УДК 62–50

© 1997 г. А.З. Фазылов

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЫЖИВАНИЯ

Рассматривается задача об удержании траекторий дифференциального включения на максимальном отрезке времени в заданном замкнутом множестве [1–4], являющаяся задачей оптимального управления с фазовыми ограничениями. Получены достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума (ср. [5]).

**1.** Рассматривается задача об удержании траекторий дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x) \tag{1.1}$$

в заданном множестве $G$ на максимальном отрезке времени. Предполагается, что $G$ – непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $F(x)$ – непустое компактное подмножество $\mathbb{R}^d$ для каждого $x \in \mathbb{R}^d$.

Под решением включения (1.1) на промежутке времени $I$ понимается абсолютно непрерывная функция $x(\cdot) : I \to \mathbb{R}^d$, такая, что $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ почти всюду на $I$.

Через $Y(x_0)$ обозначим совокупность всех решений включения (1.1), удовлетворяющих начальному условию $x(0) = x_0$.

По заданным $x_0 \in G$ и $x(\cdot) \in Y(x_0)$ определяется функционал качества

$$T(x_0, x(\cdot)) = \sup\{t \geqslant 0 \,|\, x(r) \in G \ \text{ для всех } r \in [0; t]\}$$

Задача выживания в области $G$, или, что то же самое, задача избежания столкновений с терминальным множеством $M := \mathbb{R}^d \backslash G$ для заданного начального состояния $x_0 \in G$ ставится следующим образом [1–4]:

$$T(x_0, x(\cdot)) \to \sup, \quad x(\cdot) \in Y(x_0) \tag{1.2}$$

Траектория $x(\cdot) \in Y(x_0)$ называется оптимальной для начальной точки $x_0 \in G$, если $T(x_0, x(\cdot)) = T(x_0)$, где

$$T(x_0) = \sup\{T(x_0, z(\cdot)) \,|\, z(\cdot) \in Y(x_0)\}$$

Замкнутость множества $G$ позволяет отнести задачу (1.2) к типу задач оптимального управления с фазовыми ограничениями. Ниже на основании полученных ранее результатов [5] приводятся достаточные условия оптимальности для задачи (1.2).

**2.** Введем многозначное отображение $Z(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to 2^{\mathbb{R}^d}$, определяемое формулой

$$Z(p, x) = \{z \,|\, (z, y - x) \leqslant C(F(x), p) - c(F(y), p) \ \text{ для всех } y \in G\},$$

где $c(X, \psi) = \sup\{(\psi, y) | y \in X\}$ – опорная функция множества $X \subset \mathbb{R}^d$.

*Определение.* Функция $p(\cdot) : [0; T] \to \mathbb{R}^d$ называется сопряженной функцией без сингулярности для траектории $x(\cdot) \in Y(x_0)$ на отрезке времени $[0; T]$, если функция $p(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям: а) непрерывна слева; б) представима как сумма абсолютно непрерывной функции и функции скачков, причем все точки скачка $\tau_i$, $i \in E(p(\cdot))$, $E(p(\cdot)) \subset \mathbb{N}$, лежат в интервале $(0; T)$; в) имеет место включение $\dot{p}(t) \in Z(p(t), x(t))$ почти всюду на отрезке $[0; T]$.

*Теорема* 1. Пусть для $x_0 \in G$ и $x(\cdot) \in Y(x_0)$ величина $T := T(x_0, x(\cdot))$ конечна. Пусть, далее, существуют момент времени $t_* \in (0; t]$ и сопряженная функция $p(\cdot)$ без сингулярности для $x(\cdot)$ на отрезке $[0; T_*]$, такие, что:

1) выполнено условие максимума

$$(\dot{x}(t), p(t)) = c(F(x(t)), p(t)) \tag{2.1}$$

для почти всех $t \in [0; t_*]$;

2) выполнено условие скачка $(x(\tau_i), p^i) = c(G, p^i)$ для всех $i \in E(p(\cdot))$, где $p^i = p(\tau_i + 0) - - p(\tau_i - 0)$;

3) справедливо неравенство $T(y_0) \leqslant T - t_*$ для всех $y_0 \in G \cap \Pi(p(t_*), x(t_*))$, $\Pi(p, x) = = \{x | (z - x, p) \leqslant 0\}$.

