=0,\quad x=\pm 1;\quad \sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0,\quad y=\pm 1 \tag{1.4}$$

Учитывая симметрию задачи, точное решение уравнений (1.1), (1.2) можно записать в виде

$$\sigma_{xx}=(x,y)=-\frac{P(x^2-1)}{2(1-\nu)}+D_1(x^2-1-y^2)+$$

$$+D_2(6x^2y^2-3y^4+x^4-1)+M+\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(x,y)-\varphi_n(x,y)]$$

$$f_n(x,y)=\cos(\alpha_n x)\{C_{1,n}\operatorname{ch}(\alpha_n y)+C_{2,n}[2\alpha_n^{-1}\operatorname{ch}(\alpha_n y)+y\operatorname{sh}(\alpha_n y)]\}, \tag{1.5}$$

$$\alpha_n=\pi n,\quad n\geqslant 1$$

$$\varphi_n(x,y)=\cos(\alpha_n y)\{C_{1,n}\operatorname{ch}(\alpha_n x)+C_{2,n}x\operatorname{sh}(\alpha_n x)\}$$

$$\sigma_{xy}(x,y)=\frac{\nu xyP}{1-\nu}-2xyD_1-D_2 4(xy^3+x^3y)+\sum_{n=1}^{\infty}[\psi_n(x,y)+\psi_n(y,x)]$$

$$\psi_n(x,y)=\sin(\alpha_n x)\{C_{1,n}\operatorname{sh}(\alpha_n y)+C_{2,n}[\alpha_n^{-1}\operatorname{sh}(\alpha_n y)+y\operatorname{ch}(\alpha_n y)]\}$$

Здесь $D_1, D_2, C_{1,n}, C_{2,n}$ – постоянные, подлежащие определению в процессе решения. Выражение для $\sigma_{yy}(x, y)$ получается из формулы для вычисления $\sigma_{xx}(x, y)$ циклической заменой $(x, y) \to (y, x)$.

В формулах (1.5) первый член (пропорциональный P) определяет частное решение уравнений (1.1), (1.2) с массовыми силами. Другие члены удовлетворяют однородной системе уравнений (1.1), (1.2), которая, как известно, сводится к бигармоническому уравнению.

Положим

$$D_1+4D_2=\frac{\nu P}{2(1-\nu)} \tag{1.6}$$

В этом случае выражение σ_{xy} кроме рядов Фурье содержит полином $-4D_2(x^3y + xy^3 - 2xy)$.

В силу симметрии соотношений (1.5) достаточно удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности $x = 1$. Оставшиеся условия (1.4), а также условие равенства нулю вектора момента, действующего в поперечных сечениях призмы, выполняются автоматически.

Разложим в ряды Фурье гиперболические функции следующим образом:

$$\mathrm{ch}(\alpha_n y) = \frac{1}{2} y^2 \alpha_n \,\mathrm{sh}\,\alpha_n + \sum_{m=0}^{\infty} b_{n,m}^1 \cos(\alpha_m y)$$
$$y\,\mathrm{sh}(\alpha_n y) = \frac{1}{2} y^2 (\alpha_n \,\mathrm{ch}\,\alpha_n + \mathrm{sh}\,\alpha_n) + \sum_{m=0}^{\infty} b_{n,m}^2 \cos(\alpha_m y) \tag{1.7}$$

Порядок асимптотического затухания по m коэффициентов $b_{n,m}^1$, $b_{n,m}^2$ равен m^{-4}.

Принимая во внимание формулы

$$y - y^3 = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \sin(\alpha_m y), \quad \alpha_m = \pi m, \quad s_m = -12(-1)^m (\pi m)^{-3}$$
$$2y^2 - y^4 = \frac{7}{15} + 48 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\pi m)^{-4} \cos(\alpha_m y) \tag{1.8}$$

заключаем, что уравнение $\sigma_{xy}(1, y) = 0$ сводится к системе

$$4D_2 s_m + C_{1,m} \,\mathrm{sh}\,\alpha_m + C_{2,m}(\alpha_m^{-1} \,\mathrm{sh}\,\alpha_m + \mathrm{ch}\,\alpha_m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

В уравнении $\sigma_{xx}(1, y) = 0$ разложим в ряды Фурье гиперболические функции, а также член $3D_2(2y^2 - y^4)$ в соответствии с формулами (1.7), (1.8).

