ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 61. Вып. 3, 1997

УДК 531.31

 Д.В. Баландин

ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Рассматривается гибридная система, состоящая из несущего твердого тела и закрепленного на нем упругого элемента. Несущее тело находится во фрикционном контакте с другим телом (основанием), совершающим заданное движение. Для класса возмущений, порождаемых движением основания, изучается задача оценивания максимального смещения несущего тела относительно основания. Получено аналитическое выражение для такой оценки. Проанализированы различные предельные случаи, в которых величина оценки совпадает с максимально возможным смещением несущего тела.

1. Рассмотрим гибридную (дискретно-континуальную) механическую систему следующего вида. К несущему твердому телу B_0 массы m прикреплен упругий элемент B_e с распределенными параметрами длины l. Твердое тело находится во фрикционном контакте с другим твердым телом (основанием), совершающим заданное движение относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Рассматриваются движения гибридной системы вдоль оси ξ (фигура).

Предполагая деформации упругого тела достаточно малыми, а линейную плотность ρ и жесткость на сжатие σ постоянными, запишем уравнение состояния упругого тела

$$\rho\ddot{u} = \sigma u'' - \rho(\ddot{\xi} + \ddot{y}), \quad 0 < x < l \tag{1.1}$$

Здесь u – относительное упругое смещение сечения x; $\ddot{\xi}(t)$ – ускорение основания, $\ddot{y}$ – ускорение несущего тела. Будем считать, что левый конец упругого тела защемлен, а правый свободен:

$$u(t,0) = u'(t,l) = 0, \quad t \geq 0$$

Предположим также, что в исходный момент времени $t = 0$ упругое тело покоится относительно несущего:

$$u(0,x) = \dot{u}(0,x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

Уравнение движения для несущего тела запишем [1] в виде интегродифференциального уравнения, описывающего движение центра масс гибридной системы (упругое тело плюс несущее твердое тело) относительно основания

$$m(\ddot{y} + \ddot{\xi}) + \int_0^l \rho[\ddot{u}(t,x) + \ddot{y} + \ddot{\xi}]dx = -F(\dot{y}) \tag{1.2}$$

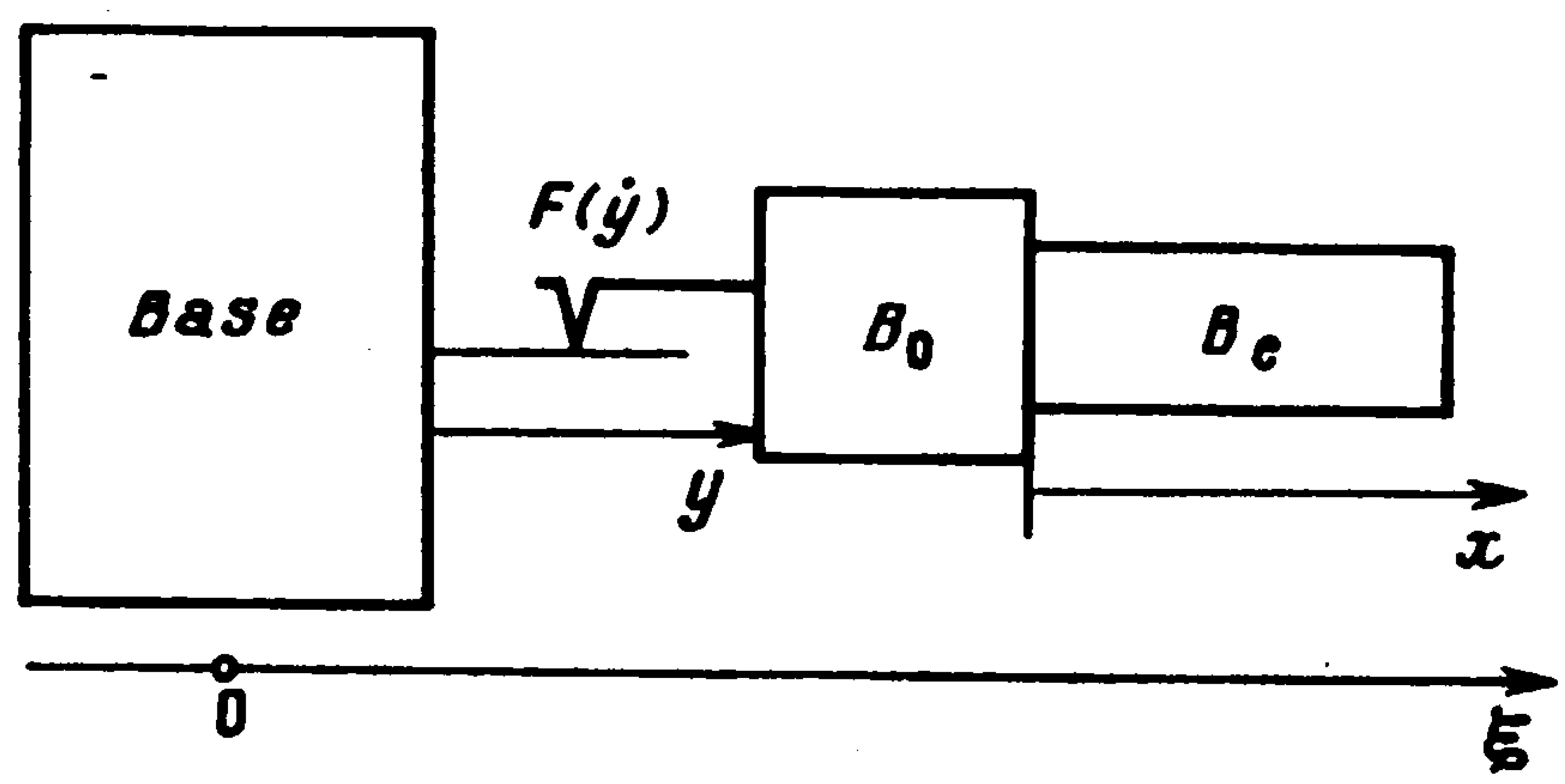
$$F = \begin{cases} F_0 \operatorname{sign}\dot{y}, & \dot{y} \neq 0 \\ q, & \dot{y} = 0, \ |q| \leq F_0, \quad q = -m\ddot{\xi} - \int_0^l \rho[\ddot{u}(t,x) + \ddot{y} + \ddot{\xi}]dx \\ F_0 \operatorname{sign} q, & \dot{x} = 0, \ |q| > F_0 \end{cases}$$