Тогда $x(\cdot)$ – оптимальная траектория задачи (1.2) для начальной точки $x_0$.

*Доказательство*. Пусть $x_0$, $x(\cdot)$, $T$, $p(\cdot)$, $t_*$ удовлетворяют всем условиям теоремы.

Допустим, что существует $y(\cdot) \in Y(x_0)$, такое, что $T(x_0, y(\cdot)) > t_*$. В противном случае доказательство теоремы очевидно. Рассмотрим функцию $\xi(t) = (p(t), y(t) - x(t))$ на отрезке $[0; t_*]$. Так как $y(t) \in G$ для всех $t \in [0; t_*]$, то, воспользовавшись условиями 1, 2 и определением сопряженной функции, аналогично изложенному ранее [5], имеем

$$\xi(t) = \int_0^t \dot{\xi}(r)dr + \sum_{i:\tau_i < t} [\xi(\tau_i + 0) - \xi(\tau_i - 0)] \leqslant \int_0^t \Phi(r)dr +$$

$$+ \sum_{i:\tau_i < t} [(y(\tau_i), p^i) - c(G, p^i)] \leqslant \int_0^t \Phi(r)dr \leqslant 0, \quad \Phi(r) = (\dot{y}(r), p(r)) - c(F(y(r)), p(r))$$

для всех $t \in [0; t_*]$. Отсюда, в частности, вытекает, что $y(t_*) \in G \cap \Pi(p(t_*), x(t_*))$. Следовательно, согласно условию 3, будем иметь $T(x_0, y(\cdot)) \leqslant t_* + T(y(t_*)) \leqslant T(x_0, x(\cdot))$.

Теорема доказана.

*Теорема* 2. Пусть для $x_0 \in G$ и $x(\cdot) \in Y(x_0)$ величина $T := T(x_0, x(\cdot))$ конечна. Пусть, далее, существует сопряженная функция $p(\cdot)$ без сингулярности для $x(\cdot)$ на отрезке $[0; T]$, такая, что:

1°) $x(\cdot)$ – единственное решение включения (1.1), принадлежащее $Y(x_0)$ и удовлетворяющее условию максимума (2.1) почти всюду на отрезке $[0; T]$;

2°) $(x(\tau_i), p^i) = c(G, p^i)$ для всех $i \in E(p(\cdot))$;

3°) $\operatorname{int} \Pi(p(T), x(T)) \subset M$.

Тогда $x(\cdot)$ – единственная оптимальная траектория задачи (1.2), соответствующая начальной точке $x_0$.

*Доказательство*. Предположим противное. Тогда существует траектория $y(\cdot) \in Y(x_0)$, такая, что

$$T(x_0, y(\cdot)) \geqslant T(x_0, x(\cdot)) \tag{2.2}$$

причем $y([0; T]) \neq x([0; T])$.

Как и при доказательстве теоремы 1, рассматривается функция $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и устанавливается, что

$$\xi(T) \leqslant \int_0^T \Phi(r)dr$$

Отсюда согласно условию 1° имеем $\xi(T) < 0$. Следовательно, в силу условия 3°,

$$y(T) \in \operatorname{int} \Pi(p(T), x(T)) \subset M$$

что противоречит (2.2). Теорема доказана.

**3.** ***Пример***. Пусть $G = \{x \in \mathbb{R}^2 | (x, m) \geqslant 0\}$ и дифференциальное включение (1.1) задано управляемой системой

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

где $m = (0, 1)'$, $P$ – отрезок с вершинами в точках $(1, 0)'$ и $(-2, -3)'$ (штрихом обозначено транспонирование).

