

УДК 532.376

© 1997 г. В.Н. Кукуджанов, Д.Н. Шнейдерман

**РЕШЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ**

Разработан численный метод решения трехмерных задач для однородных изотропных тел вращения, подчиняющихся уравнениям теории течения и нагруженных неосесимметричной нагрузкой. Метод состоит в применении шагового по нагрузке и итерационного на шаге алгоритма. Для решения упругой задачи на каждой итерации используется метод Ритца, в котором по окружному направлению применяется разложение по системе тригонометрических функций, а по координатам в меридиональной плоскости – двумерная конечноэлементная аппроксимация. Доказана сходимость итерационного процесса для изотропно упрочняющегося тела, подчиняющегося ассоциированному закону течения при условии пластичности Мизеса. Получены также достаточные условия сходимости решения Ритца к точному решению на итерации как в случае внешней, так и внутренней задач. Метод применен к расчету предварительно нагруженного упругопластического полупространства с несквозным отверстием при снятии нагрузки, приложенной к боковой поверхности отверстия. Задача моделирует процесс высверливания отверстия в теле, применяющийся для определения в нем остаточных напряжений. Проведено сравнение полученных решений с результатами решения той же задачи в упругой постановке, которая используется в настоящее время в практике определения остаточных напряжений.

**1. Система уравнений и граничные условия.** В трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  рассмотрим упругопластическое тело вращения, занимающее область  $\Omega$ . Пусть  $\xi^1 = r, \xi^2 = \varphi, \xi^3 = z$  цилиндрические координаты точки  $x$  области  $\Omega, t$  – параметр нагружения.

Тело подвергается квазистатическому нагружению распределенными в  $\Omega$  объемными силами  $X(x, t)$ , распределенными на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  поверхностными силами  $q(x, t)$  и заданными перемещениями  $U(x, t)$ .

Запишем уравнения равновесия и Коши

$$\nabla_j \sigma^{ji} + X^i = 0, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \tag{1.1}$$

где  $\sigma^{ji}, X^i$  – компоненты тензора напряжений и объемной силы,  $u_i, \epsilon_{ij}$  – составляющие перемещений и деформаций.

Рассмотрим упругопластическое тело, подчиненное определяющим уравнениям теории течения. Напряженное состояние тела удовлетворяет условию пластичности с изотропным упрочнением:

$$f(\sigma^{ij}) - \sigma_Y \leq 0 \tag{1.2}$$

где  $f$  – функция текучести – однородная функция напряжений степени 1,  $\sigma_Y$  – предел текучести.

Для скорости пластической деформации выполняется условие градиентальности

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \varphi_{ij}; \quad \varphi_{ij} = \partial f / \partial \sigma^{ij}, \quad \lambda \geq 0 \quad (1.3)$$

Тело подвержено деформационному упрочнению, которое можно задать следующим уравнением

$$\dot{\sigma}_Y = h \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p / \sigma_Y = h \lambda \sigma^{ij} \varphi_{ij} / \sigma_Y \quad (1.4)$$

где  $h(\sigma_Y)$  – коэффициент упрочнения (для одноосного напряженного состояния  $h = \partial \sigma_Y / \partial \epsilon^p$ ).

Наконец, закон Гука в дифференциальной форме имеет вид

$$\dot{\sigma}^{ij} = D^{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = D^{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \lambda \varphi_{ij}) \quad (1.5)$$

где  $D^{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных.

Уравнения (1.2)–(1.5) образуют систему определяющих уравнений теории течения. Напряжения и деформации являются функциями точки тела  $x$  и параметра нагружения  $t$ .

Продифференцируем соотношение (1.2), когда знак неравенства заменен в нем на равенство, по  $t$  и учтем (1.3)–(1.5). Тогда получим

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\vartheta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{\varphi_{ij} \vartheta^{ij} + h}, & f(\sigma^{ij}) = \sigma_Y \cap \vartheta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \\ 0, & f(\sigma^{ij}) < \sigma_Y \cup \vartheta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $\vartheta^{ij} = D^{ijkl} \varphi_{kl}$ .

Уравнения (1.4), (1.5) при заданном  $\epsilon_{ij}(x, t)$  в каждой точке  $x$  образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $\sigma_Y$  и  $\sigma^{ij}$ . Окончательный вид уравнения (1.5) будет таким:

$$\dot{\sigma}^{ij} = A^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}; \quad A^{ijkl} = D^{ijkl} - H^{ijkl} \quad (1.7)$$

$$H^{ijkl} = \begin{cases} \frac{\vartheta^{ij} \vartheta^{kl}}{\varphi_{mn} \vartheta^{mn} + h}, & f = \sigma_Y \cap \vartheta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \\ 0, & f < \sigma_Y \cup \vartheta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} < 0 \end{cases}$$

Уравнения (1.1), (1.4) и (1.7) образуют полную систему уравнений рассматриваемой задачи.

Осталось задать начальные и граничные условия задачи.

При  $t = 0$  имеем  $\sigma^{ij} = \sigma_0^{ij}$ ,  $\sigma_Y = \sigma_Y^0$ , где  $\sigma_0^{ij}$ ,  $\sigma_Y^0$  – заданные функции  $x$ . Не теряя общности, можно считать, что  $u_i = 0$  при  $t = 0$ .