где функция $F(\dot y)$ определяет силу сухого трения, действующего между основанием и несущим телом, а постоянная F_0 определяет максимальную силу трения покоя.

Будем полагать, что несущее тело в исходный момент времени покоится относительно основания: $y(0) = \dot y(0) = 0$. Функцию $\ddot\xi(t)$, определяющую ускорение основания в инерциальной системе отсчета, будем считать кусочно-непрерывной и подчиняющейся условию

$$\int_0^\infty |\ddot\xi(t)|dt \leqslant J_0 \tag{1.3}$$

Любую реализацию движения основания, удовлетворяющую приведенным условиям, будем относить к классу D. Обозначим $v(t) = -\ddot\xi(t)$. Функции $v(t)$, также принадлежащие классу D, в



дальнейшем будем именовать возмущениями. На классе функций D введем функционал, характеризующий максимальное смещение несущего тела

$$S[v(\cdot)] = \sup_{t\in[0,\infty)} |y(t;v)|$$

где $y(t, v)$, $u(t; x; v)$ – решение задачи (1.1), (1.2) с указанными выше начальными и краевыми условиями, отвечающее заданному возмущению $v(t)$.

В теоретическом и прикладном аспектах (в частности, в задачах виброизоляции объектов) важно знать максимально возможное смещение несущего тела под действием возмущений из класса D:

$$S_0 = \sup_{v(\cdot)\in D} S[v(\cdot)]$$

Задачи подобного рода для более простого случая, когда упругое тело отсутствует, рассматривались ранее [2–4]. Наличие же упругого тела создает значительные трудности в нахождении величины S_0 и делает невозможным применение изложенных ранее методов [3, 4].

Ограничимся получением "разумных" оценок сверху величины S_0. Под термином "разумные" здесь понимаются такие оценки, которые дают точное значение S_0 в предельных хорошо изученных случаях: масса упругого тела, равная ρl, исчезающе мала по сравнению с массой несущего тела m; жесткость упругого тела настолько велика, что его можно считать абсолютно твердым телом.