В результате получим систему алгебраических уравнений

$$D_2 144(-1)^m \alpha_m^{-4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{C_{1,n} b_{n,m}^1 + C_{2,n}(2\alpha_n^{-1} b_{n,m}^1 + b_{n,m}^2)\} -$$
$$- C_{1,m} \,\mathrm{ch}\,\alpha_m - C_{2,m} \,\mathrm{sh}\,\alpha_m = 0, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

$$D_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{C_{1,n} \alpha_n \,\mathrm{sh}\,\alpha_n + C_{2,n}(3\,\mathrm{sh}\,\alpha_n + \alpha_n \,\mathrm{ch}\,\alpha_n)\}$$
$$-M = \frac{7}{5} D_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{C_{1,n} b_{n,0}^1 + C_{2,n}(2\alpha_n^{-1} b_{n,0}^1 + b_{n,0}^2)\} \tag{1.11}$$

Уравнение (1.6) замыкает систему бесконечных алгебраических уравнений для определения постоянных $C_{1,m}$, $C_{2,m}$, D_1, D_2 и M. При выводе системы уравнений (1.10), (1.11) использовалось разложение функционального уравнения $\sigma_{xx}(1, y) = 0$ по базовым функциям y^2, 1, $\cos(\pi m y)$.

Заметим, что сходимость ординарных рядов Фурье (1.5) тем выше, чем выше порядок асимптотического затухания по m свободных членов (пропорциональных D_2) и коэффициентов $b_{n,m}^1$, $b_{n,m}^2$ бесконечной системы уравнений (1.10), а также свободных членов $(4D_2 s_m)$ в системе (1.9). В данном случае (при наличии двух полиномов с неопределенными постоянными D_1 и D_2 в решении (1.5)) порядок затухания свободных членов и коэффициентов $b_{n,m}^1$, $b_{n,m}^2$ в системе (1.10) равен m^{-4}. В системе (1.9) порядок затухания свободных членов равен m^{-3}. Расчеты показывают, что построенное решение (1.5), (1.6), (1.9)–(1.11) обладает очень высокой сходимостью.

Постоянная C_z определяется из условия (1.3).

Безразмерные (отнесенные к l) перемещения вычисляются по формулам

$$u_x^*(x, y) = \int_0^x \varepsilon_{xx}(\eta, y) d\eta, \quad u_y^*(x, y) = \int_0^y \varepsilon_{yy}(x, \xi) d\xi$$

2. Результаты расчетов. В предыдущем разделе было отмечено, что при $\nu = 0$ решение задачи имеет вид

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{2}P(x^2-1), \quad \sigma_{yy} = -\frac{1}{2}P(y^2-1), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{zz} = 0$$

В этом случае грани $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ остаются плоскими в процессе деформации призмы.

Очевидно, что касательные напряжения в исследуемой призме существенно зависят от коэффициента Пуассона ν.

Ниже приведены величины безразмерных (отнесенных к P) напряжений в некоторых характерных точках поперечного сечения призмы при $\nu = 0{,}5$ и $L = 50$ (номер члена, на котором обрываются суммы рядов Фурье):

$(x; y)$	(0; 0)	(0; 1)	(0,4; 0,4)	(0,6; 0,6)	(1; 0,9)	(1; 1)
$\sigma^*_{xx} \cdot 10^4$	6410	893	4909	3312	0	1
$\sigma^*_{yy} \cdot 10^4$	6410	0	4909	3312	817	1
$\sigma^*_{xy} \cdot 10^5$	0	0	6466	9707	1	0
$\sigma^*_{zz} \cdot 10^4$	3076	–2887	1575	–21	–2925	–3332

Заметим, что при $L \geqslant 15$ результаты практически совпадают.

Приведем результаты расчета напряжений для квадратной призмы ($l = 10$ мм) из бериллия [3] ($\nu = 0{,}02$, $E = 3 \cdot 10^{11}$ н/м^2, $\rho = 1{,}8$ г/см^3), вращающейся с угловой скоростью $\omega = 10^4\pi$ с$^{-1}$:

$(x; y)$	(0; 0)	(0; 1)	(0,6; 0,6)	(1; 1)
$\sigma^*_{xx} \cdot 10^4$	5029	4916	3202	0
$\sigma^*_{yy} \cdot 10^4$	5029	0	3202	0
$\sigma^*_{xy} \cdot 10^4$	0	0	19,81	0
$\sigma^*_{zz} \cdot 10^4$	67,82	–35,01	–5,24	–133,3

а также размерных величин перемещений $u_x(1, y)$ и $u_y(1, y)$ грани $x = 1$:

y	0	0,25	0,50	0,75	1
u_x, мкм	1,96	1,96	1,97	1,98	1,98
u_y, мкм	0	0,73	1,36	1,81	1,98

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тодоров М.М.* О решении плоской задачи теории упругости для прямоугольника посредством двойных тригонометрических рядов // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 185–191.
2. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 3. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
3. Справочник по машиностроительным материалам / Под ред. Г.И. Погодина-Алексеева. М.: Машгиз, 1959. Т. 2. 639 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.V.1995