На части  $\Gamma_q$  границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ , где заданы поверхностные силы  $q(x, t)$ , граничные условия записываются в виде

$$\sigma^{ji} v_j = q^i \quad (1.8)$$

где  $v_i$  – компоненты нормали к граничной поверхности,  $q^i$  – компоненты поверхностной силы.

На другой части границы  $\Gamma_u$  заданы перемещения  $U(x, t)$  и граничные условия имеют вид

$$u_i = U_i \quad (1.9)$$

где  $U_i$  – компоненты заданных перемещений.

На оси вращения ( $r = 0$ ) необходимо задать условия, выражающие положение, что

разным значениям угла  $\varphi$  соответствует одна и та же точка:

$$u_r = A(z) \cos \varphi + B(z) \sin \varphi \quad (1.10)$$

$$u_\varphi = -A(z) \sin \varphi + B(z) \cos \varphi, \quad u_z = C(z)$$

где  $u_r, u_\varphi, u_z$  – физические компоненты вектора перемещений в цилиндрической системе координат, т.е.  $u_r = u_1, u_\varphi = u_2/r, u_z = u_3$ .

Тело может занимать неограниченную область. Будем считать, что объемные и поверхностные силы приложены на ограниченной части тела. Тогда для единственности решения задачи можно поставить следующие условия на бесконечности [1]:

$$(u_r^2 + u_\varphi^2 + u_z^2)^{1/2} = O(R^{-1}), \quad \partial \chi_i / \partial x_j = o(R^{-1}); \quad R = (r^2 + z^2)^{1/2} \quad (1.11)$$

причем во второй формуле компоненты перемещений  $\chi_i$  и производные рассматриваются в декартовой системе координат  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ .

Наконец необходимо поставить условия периодичности:

$$u_i(r, \varphi + 2\pi, z) = u_i(r, \varphi, z) \quad (1.12)$$

**2. Шаговый метод решения системы уравнений.** Разобьем область изменения параметра нагружения  $t$  на  $N$  частей и обозначим  $t$  в узлах через  $t_p$  ( $p = 0, 1, \dots, N$ ). Обозначим объемные и поверхностные силы и заданные перемещения при  $t = t_p$  соответственно через  $X_p^i, q_p^i, U_i^p$ . На каждом шаге  $p = 1, \dots, N$  изменения указанных величин составим следующую систему уравнений:

$$\nabla_j \sigma^{ji} + X_p^i = 0, \quad \sigma^{ij} = \sigma_{p-1}^{ij} + A_{p-1}^{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^p \quad (2.1)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} (\nabla_i (\Delta u_j^p) + \nabla_j (\Delta u_i^p))$$

Здесь

$$A_p^{ijkl} = D^{ijkl} - H_p^{ijkl}$$

$$H_p^{ijkl} = \begin{cases} \frac{D^{ijst} \varphi_{st}^p \varphi_{mn}^p D^{mnkl}}{\varphi_{mn}^p D^{mnst} \varphi_{st}^p + h^p}, & f = \sigma_Y \\ 0, & f < \sigma_Y \end{cases}$$

а индекс  $p$  у величины означает, что она вычислена при соответствующем значении параметра нагружения.

К системе (2.1) добавим граничные условия:

$$\sigma^{ij} \nu_j |_{\Gamma_q} = q_p^i; \quad \Delta u_i^p |_{\Gamma_u} = \Delta U_i^p \quad (2.2)$$

Систему уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2), условиями на оси, бесконечности и периодичности будем рассматривать как систему относительно  $\Delta u_i^p$ . В силу принятой в (2.1) независимости  $A^{ijkl}$  от  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  эту систему можно рассматривать как систему уравнений для некоторого неоднородного анизотропного упругого тела с дополнительными объемными и поверхностными силами.

После решения системы перемещение представляется в виде

$$u_i = u_i^{p-1} + \frac{t - t_{p-1}}{t_p - t_{p-1}} \Delta u_i^p \quad (2.3)$$

По перемещениям из уравнений Коши определяются деформации  $\varepsilon_{ij}$ , которые

подставляются в определяющие уравнения (1.4), (1.7), откуда получаются  $\sigma_p^{ij} = \sigma^{ij}(t_p)$  и  $\sigma_Y^p = \sigma_Y(t_p)$  при выполнении начальных условий  $\sigma^{ij}(t_{p-1}) = \sigma_{p-1}^{ij}$  и  $\sigma_Y(t_{p-1}) = \sigma_Y^{p-1}$ .