2. Прежде чем строить оценки величины максимально возможного отклонения S_0, проведем ряд предварительных оценок. Введем в рассмотрение функцию

$$E(t;v) = \frac{m\dot y^2(t;v)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^l \rho\{[\dot u(t,x;v) + \dot y(t,v)]^2 + \sigma[u'(t,x;v)]^2\}dx$$

определяющую полную механическую энергию гибридной системы в ее движении относительно основания. Найдем производную по времени t от $E(t; v)$ в силу системы (1.1), (1.2), опуская для сокращения записи аргументы у функций $u(t, x; v)$, $y(t; v)$ там, где это не вызовет недоразумений. Получим

$$\frac{dE}{dt} = m\ddot{y}\dot{y} + \int_0^l [\rho(\dot{u}+\dot{y})(\ddot{u}+\ddot{y}) + \sigma u'\dot{u}']dx =$$

$$= -F(\dot{y})\dot{y} + \rho l\dot{y}v(t) + mv(t)\dot{y} + \int_0^l [\rho\dot{u}(\ddot{u}+\ddot{y}) + \sigma u'\dot{u}']dx$$

Проинтегрировав по частям $\sigma u'\dot{u}'$, с учетом краевых условий и уравнения (1.1) имеем

$$dE/dt = -F(\dot{y})\dot{y} + Mv(t)\dot{y}_c$$

$$\dot{y}_c = \frac{1}{M}[m\dot{y} + \rho\int_0^l (\dot{u}+\dot{y})dx], \quad M = m + \rho l \tag{2.1}$$

($\dot{y}_c$ – скорость центра масс гибридной системы).

По определению силы сухого трения имеем $F(\dot{y})\dot{y} \geqslant 0$. Следовательно, справедлива оценка

$$dE/dt \leqslant M|v(t)||\dot{y}_c| \tag{2.2}$$

Для кинетической энергии K гибридной системы в ее движении относительно основания справедливо неравенство

$$K = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{\rho}{2}\int_0^l (\dot{u}+\dot{y})^2 dx \geqslant \frac{M\dot{y}_c^2}{2} \tag{2.3}$$

Действительно,

$$K - \frac{M\dot{y}_c^2}{2} = \frac{\rho}{2}\left\{\int_0^l \dot{u}^2 dx - \frac{\rho}{M}\left(\int_0^l \dot{u}dx\right)^2\right\}$$

Выражение в фигурных скобках согласно неравенству Коши – Буняковского неотрицательно, откуда следует (2.3).

Заметим, что $E \geqslant K \geqslant M\dot{y}_c^2/2$. Поэтому

$$|\dot{y}_c| \leqslant \sqrt{2E/M} \tag{2.4}$$

Согласно (2.2) получаем

$$dE/dt \leqslant |v(t)|\sqrt{2EM}$$

Интегрируя последнее неравенство, при учете нулевых начальных условий и неравенства (2.4) имеем

$$|\dot{y}_c| \leqslant v_1(t), \quad v_1(t) = \int_0^t |v(t)|dt \tag{2.5}$$

Для получения еще одной предварительной оценки проинтегрируем равенство (2.1) по t. Получим

$$M\int_0^t |\dot{y}_c||v(t)|dt \geqslant I(t), \quad I(t) = \int_0^t \dot{y}F(\dot{y})dt \tag{2.6}$$

Оценим интеграл в левой части неравенства (2.6), воспользовавшись оценкой (2.5). Проинтегрировав по частям произведение $|v(t)|v_1(t)$, будем иметь

$$\int_0^t |v(t)|v_1(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^t |v(t)|dt\right)^2$$

Далее с учетом (1.3), (2.5) и (2.6) получаем искомую оценку

$$I(t) \leqslant \frac{M}{2} J_0^2 \quad \forall v(\cdot) \in D \quad \forall t \geqslant 0 \tag{2.7}$$

3. Перейдем непосредственно к оцениванию максимального смещения несущего тела относительно основания. Заметим вначале, что согласно определению сухого трения справедливо равенство

$$\int_0^\infty \dot{y}(t;v)F[\dot{y}(t;v)]dt = F_0 \int_0^\infty |\dot{y}(t;v)|dt \tag{3.1}$$

Вместе с тем,

$$|y(t;v)| = \left|\int_0^t \dot{y}(t;v)dt\right| \leqslant \int_0^t |\dot{y}(t;v)|dt$$

а значит,

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |y(t;v)| \leqslant \sup_{t\in[0,\infty)} \int_0^t |\dot{y}(t;v)|dt = \int_0^\infty |\dot{y}(t;v)|dt$$