Пусть $x_0 = (-11/4, 4)$ и $x(\cdot)$ – решение задачи Коши $\dot{x} = Ax + u(t)$, $x(0) = x_0$, в которой $u(t) = = (-2, -3)'$ при $t \in [0; \pi)$, $u(t) = (\frac{1}{2}\exp(t - \pi), \frac{1}{2}\exp(t - \pi) - 1)'$ при $\tau \in [\pi; \tau)$ и $u(t) = (1, 0)'$ при

$\tau \leqslant t < +\infty$, где $\tau = \pi + \ln(4-2\sqrt{2})$. Можно проверить, что $T := T(x_0, x(\cdot)) = \tau + \pi/4$. Кроме того, $x(t) \in \operatorname{int} G$ при $t \in [0; \pi) \cup (\tau; T)$ и $x(t) \in \operatorname{Fr} G$ на отрезке $[\pi; \tau]$.

Положим $p(t) = \exp((\pi - t)A)(-1, 1)'$ при $0 \leqslant t < \pi$ и $p(t) = \exp(\pi - t)(-1, 1)'$ при $\pi \leqslant t \leqslant \tau$.

Можно убедиться, что относительно $x_0, x(\cdot), p(\cdot)$ и $t_* := \tau$ выполнены все условия теоремы 1. При этом проверку выполнения условия 3 можно осуществить с помощью альтернированного интеграла Понтрягина [6]. Таким образом, $x(\cdot)$ – оптимальная траектория для начальной точки $x_0$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Сатимов Н., Азамов А.* К задаче избежания столкновений в нелинейных системах // Докл. АН УзССР. 1974. № 6. С. 3–5.
2. *Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.* Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1303–1315.
3. *Фазылов А.З.* К задаче избежания столкновений // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 3. С. 30–36.
4. *Aubin J.-P.* A survey of viability theory // SIAM J. Contr. and Optim. 1990. V. 28. N 4. P. 749–788.
5. *Blagodatskikh V.I.* Sufficient conditions for optimality in problems with state constraints // Appl. Math. and Optim. 1981. V. 7. N 2. P. 149–157.
6. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.

Ташкент

Поступила в редакцию
22.V.1995

УДК 624.07:534.1

© 1997 г. **А.И. Весницкий, И.В. Милосердова**

# ОПТИМАЛЬНЫЙ ГАСИТЕЛЬ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

**На примере продольных колебаний стержня найдены параметры концевого гасителя, устраняющего любые возмущения в системе за наименьшее время, равное времени удвоенного пробега волны вдоль стержня, и в этом смысле являющегося оптимальным.**

Задача об отыскании оптимального динамического гасителя колебаний, по-видимому, впервые была поставлена Тимошенко [1] применительно к системе, представляющей собой сосредоточенную массу, прикрепленную к основанию пружиной. К массе, колебания которой возбуждаются периодической силой, присоединен упруго-инерционный гаситель с вязким демпфером.

Было получено [2] строгое и полное решение задачи оптимизации для такой простейшей системы и определены параметры гасителя, при которых скорость затухания (декремент) свободных колебаний системы является максимально возможной. Результаты работы были обобщены на случай гашения колебаний системы с двумя степенями свободы. Для аналогичной задачи в случае цепочки связанных осцилляторов, моделирующих продольные колебания стержня, исследования проводились [2] с позиций теории колебаний линейных сосредоточенных систем, и, естественно, решение искалось в ограниченном классе возможных ситуаций, исключающих абсолютное затухание за конечное время.

Задача об отыскании параметров гасителя, обеспечивающего затухание за конечное время, может быть поставлена и решена в рамках распределенных систем при анализе динамических процессов с позиций теории волн. Впервые применительно к распределенным системам на возможность создания демпфера, дающего наибыстрейшее затухание, было указано в [3].