**3. Итерационный метод решения системы уравнений на шаге по нагрузке.** Систему уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2) будем решать итерационным методом, аналогичным методу дополнительных напряжений для деформационной теории пластичности [2]. Запишем второе уравнение (2.1) в виде

$$\sigma_{(n)}^{ij} = \sigma_{p-1}^{ij} + D^{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}^{(n)} - \Delta \alpha_{(n-1)}^{ij} \quad (3.1)$$

$$\Delta \alpha_{(n)}^{ij} = H_{p-1}^{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}^{(n)}, \quad \Delta \alpha_{(0)}^{ij} = 0$$

где  $n = 1, 2, \dots$  – номер итерации на шаге  $p$  изменения параметра нагружения. Тогда система уравнений и граничные условия из разд. 2 на  $n$ -й итерации запишутся в виде:

$$\nabla_j (D^{jijkl} \Delta \epsilon_{kl}^{(n)}) + \nabla_j \sigma_{p-1}^{ji} - \nabla_j (\Delta \alpha_{(n-1)}^{ji}) + X_p^i = 0$$

$$\Delta \epsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} (\nabla_i (\Delta u_j^{(n)}) + \nabla_j (\Delta u_i^{(n)})) \quad (3.2)$$

$$D^{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}^{(n)} \nu_j |_{\Gamma_q} = q_p^i - \sigma_{p-1}^{ji} \nu_j |_{\Gamma_q} + \Delta \alpha_{(n-1)}^{ji} \nu_j |_{\Gamma_q}$$

$$\Delta u_i^{(n)} |_{\Gamma_u} = \Delta U_i^p$$

и представляют собой систему уравнений и граничные условия для упругого тела с теми же упругими постоянными  $D^{ijkl}$ , что и у исходного тела, но с измененными объемными и поверхностными силами.

**4. О сходимости итерационного метода.** Предлагаемый итерационный метод можно отнести к классу методов упругих решений А.А. Ильюшина, доказательство сходимости которого для деформационной теории пластичности дано в [3]. Были приведены [4] достаточные условия сходимости итерационного метода для общего случая неупругого материала. Исходя из этих условий, для сходимости итераций (3.2) к решению системы (2.1)–(2.2) достаточно, чтобы для любого симметричного тензора  $\epsilon$

$$\gamma_1 D^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \leq A^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \leq \gamma_2 D^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (4.1)$$

причем

$$\gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 < 2 \quad (4.2)$$

Для изотропного тела и функции текучести Мизеса  $f(\sigma^{ij}) = \sqrt{3/2} (s^{ij} s_{ij})^{1/2}$  ( $s_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений) определим, при каких значениях упругопластических постоянных будут выполняться условия (4.1), (4.2).

Из (1.7) имеем

$$A^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) - \frac{9\mu^2}{h+3\mu} \frac{s^{ij} s^{kl}}{f^2}$$

где  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе,  $g^{ij}$  – компоненты метрического тензора.

Раскроем выражения в (4.1):

$$D^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = \lambda (\epsilon_i^i)^2 + 2\mu \epsilon^{ij} \epsilon_{ij}$$

$$A^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = \lambda (\epsilon_i^i)^2 + 2\mu \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \frac{9\mu^2}{h+3\mu} \frac{(s^{ij} \epsilon_{ij})^2}{f^2}$$

Анализ приведенных выше выражений дает

$$\gamma_1 = h / (h + 3\mu), \quad \gamma_2 = 1$$

и условия (4.2) выполняются, когда  $h > 0$ , т.е. когда имеется упрочнение.

**5. Применение метода Рунца для решения системы уравнений на итерации.** Для записи вариационного принципа Лагранжа, эквивалентного системе (3.2), из первого и третьего уравнений (3.2) вычтем соответственно уравнение равновесия и статические граничные условия при  $t = 0$ . Эта процедура необходима для того, чтобы в случае бесконечной области и ненулевых напряжений на бесконечности в функционале Лагранжа не присутствовали интегралы по бесконечно удаленной границе. Путем несложных выкладок получим функционал Лагранжа, соответствующий системе (3.2):

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D^{ijkl} \Delta \epsilon_{ij}^{(n)} \Delta \epsilon_{kl}^{(n)} d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{p-1}^{ij} - \sigma_0^{ij} - \Delta \alpha_{(n-1)}^{ij}) \Delta \epsilon_{ij}^{(n)} d\Omega - \int_{\Omega} (X_p^i - X_0^i) \Delta u_i^{(n)} d\Omega - \int_{\Gamma_q} (q_p^i - q_0^i) \Delta u_i^{(n)} d\Gamma \quad (5.1)$$

где  $\sigma_0^{ij}, X_0^i, q_0^i$  – компоненты напряжений, объемных и поверхностных сил при  $t = 0$ .

Для минимизации (5.1) воспользуемся методом Рунца.

Введем векторные обозначения, обычно используемые в методе конечных элементов,

$$\mathbf{d}^T = [u_r, u_\varphi, u_z], \quad \mathbf{q}^T = [q_r, q_\varphi, q_z], \quad \mathbf{X}^T = [X_r, X_\varphi, X_z] \\ \boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_r, \epsilon_\varphi, \epsilon_z, \gamma_{r\varphi}, \gamma_{rz}, \gamma_{\varphi z}], \quad \boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}] \\ \Delta \boldsymbol{\alpha}^T = [\Delta \alpha_{rr}, \Delta \alpha_{\varphi\varphi}, \Delta \alpha_{zz}, \Delta \alpha_{r\varphi}, \Delta \alpha_{rz}, \Delta \alpha_{\varphi z}]$$

где в скобках стоят физические компоненты тензоров в цилиндрической системе координат.