Таким образом, согласно (2.7) и (3.1) получаем оценку

$$\sup_{v(\cdot)\in D} S[v(\cdot)] \leqslant \frac{M}{2F_0} J_0^2 \tag{3.2}$$

Полученная оценка "хорошо работает" в двух предельных случаях: масса упругого тела исчезающе мала по сравнению с массой несущего тела; упругое тело обладает очень большой жесткостью, так что в пределе его можно считать абсолютно твердым телом. В обоих указанных случаях гибридная система по существу вырождается в одномассовую, рассмотренную ранее [2]. Было показано [2], что максимально возможное смещение твердого тела массы M (здесь либо $M = m$, либо $M = m + \rho l$) под действием возмущений из класса D равно $MJ_0^2/(2F_0)$ и достигается в пределе при действии мгновенного удара с максимально допустимой интенсивностью J_0. Заметим, что еще в одном предельном случае, а именно: жесткость упругого тела очень мала, оценка (3.1) может оказаться слишком завышенной. В этом случае влияние упругого тела на несущее твердое тело будет мало, поэтому следует ожидать, что [2] неравенство (3.2) заменится равенством при $M = m$.

Попытаемся дать оценку функционала $S[v(\cdot)]$, которая учитывала бы и этот предельный случай. Преобразуем исходную систему уравнений (1.1) и (1.2) и сделаем замену переменных

$$\tau = t\nu,\ u = zL,\ y = \eta L,\ x = \theta l,\ \nu^2 = \sigma/(\rho l^2),\ L = F_0/(m\nu^2)$$

Получим систему

$$\ddot{\eta} = -f(\dot{\eta}) + \varepsilon z'(0,\tau) + w(\tau),\ \ddot{z} - z'' = f(\dot{\eta}) - \varepsilon z'(0,\tau) \tag{3.3}$$

$$\eta(0) = \dot{\eta}(0) = z(\theta,0) = \dot{z}(\theta,0) = 0,\ z(0,\tau) = z'(1,\tau) = 0$$

$$(f = F/F_0,\ w = v/(L\nu^2) = mv/F_0,\ \varepsilon = \rho l/m)$$

Здесь точка означает производную по безразмерному времени τ, а штрих – по переменной θ. Неравенство (1.3) в данном случае примет вид

$$\int_0^\infty |w(\tau)|d\tau \leqslant \beta_0,\ \beta_0 = \frac{\nu m J_0}{F_0} \tag{3.4}$$

Кусочно-непрерывные функции $w(\tau)$, удовлетворяющие неравенству (3.4) и определяющие возмущение в системе (3.3), будем относить к классу D_*. Наметим теперь ход дальнейших рассуждений. Предположим, удалось показать, что для любых возмущений $w(\cdot) \in D_*$ и любого $\tau \geqslant 0$ выполняется неравенство $|z'(0,\tau;w| \leqslant a$, где a – некоторая постоянная, подлежащая определению. Тогда если $1 - \varepsilon a > 0$, то можно получить оценку для $\sup_\tau |\eta(\tau; w)|$ (здесь $\eta(\tau; w)$, $z(0, \tau; w)$ – решение системы (3.3) с соответствующими краевыми и начальными условиями). В самом деле с учетом первого уравнения (3.3) и определения силы сухого трения в данном случае имеем

$$\int_0^\tau |\dot\eta(\tau;w)||w(\tau)|d\tau \geqslant \int_0^\tau \dot\eta(\tau;w)p(\tau;w)d\tau \geqslant (1-\varepsilon a)\int_0^\tau |\dot\eta(\tau;w)|d\tau \tag{3.5}$$

$$(p(\tau;w) = f[\dot\eta(\tau;w)] - \varepsilon z'(0,\tau;w))$$

Используя неравенство (3.5) и проводя далее рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем после перехода к исходным (размерным) величинам

$$S[v(\cdot)] \leqslant \frac{mJ_0^2}{2F_0(1-\varepsilon a)} \tag{3.6}$$

Теперь осталось выяснить чему равно значение параметра a. Будем по-прежнему предполагать справедливость неравенств

$$|z'(0,\tau;w)| \leqslant a \quad \forall\tau \leqslant 0; \; 1-\varepsilon a > 0 \tag{3.7}$$

Можно показать, что при учете (3.7) для любого возмущения $w(\cdot) \in D_*$ выполнено неравенство

$$\int_0^\infty |p(\tau;w)|d\tau \leqslant \beta_0 \tag{3.8}$$

Для этого зададим некоторое произвольное возмущение $w(\tau)$ из класса D_* и рассмотрим отрезки $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, внутри которых скорость $\dot\eta(\tau;w) \neq 0$, а на их концах: $\dot\eta(\tau_i;w) = \dot\eta(\tau_{i+1};w) = 0$. Интегрируя на рассматриваемых отрезках первое уравнение системы (3.3), с учетом предположения (3.7) будем иметь

