$\tau \leqslant t < +\infty$, где $\tau = \pi + \ln(4-2\sqrt{2})$. Можно проверить, что $T := T(x_0, x(\cdot)) = \tau + \pi/4$. Кроме того, $x(t) \in \operatorname{int} G$ при $t \in [0; \pi) \cup (\tau; T)$ и $x(t) \in \operatorname{Fr} G$ на отрезке $[\pi; \tau]$.

Положим $p(t) = \exp((\pi - t)A)(-1, 1)'$ при $0 \leqslant t < \pi$ и $p(t) = \exp(\pi - t)(-1, 1)'$ при $\pi \leqslant t \leqslant \tau$.

Можно убедиться, что относительно $x_0, x(\cdot), p(\cdot)$ и $t_* := \tau$ выполнены все условия теоремы 1. При этом проверку выполнения условия 3 можно осуществить с помощью альтернированного интеграла Понтрягина [6]. Таким образом, $x(\cdot)$ – оптимальная траектория для начальной точки x_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сатимов Н., Азамов А.* К задаче избежания столкновений в нелинейных системах // Докл. АН УзССР. 1974. № 6. С. 3–5.
2. *Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.* Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1303–1315.
3. *Фазылов А.З.* К задаче избежания столкновений // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 3. С. 30–36.
4. *Aubin J.-P.* A survey of viability theory // SIAM J. Contr. and Optim. 1990. V. 28. N 4. P. 749–788.
5. *Blagodatskikh V.I.* Sufficient conditions for optimality in problems with state constraints // Appl. Math. and Optim. 1981. V. 7. N 2. P. 149–157.
6. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.

Ташкент

Поступила в редакцию 22.V.1995

УДК 624.07:534.1

© 1997 г. **А.И. Весницкий, И.В. Милосердова**

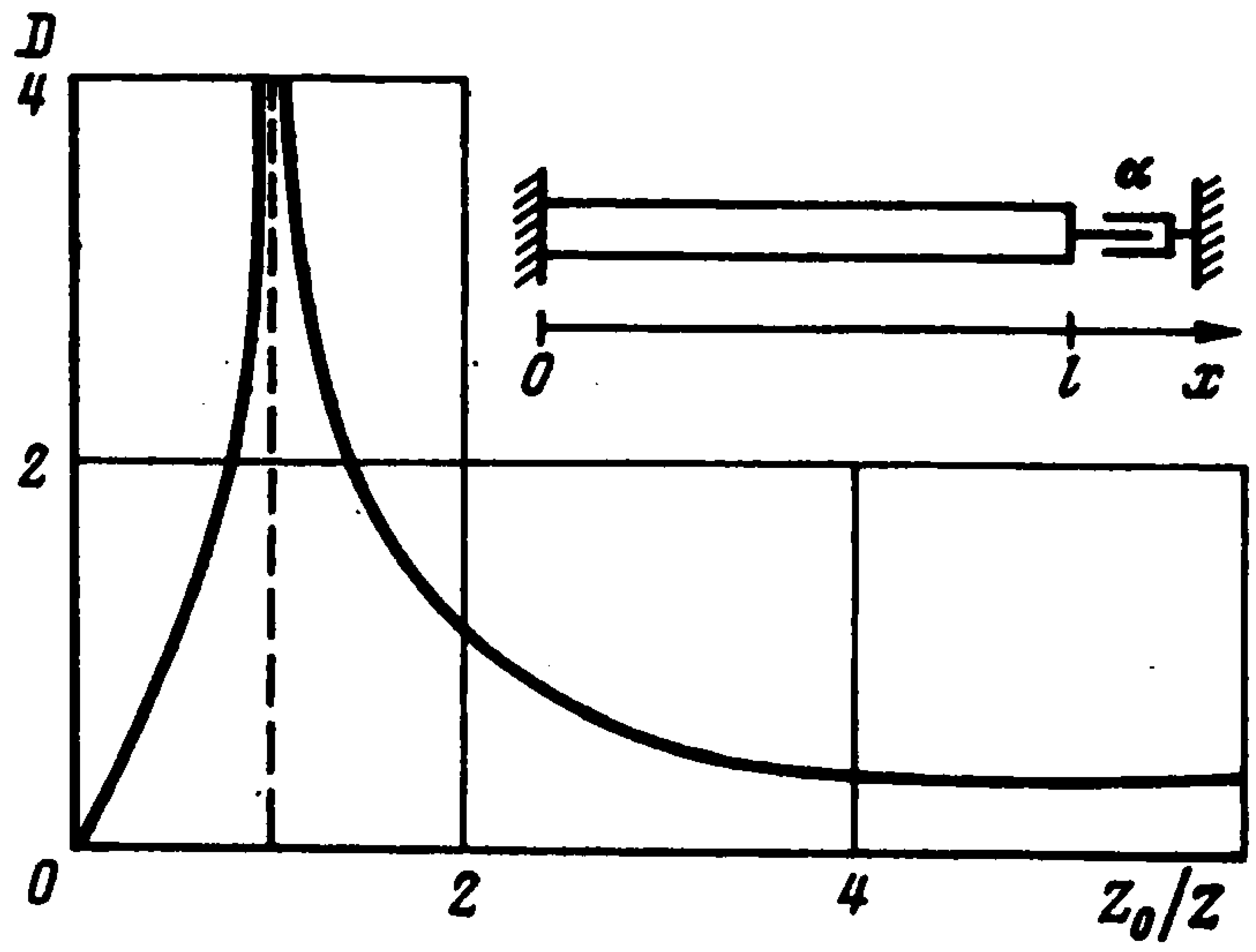
ОПТИМАЛЬНЫЙ ГАСИТЕЛЬ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