Вектор перемещений аппроксимируем в виде

$$\mathbf{d}(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^n (\mathbf{a}^k(r, z) \cos k\varphi + \mathbf{b}^k(r, z) \sin k\varphi) \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{a}^k$  и  $\mathbf{b}^k$  – вектор-функции с компонентами по  $r, \varphi, z$ .

Надо отметить, что для применимости аппроксимации (5.2) необходимо, чтобы поверхности  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_q$  представляли собой поверхности вращения частей границы меридионального сечения вокруг оси  $z$ .

Для аппроксимации коэффициентов  $\mathbf{a}^k$  и  $\mathbf{b}^k$  некоторую ограниченную часть меридионального сечения разобьем на конечные элементы, а остальную часть – на бесконечные элементы [5]. Тогда

$$\mathbf{a}^k = \sum_{i=1}^m G_i \mathbf{a}_i^k; \quad \mathbf{b}^k = \sum_{i=1}^m G_i \mathbf{b}_i^k \quad (5.3)$$

где  $G_i$  – функция формы узла  $i$  меридионального сечения в конечных и бесконечных элементах,  $\mathbf{a}_i^k, \mathbf{b}_i^k$  – значения коэффициентов разложения в узле  $i$ ,  $m$  – число узлов в меридиональном сечении.

При использовании радиального бесконечного элемента [5], образованного стороной смежного конечного элемента и двумя лучами, проходящими через начало координат, функции формы представляются в виде

$$G_i = \bar{G}_i R_0^l / R^l$$

где  $\bar{G}_i$  – функция формы узла  $i$  в соседнем с бесконечным конечном элементе, вычисленная в точке пересечения общей стороны элементов с лучом, соединяющим начало координат и рассматриваемую точку бесконечного элемента;  $R, R_0$  – расстояния от начала координат соответственно до точки бесконечного элемента и

точка, в которой вычисляется функция  $\bar{G}_i$ ;  $l$  – порядок асимптотики перемещения на бесконечности по  $R$ .

Выражения (5.2) и (5.3) можно записать в векторно-матричной форме, принятой в методе конечных элементов:

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\delta \quad (5.4)$$

где  $\delta$  – вектор, образованный компонентами  $a_i^k, b_i^k$  ( $k = 0, \dots, n; i = 1, \dots, m$ ),  $\mathbf{G}$  – матрица функций формы.

Деформации также выражаются через вектор  $\delta$ :

$$\epsilon = \mathbf{B}\delta \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{B}$  – матрица градиентов.

Матрицы функций формы и градиентов состоят из подматриц  $\mathbf{G}_k$  и  $\mathbf{B}_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ), соответствующих различным гармоникам. Элементы матриц  $\mathbf{G}_k$  и  $\mathbf{B}_k$  представляют собой произведения некоторых функций от  $r, z$  на  $\cos k\varphi$  или  $\sin k\varphi$ .

В принятых обозначениях закон Гука можно записать в виде

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon \quad (5.6)$$

где  $\mathbf{D}$  – симметричная (6x6)-матрица, коэффициенты которой – физические компоненты тензора упругих постоянных в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ .

Изложенный метод Ритца приводит задачу минимизации функционала (5.1) к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно приращений узловых коэффициентов  $\delta$ :

$$\left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right\} \Delta \delta^{(n)} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\sigma_{p-1} - \sigma_0 - \Delta \alpha_{(n-1)}) d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \mathbf{G}^T (\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_0) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{G}^T (\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_0) d\Gamma = 0 \quad (5.7)$$

В силу ортогональности системы тригонометрических функций на отрезке  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  система (5.7) распадается на системы уравнений отдельно для каждой гармоники. Однако в отличие от упругого тела в правых частях этих систем присутствуют не только коэффициенты, соответствующие разложению внешней нагрузки по системе тригонометрических функций, но и коэффициенты, соответствующие разложению напряжений. Поэтому даже если нагрузка имеет конечное число гармоник, искомое перемещение в общем случае будет иметь бесконечное число гармоник.

Отметим, что при решении системы (5.7) необходимо учесть граничные условия в перемещениях и условия на оси  $z$ , которые сводятся к простым условиям для приращений компонентов векторов  $\mathbf{a}^k$  и  $\mathbf{b}^k$ .

Рассмотрим случай, когда на каждой итерации используется одна и та же система функций метода Ритца. Тогда (5.7) переписывается в виде