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |p(\tau;w)|d\tau \leqslant \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |w(\tau)|d\tau \tag{3.9}$$

Выделим теперь отрезки $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, на которых скорость $\dot\eta(\tau;w) \equiv 0$ (это есть возможные участки "продолжительных остановок" несущего тела в связи с наличием в системе сухого трения). Для таких участков справедливо равенство $p(\tau; w) = w(\tau)$. Следовательно, справедливо соотношение (3.9) со знаком равенства. Последовательно суммируя неравенства (3.9) и указанные равенства, с учетом (3.4) окончательно получим требуемое неравенство (3.8). В силу произвольности выбора возмущения $w(\tau)$ (3.8) справедливо для любого $w(\cdot) \in D_*$.

Рассмотрим теперь второе уравнение системы (3.3), которое перепишем в виде

$$\ddot z - z'' = p(\tau;w), \; z(\theta,0) = \dot z(\theta,0) = 0, \; z(0,\tau) = z'(1,\tau) = 0$$

Представляя решение этого уравнения в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной краевой задачи, перейдем к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot T_n + \lambda_n^2 T_n = \sqrt{2}p(\tau;w)/\lambda_n, \; T_n(0) = \dot T_n(0) = 0, \; n \geqslant 1 \tag{3.10}$$

$$\lambda_n = \pi(2n-1)/2$$

Таким образом

$$z(\theta,\tau;w) = \sum_{n=1}^\infty Q_n(\theta)T_n(\tau;w), \; Q_n(\theta) = \sqrt{2}\sin(\lambda_n\theta)$$

Решение системы (3.10) представимо в следующем виде:

$$T_n(\tau;w)=\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n}\int_0^t g_n(\tau-\chi)p(\chi;w)d\chi,\ n\geqslant 1;\ g_n(\tau)=\frac{\sin(\lambda_n\tau)}{\lambda_n}$$

С учетом явного выражения для $z'(0,\tau;w)$ а также неравенства (3.8) имеем

$$|z'(0,\tau;w)|\leqslant 2\beta_0 \sup_{\tau\in[0,\infty)} r(\tau),\ r(\tau)=|\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau)|$$

Указанный ряд сходится в соответствии с признаком Дирихле. Заметим также, что функция $r(\tau)$ – периодическая с периодом $\tau_0 = 2$. Численно находим, что $\max_\tau r(\tau) \approx {}^1/_2$. Итак,

$$a\approx\beta_0=\frac{J_0 m}{F_0 l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \tag{3.11}$$

Рассмотрим совместно оценки (3.2) и (3.6). Выясним, при каких условиях одна из них лучше другой. Сравнивая между собой $1+\varepsilon$ и $(1-\varepsilon a)^{-1}$ при условии $1-\varepsilon a > 0$, можно записать единую оценку

$$S[v(\cdot)]\leqslant S^*\begin{cases}(1-\varepsilon a)^{-1}, & a\leqslant(1+\varepsilon)^{-1}\\ 1+\varepsilon, & a>(1+\varepsilon)^{-1},\end{cases}\quad S^*=\frac{mJ_0^2}{2F_0}$$

где S^* играет роль некоторой "базовой" величины, отвечающей максимально возможному смещению одиночного твердого тела под действием сухого трения и возмущения из класса D.

В легко проверяемых предельных случаях: $\varepsilon\to 0$ ($\rho l \ll m$, т.е. при бесконечно малой массе упругого тела) и $a\to 0$ (в частности, согласно (3.11), когда $\sigma\to 0$, т.е. при бесконечно малой жесткости упругого тела) значение оценки стремится к базовой величине S^* и совпадает в пределе с точным значением максимального смещения S_0. Еще один предельный случай – упругое тело обладает очень большой жесткостью: $a\to\infty$ ($\sigma\to\infty$). Тогда гибридная система вырождается в твердое тело массы M, а оценка его смещения стремится к величине $S^*(1+\varepsilon)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00138) и Международного научного фонда (J27100).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л.Д.* Колебания твердого тела, содержащего упругий элемент с распределенными параметрами // ПММ, 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 1006–1015.
2. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 256 с.
3. *Баландин Д.В.* Оптимизация противоударных амортизаторов для класса внешних воздействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 53–60.
4. *Баландин Д.В.* О накоплении возмущений в линейных и нелинейных системах при ударных воздействиях // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 20–25.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
21.IX.1995