На примере продольных колебаний стержня найдены параметры концевого гасителя, устраняющего любые возмущения в системе за наименьшее время, равное времени удвоенного пробега волны вдоль стержня, и в этом смысле являющегося оптимальным.

Задача об отыскании оптимального динамического гасителя колебаний, по-видимому, впервые была поставлена Тимошенко [1] применительно к системе, представляющей собой сосредоточенную массу, прикрепленную к основанию пружиной. К массе, колебания которой возбуждаются периодической силой, присоединен упруго-инерционный гаситель с вязким демпфером.

Было получено [2] строгое и полное решение задачи оптимизации для такой простейшей системы и определены параметры гасителя, при которых скорость затухания (декремент) свободных колебаний системы является максимально возможной. Результаты работы были обобщены на случай гашения колебаний системы с двумя степенями свободы. Для аналогичной задачи в случае цепочки связанных осцилляторов, моделирующих продольные колебания стержня, исследования проводились [2] с позиций теории колебаний линейных сосредоточенных систем, и, естественно, решение искалось в ограниченном классе возможных ситуаций, исключающих абсолютное затухание за конечное время.

Задача об отыскании параметров гасителя, обеспечивающего затухание за конечное время, может быть поставлена и решена в рамках распределенных систем при анализе динамических процессов с позиций теории волн. Впервые применительно к распределенным системам на возможность создания демпфера, дающего наибыстрейшее затухание, было указано в [3].



Рассмотрим стержень, жестко заделанный на одном конце ($x = 0$), а на другом ($x = l$) закрепленный с помощью вязкого демпфера (фигура).

Распространение продольных возмущений в стержне описывается начально-краевой задачей

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0; \quad EFu_x + \alpha u_t|_{x=l} = 0 \qquad (2)$$

$$u(x,0) = U_0(x), \quad u_t(x,0) = V_0(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \qquad (3)$$

Здесь $u(x, t)$ – продольное смещение поперечного сечения стержня относительно невозмущенного состояния, $c = (E/\rho)^{1/2}$ – скорость продольных волн, E, ρ – модуль упругости и плотность материала стержня, F – площадь поперечного сечения стержня, α – коэффициент вязкого сопротивления, $U_0(x)$, $V_0(x)$ – заданные функции.

Решение волнового уравнения (1) представимо в виде двух волн, бегущих в противоположных направлениях

$$u(x,t) = f(t + x/c) + h(t - x/c) \qquad (4)$$

Разложение искомого решения на бегущие волны позволяет перейти от краевой задачи в частных производных к дифференциальному уравнению с отклоняющимся аргументом в обыкновенных производных, описывающему изменение формы волны $f(t) = -h(t)$ при ее взаимодействии с границей $x = l$

$$EFc^{-1}[f'(t+\tau) + f'(t-\tau)] + \alpha[f'(t+\tau) - f'(t-\tau)] = 0 \qquad (5)$$

где $\tau = l/c$ – время пробега волны вдоль стержня.