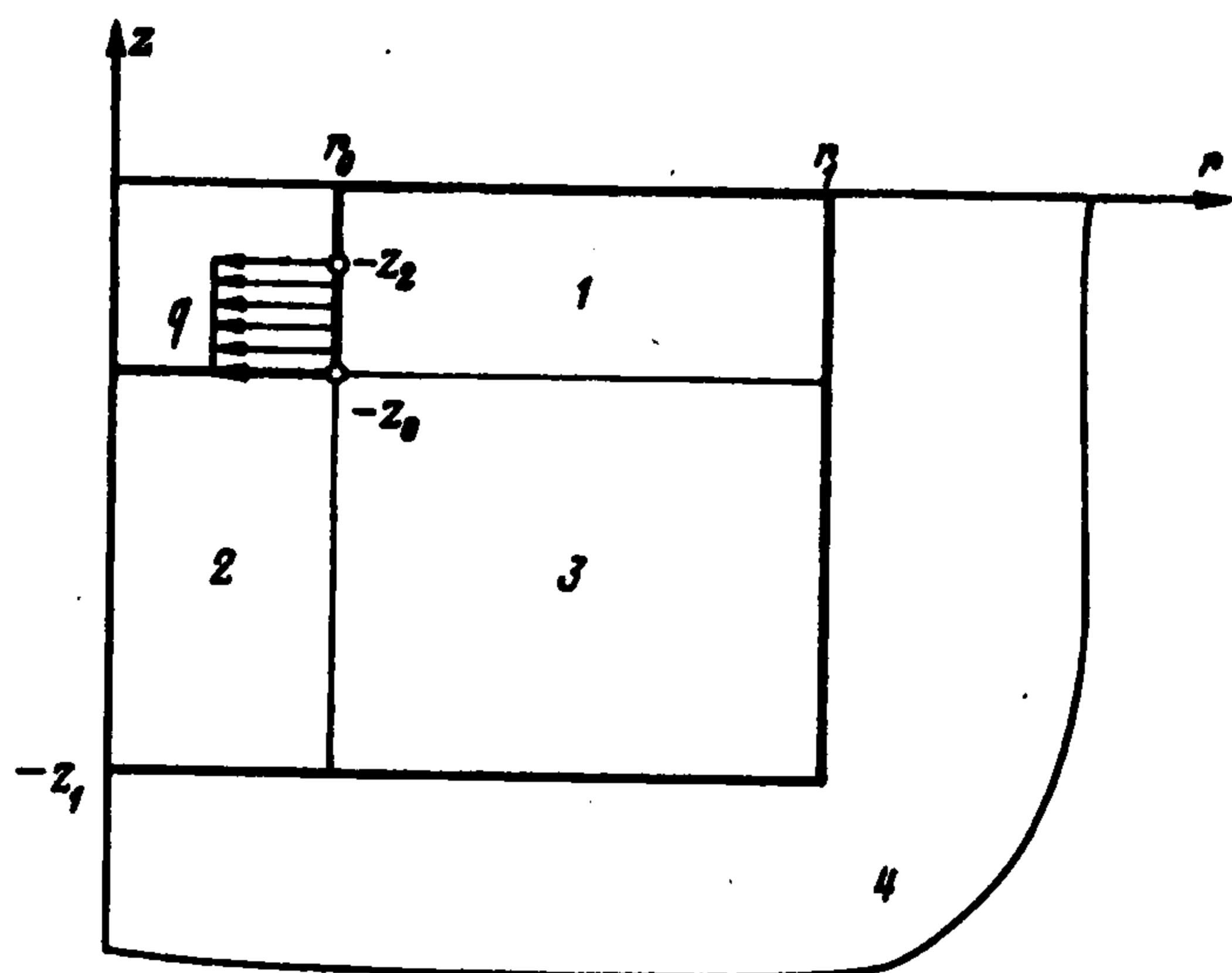
$$\psi^{(n-1)} + \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right\} (\Delta \delta^{(n)} - \Delta \delta^{(n-1)}) = 0 \quad (5.8)$$

где  $\psi^{(n)}$  – невязка системы (5.7) после итерации  $n$ , которая определяется выражением