Для решения задачи необходимы начальные условия для $f'(t \pm x/c)$, которые находятся путем разложения начальных возмущений (3) по бегущим волнам при $t = 0$

$$f'(\pm x/c) = \tfrac{1}{2}[\pm V_0(x) + cU_0'(x)], \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

Граница $x = 0$ абсолютно жесткая ($u(0, t) = 0$), поэтому, продолжая функции $V_0(x)$, $U_0(x)$ на интервал $[-l, 0]$ соответственно четным и нечетным образом, получаем начальные условия для f' в виде

$$f'(t) = \tfrac{1}{2}[V_0(ct) + cU_0'(ct)], \quad f'(-t) = -f'(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau)$$

Полагая $f'(t) = \varphi(t)$, получаем что исходная задача сводится к отысканию решения разностного уравнения

$$\varphi(t+\tau) - \gamma\varphi(t-\tau) = 0, \quad \gamma = (\alpha - EF/c)/(\alpha + EF/c) \qquad (6)$$

удовлетворяющего условию

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{2}[V_0(ct) + cU_0'(ct)], \quad \varphi(-t) = -\varphi(t), \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau) \qquad (7)$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде [4]

$$\varphi(t) = \Pi(t)\exp(-\beta t) \qquad (8)$$

где $\Pi(t)$ – некоторая периодическая функция с периодом 2τ, β – постоянная, зависящая от параметров системы.

Подставляя (8) в (6), находим величину $\beta = \mathrm{Ln}\,\gamma^{-1}/(2\tau)$, т.е. решение (8) представляет собой бесконечную совокупность 2τ-периодических функций, отличающихся множителями $\exp(ik\pi/\tau)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$). Поэтому в дальнейшем под $\varphi(t)$ будем понимать "главное значение", для которого $k = 0$ и $\ln$ означает главное значение логарифма.

Таким образом, решение (8) можно записать в виде

$$\varphi(t) = \Pi(t)\exp(t\ln\gamma/(2\tau)) \text{ при } \gamma > 0 \quad (\alpha > EF/c) \tag{9}$$

$$\varphi(t) = \Pi(t)\exp[(\ln(-\gamma)+i\pi)t/(2\tau)] \text{ при } \gamma < 0 \quad (\alpha < EF/c)$$

Входящая в (8) функция $\Pi(t)$ на интервале $[-\tau, \tau]$ определяется начальными условиями

$$\Pi(t) = \varphi(t)\exp(\beta t)$$

причем $\varphi(t)$ находится из соотношения (7).

Продолжим $\Pi(t)$ периодически вне этого интервала

$$\Pi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^+\cos\frac{\pi kt}{\tau} + a_k^-\sin\frac{\pi kt}{\tau}\right)$$

$$a_k^+ = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\Pi(\theta)\cos\frac{\pi k\theta}{\tau}d\theta, \quad a_k^- = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\Pi(\theta)\sin\frac{\pi k\theta}{\tau}d\theta$$

Таким образом, если известны функции начальных возмущений U_0 и V_0, то искомое решение $u(x, t)$ определяется через найденную функцию $\varphi(t)$ путем интегрирования

$$u(x,t) = \int_{t-x/c}^{t+x/c}\varphi(\theta)d\theta$$

После преобразований получаем решение задачи (1)–(3) при $\gamma > 0$ ($\alpha > EF/c$)

$$u(x,t) = f(t+x/c) - f(t-x/c) \tag{10}$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln\gamma}\exp\left(\frac{x}{2\tau}\ln\gamma\right)\left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k^+\cos\frac{\pi kx}{\tau} + p_k^-\sin\frac{\pi kx}{\tau}\right)\right]$$

$$p_k^{\pm} = \frac{2\tau(a_k^{\pm}\ln\gamma \mp 2\pi k a_k^{\mp})\ln\gamma}{\ln^2\gamma + (2\pi k)^2}$$