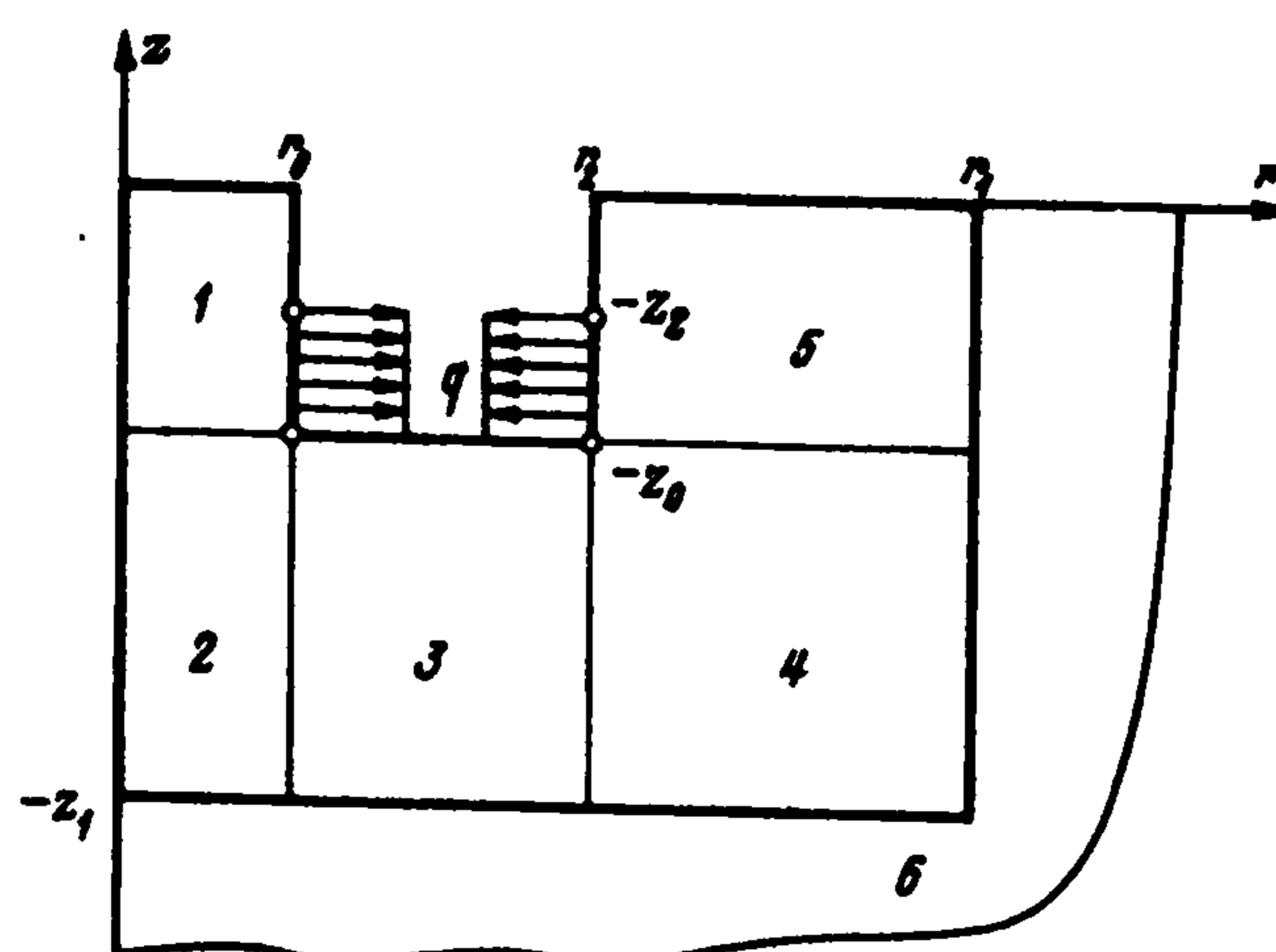
$$\psi^{(0)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\sigma_{p-1} - \sigma_0) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{G}^T (\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_0) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{G}^T (\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_0) d\Gamma \quad (5.9)$$

$$\psi^{(n)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\Delta \alpha_{(n-1)} - \Delta \alpha_{(n)}) d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots$$

Представление (5.8), (5.9) удобно тем, что для вычисления невязки требуется проводить интегрирование только по той части  $\Omega$ , которая находится в пластическом состоянии.



Фиг. 1



Фиг. 2

Дополнительные преимущества, связанные с использованием на каждой итерации одной и той же системы функций метода Ритца, заключаются в постоянстве на каждой итерации матрицы жесткости системы уравнений. Это дает возможность до итерационного процесса произвести переупорядочение и разложение матрицы, а на каждой итерации осуществлять лишь решение треугольных систем [6].

**6. О сходимости решения Ритца к точному решению на итерации.** Обозначим через  $\Delta$  диаметр двумерной области, дискретизируемой конечными элементами,  $\beta$  – максимальный диаметр конечных элементов. Параметр  $n$  по-прежнему означает число гармоник в разложении (5.2) перемещений. Пусть  $\mathbf{d}$  – точное решение системы уравнений на итерации,  $\mathbf{d}^r$  – решение Ритца.

*Теорема.* Пусть выполнены следующие условия:

1)  $\mathbf{d}$  – дважды непрерывно-дифференцируемая функция по  $r, \varphi, z$ ;  
 2) при  $R \Rightarrow \infty$  имеем  $d_i = O(R^{-1})$ ,  $\partial d_i / \partial x_j = O(R^{-2})$ ,  $\partial^2 d_i / \partial x_j \partial x_k = O(R^{-3})$ , где  $d_1, d_2, d_3$  – компоненты  $\mathbf{d}$  в декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$ ;  $R$  – расстояние до начала координат;  $i, j, k = 1, 2, 3$ ;

3) в меридиональном сечении каждый конечный элемент диаметром  $\gamma$  содержит круг диаметром  $\tau\gamma$ , где  $\tau$  – наперед заданное положительное число;

4) граница области в меридиональном сечении, дискретизируемой конечными элементами, кусочно один раз гладкая.

5)  $R_{\min}/\Delta > B$ , где  $R_{\min}$  – расстояние от начала координат до границы конечноэлементной области (см. условие 4 теоремы);  $B$  – наперед заданное положительное число.

Тогда справедливо неравенство

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{d}^r\| \leq \|\mathbf{d} - \mathbf{d}_1\| \quad (6.1)$$

где  $\|\cdot\|$  – энергетическая норма,  $\mathbf{d}_1$  – некоторая вектор-функция, удовлетворяющая равенству

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} \lim_{\Delta \Rightarrow \infty} \lim_{\beta \Rightarrow 0} \|\mathbf{d} - \mathbf{d}_1\| = 0 \quad (6.2)$$

**7. Решение задач о деформировании упругопластического полупространства с отверстием или проточкой.** Рассмотрим задачу о деформировании упругопластического изотропного полупространства с несквозным отверстием при снятии поверхностной нагрузки, приложенной к боковой поверхности отверстия. Эта задача моделирует процесс высверливания отверстия для определения остаточных напряжений в точке на поверхности тела [7].

Построим декартову систему координат с началом в заданной точке, осями  $x, y$ , лежащими в граничной плоскости полупространства, и осью  $z$ , перпендикулярной первым двум (фиг. 1). В начальный момент времени зададим в теле однородное напряженное состояние с компонентами в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$

$$\sigma_r = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi, \quad \sigma_\varphi = \sigma_1 \sin^2 \varphi + \sigma_2 \cos^2 \varphi \quad (7.1)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\varphi z} = 0$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  – главные компоненты остаточных напряжений, главные оси которых направлены по осям  $x$  и  $y$ .

Остановимся на граничных условиях задачи. Предполагается, что на боковой поверхности отверстия поверхностная нагрузка падает от начального значения, соответствующего напряженному состоянию (7.1), до нуля, так что в некоторой промежуточный момент времени она имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} q_r &= q_\varphi = q_z = 0; & -z_2 \leq z < 0 \\ q_r &= -\sigma_1 \cos^2 \varphi - \sigma_2 \sin^2 \varphi, \\ q_\varphi &= \sigma_1 \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_2 \sin \varphi \cos \varphi \\ q_z &= 0; & -z_0 \leq z < -z_2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

где в начальный момент времени  $z_2 = 0$ , а в конечный  $-z_2 = z_0$ .

Дно отверстия и остальные границы тела свободны от напряжений. На бесконечности тело при высверливании отверстия деформируется упруго. Поэтому перемещение на бесконечности имеет такую же асимптотику, как в упругой задаче, которая, как показано в [8], есть  $R^{-2}$ , где  $R$  – расстояние до начала координат.

На оси вращения  $u_z$  не зависит от  $\varphi$ , и вследствие симметрии задачи относительно координатных плоскостей  $xOz$  и  $yOz$   $u_r = u_\varphi = 0$ .

В случае кольцевой проточки (фиг. 2) нагрузка (7.2) приложена к внешней части боковой поверхности проточки, а к ее внутренней части приложена нагрузка, противоположная (7.2).

Для расчетов рассматривается материал с модулем упругости  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа, пределом текучести  $\sigma_y = 280$  МПа, коэффициентом упрочнения  $h = 70$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ . Начальные напряжения имеют главные компоненты  $\sigma_1 = 240$  МПа,  $\sigma_2 = 0$ .

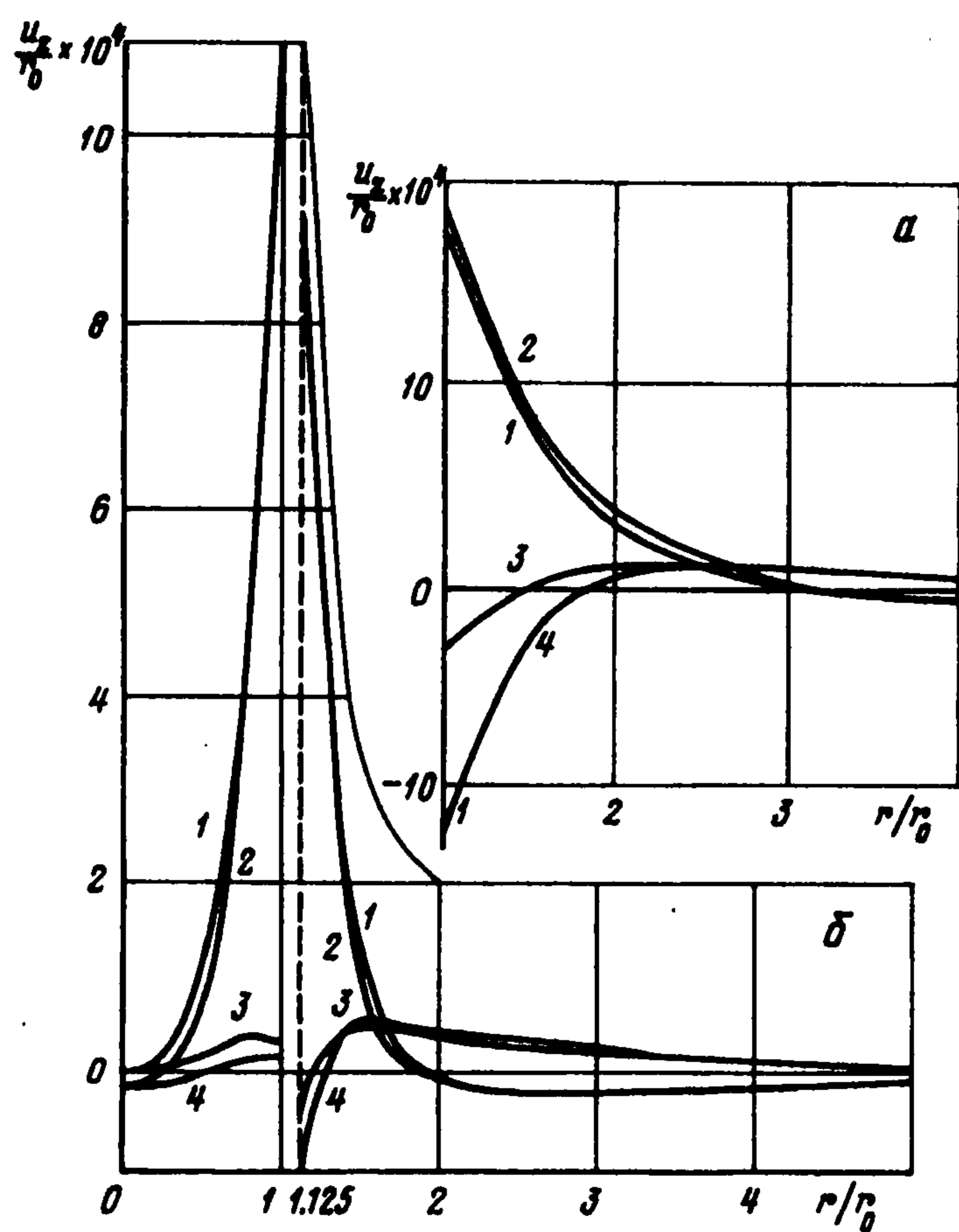
Задачи решаются шагово-итерационным методом, изложенным в разд. 2, 3, 5. Искомые перемещения аппроксимируются формулой (5.2), в которой в силу симметрии задачи относительно координатных плоскостей  $xOz$  и  $yOz$  присутствуют только четные гармоники.