При $\gamma < 0$ ($\alpha < EF/c$) после разделения действительной и мнимой частей решение имеет вид (10), где

$$f(x) = \exp\left[\frac{x}{2\tau}\ln(-\gamma)\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(q_k^+\cos\frac{\pi+2\pi k}{2\tau}x + q_k^-\sin\frac{\pi+2\pi k}{2\tau}x\right)$$

$$q_0^+ = \frac{a_0\tau\ln(-\gamma)}{\pi^2+\ln^2(-\gamma)}, \quad q_0^- = \frac{a_0\tau\pi}{\pi^2+\ln^2(-\gamma)} \tag{11}$$

$$q_k^{\pm} = \frac{a_k^{\pm}\ln(-\gamma) \mp a_k^{\mp}(\pi+2\pi k)}{\ln^2(-\gamma)+(\pi+2\pi k)^2}\tau$$

В частности, на границе стержня $x = l$ смещение стержня равно

$$u(l,t) = \ln\gamma^{-1}2\exp\frac{t\ln\gamma}{2\tau}\operatorname{sh}\frac{\ln\gamma}{2}\left\{a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[p_k^+\cos\frac{\pi kt}{\tau} + p_k^-\sin\frac{\pi kt}{\tau}\right]\right\}, \quad \gamma > 0$$

$$u(l,t) = 2\exp\frac{t\ln(-\gamma)}{2\tau}\operatorname{ch}\frac{\ln(-\gamma)}{2}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left[q_k^-\cos\frac{\pi+2\pi k}{2\tau}t - q_k^+\sin\frac{\pi+2\pi k}{2\tau}t\right]\right\}, \quad \gamma < 0 \tag{12}$$

Выражения (10)–(12) дают в общем виде решение задачи о гашении продольных колебаний стержня, жестко закрепленного на одном конце.

Решение (12) показывает, что на начальном этапе движения, когда время не превышает времени удвоенного пробега волны вдоль стержня ($t < 2\tau$), существуют такие начальные условия, при которых на этом интервале времени возможно возрастание амплитуды продольных смещений. При $t > 2\tau$ продольные смещения стержня в каждом сечении убывают по экспоненциальному закону: $u(x, t) \sim \exp(t \ln|\gamma|/(2\tau))$.

Быстрота затухания колебаний характеризуется величиной $D = -\ln|\gamma|$, которая имеет смысл логарифмического декремента колебаний.

По аналогии с электродинамикой и акустикой назовем $EF/c = Z_0$ импедансом стержня для продольных волн, $\alpha = Z$ импедансом закрепления. На фигуре показана зависимость логарифмического декремента $D = \ln|(1 + Z_0/Z)/(1 - Z_0/Z)|$ от величины, равной отношению импеданса стержня к импедансу гасителя Z_0/Z.

Видно, что при $Z = Z_0$, когда импедансы гасителя и стержня равны, логарифмический декремент стремится к бесконечности, т.е. абсолютное затухание колебаний при любых начальных возмущениях, начиная с момента времени $t = 2\tau$, осуществляется практически мгновенно. Такой гаситель дает наибыстрейшее затухание колебаний в системе и в этом смысле оптимален.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00680).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
2. *Нагаев Р.Ф., Степанов А.В.* Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 24–28.
3. *Горошко О.А.* Критические случаи движения стержня с демпфером на конце // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 4. С. 129–132.
4. *Солдатов М.А., Миролюбов А.А.* Однородные разностные уравнения. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1975. 183 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
19.XII.1995

УДК 539.3

© 1997 г. В.А. Бучин, И.В. Панферов

ОБОБЩЕННО-ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О ВРАЩЕНИИ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ С КВАДРАТНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Решается задача об обобщенно-плоской деформации вращающейся длинной квадратной упругой призмы. Концы призмы свободны от нагрузок. Для построения решения этой задачи с массовыми силами предлагается модификация метода Матье, которая заключается в том, что кроме ординарных рядов Фурье используются решения бигармонического уравнения в полиномах. Наличие этих решений в полиномах позволяет существенным образом усилить сходимость рядов Фурье. Исследуются напряженное состояние призмы и искажение ее граней.

Для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольника при произвольном нагружении кромок прямоугольников и при наличии массовых сил был предложен [1] метод двойных тригонометрических рядов. Недостатком этого метода является слабая сходимость рядов. Другой подход к исследованию плоской задачи теории упругости использует наложение ординарных рядов Фурье по одной и по другой координатам (метод Матье), причем каждый член этих рядов удовлетворяет бигармоническому уравнению. Обзор работ, посвященных развитию этого метода решения плоских задач, приведен в [2].