Для полупространства с отверстием глубина отверстия равна его радиусу. Часть меридионального сечения, дискретизируемая конечными элементами, имеет радиус  $r_1 = 5r_0$  и высоту  $z_1 = 5r_0$ , где  $r_0$  – радиус отверстия. Эта область разбивается на три зоны (фиг. 1). Каждая зона разбивается на конечные элементы. Оставшаяся часть меридионального сечения (зона 4) разбивается на бесконечные элементы. Всего меридиональное сечение содержит 300 конечных и 40 бесконечных элементов. Сетка конечных элементов сгущается по направлению к отверстию. Приложенная к боковой поверхности отверстия нагрузка разбивается на 5 равных шагов по параметру  $z_2$ . Удерживаются гармоники с номерами 0, 2, 4, 6, 8.

Для полупространства с проточкой глубина и ширина проточки составляют соответственно четверть и одну восьмую ее внутреннего радиуса ( $z_0 = r_0/4$ ,  $r_2 - r_0 = r_0/8$ ). Область, дискретизируемая конечными элементами, имеет те же размеры, что и в случае отверстия. Область состоит из пяти зон (фиг. 2), каждая из которых разбивается на конечные элементы. Оставшаяся часть меридионального сечения (зона 6) разбивается на бесконечные элементы. Всего меридиональное сечение содержит 751 конечных и 60 бесконечных элементов. Сетка конечных элементов сгущается в направлении к проточке. Приложенная к боковой поверхности проточки нагрузка разбивается на 7 равных шагов по параметру  $z_2$ . Удерживаются те же гармоники, что и для отверстия.

Для проверки точности полученных решений проводились расчеты с другими значениями параметров численной модели. Результаты дополнительных расчетов отличались от основного на несколько процентов.

На фиг. 3 представлены графики зависимости от  $r$  перемещений  $u_z$ , отнесенных к радиусу



Фиг. 3

отверстия, на границе полупространства с отверстием (а) и перемещений  $u_z$ , отнесенных к внутреннему радиусу проточки, на границе полупространства внутри и вне кольцевой проточки (б). Цифрами 1, 2 обозначены упругое и упругопластическое решения при  $\varphi = 0$ , цифрами 3, 4 – те же решения при  $\varphi = \pi/2$ . Характерной чертой упругопластического решения является то, что перемещение  $u_z$  на кромке отверстия при  $\varphi = \pi/2$  сравнимо с перемещением  $u_z$  при  $\varphi = 0$ . В случае проточки видна значительно большая близость упругого и упругопластического решений, чем в случае отверстия.

Приведенные результаты показывают, что определение остаточных напряжений по перемещениям точек тела в окрестности отверстия в предположении упругости задачи может давать существенную погрешность. Использование кольцевой проточки приводит в этом случае к значительно меньшим погрешностям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (1996-01-01538).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
2. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 765–770.
3. Ворович И.И., Красовский Ю.П. О методе упругих решений // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 4. С. 740–743.
4. Победра Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
5. Rajapakse R.K.N.D., Karasudhi P. Elastostatic infinite elements for layered half spaces // J. Eng. Mech. 1985. V. 111. № 9. P. 1144–1158.
6. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 333 с.
7. Антонов А.А., Морозов В.К., Чернышев Г.Н. Измерение напряжений методом голографирования возмущенной поверхности тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 185–189.
8. Кукуджанов В.Н., Шнейдерман Д.Н. Решение пространственных упругих задач при определении остаточных напряжений в анизотропных материалах // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 38–47.

Москва

Поступила в редакцию  
5.VI.1996