УДК 539.3

Г.Я. Попов

ЗАДАЧИ О КОНЦЕНТРАЦИИ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ КОНИЧЕСКОГО ДЕФЕКТА

Предложен способ сведения неосесимметричных задач о концентрации напряжений возле конической трещины или тонкого конического включения конической оболочки к системе одномерных интегродифференциальных уравнений. В случае кручения упругой среды получено точное решение соответствующего интегродифференциального уравнения. Дан прием вычисления квадратур (в том числе сингулярных), к которым сводятся рассматриваемые задачи. Предлагаемый метод имеет принципиальное отличие от методов, предложенных в работах [1, 2], где частные случаи этих задач рассмотрены в осесимметричной постановке.

1. Постановка задач, приведение уравнений Ламе к гармоническим. Рассматривается неограниченная упругая среда ($0 \leqslant r < \infty, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$), имеющая конический дефект [3, 4], под которым понимаем часть поверхности кругового конуса:

$$0 \leqslant r \leqslant R, \ \theta = \omega, \ -\pi \leqslant \varphi < \pi \tag{1.1}$$

при переходе через которую терпят разрывы непрерывности первого рода смещения u_r, u_θ, u_φ и напряжения σ_θ, $\tau_{\theta r}$, $\tau_{\theta\varphi}$. Частной реализацией такого дефекта является коническая трещина (разрез), когда разрывы имеют только смещения, а напряжения непрерывны. Другой частной реализацией дефекта является жесткое тонкое коническое включение, т.е. коническая оболочка, срединная поверхность которой фиксируется соотношением (1.1). Если полагать, что это включение сцеплено с упругой средой, то в данном случае будут терпеть разрыв непрерывности напряжения, а смещения остаются непрерывными. Все перечисленные компоненты поля будут терпеть разрывы в случае дефекта в виде отслоившегося включения [3, 4].

Считается, что упругая среда произвольно загружена статической нагрузкой и поле напряжений и смещений для этой нагрузки известно:

$$\sigma_\theta^0, \ \tau_{\theta r}^0, \ \tau_{\theta\varphi}^0, \ u_r^0, \ u_\theta^0, \ u_\varphi^0 \tag{1.2}$$

Требуется найти распределение напряжений и смещений от этой нагрузки, если в упругой среде появился дефект (1.1).

Чтобы свести поставленную проблему к интегральным уравнениям, следует [3, 4] построить разрывное решение уравнений Ламе для дефекта (1.1), т.е. решение, которое удовлетворяет уравнениям Ламе всюду за исключением точек дефекта (1.2). В этих точках задаются скачки перечисленных смещений и напряжений. Для сферического дефекта такое решение было построено [4] на основе решения уравнений Ламе в форме Треффтца.

Для конического дефекта оказалось более удобным использовать решение уравнений Ламе в форме Мичеля [5]. Вместо u_r, u_θ, u_φ вводятся функции

$$u(r,\theta,\varphi)=ru_r,\ v(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta u_\theta,\quad w(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta u_\varphi \tag{1.3}$$

и их трансформанты Фурье

$$u_n(r,\theta),v_n(r,\theta),w_n(r,\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(r,\theta,\varphi),v(r,\theta,\varphi),w(r,\theta,\varphi)d\varphi}{2\pi\exp(in\varphi)},\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{1.4}$$

Мичель в качестве основных неизвестных принял функцию $u(r, \theta, \varphi)$, объемное раоширение $\Theta(r, \theta, \varphi)$ и радиальную проекцию вращения $\Omega(r, \theta, \varphi)$, трансформанты последних связаны с (1.3) формулами

$$r^2\Theta_n=(ru_n)'+(\sin\theta)^{-1}\dot{v}_n+in(\sin\theta)^{-2}w_n \tag{1.5}$$

$$r\sin\theta\Omega_n=\dot{w}_n-in(\sin\theta)^{-1}v_n \tag{1.6}$$

и свел уравнения Ламе [6]

$$\begin{gathered}2\mu_0 r\sin\theta\ \dot{\Theta}_n-in\Omega_n+rv_n''-\sin\theta r(r^{-1}\dot{u}_n)'=0\\ 2\mu_0 r^2 in\Theta_n+r\sin\theta\dot{\Omega}_n-inr^2(r^{-1}u_n)'+r^2w_n''=0\\ \mu_0=(1-\mu)(1-2\mu)^{-1}\end{gathered} \tag{1.7}$$

(μ – коэффициент Пуассона, третье уравнение Ламе не выписываем) к следующим трем раздельно решаемым гармоническим уравнениям:

$$\Delta_n\left(\frac{\Theta_n}{\Omega_n}\right)=0,\quad \Delta_n f=(r^2f')'-\nabla_n f,\quad \nabla_n f=\frac{n^2}{\sin^2\theta}f-\frac{(\sin\theta\dot{f})^{\cdot}}{\sin\theta} \tag{1.8}$$

$$\Delta_n u_n=2r^2\Theta_n-(1-2\mu)^{-1}r^3\Theta_n' \tag{1.9}$$

Здесь и всюду ниже штрих обозначает производную по r, а точка – производную по θ.

Решение уравнения (1.9) можно представить в виде

$$u_n=u_n^*+\tilde{u}_n \tag{1.10}$$

где $\overset{*}{u}_n$ – решение гармонического уравнения

$$\Delta_n u_n^*=0,\ 0<r<\infty,\quad 0<\theta<\pi \tag{1.11}$$

а $\tilde{u}_n$ – частное решение уравнения

$$\Delta_n\tilde{u}_n=2r^2\Theta_n-(1-2\mu)^{-1}r^3\Theta_n',\quad 0<r<\infty,\quad 0<\theta<\pi \tag{1.12}$$

Если Θ_n, Ω_n, u_n будут найдены, то для нахождения v_n, w_n следует выполнить такие операции: умножим соотношение (1.5) $\sin\theta^{-1}\partial/\partial\theta\sin^2\theta$, а соотношение (1.6) на $in(\sin\theta)^{-1}$ и результаты вычтем, что приведет к уравнению для определения v

$$-\nabla_n v_n=(\sin\theta)^{-1}\{r^2(\sin^2\theta\Theta_n)^{\cdot}+[r(\sin^2\theta u_n)^{\cdot}]'\}-inr\Omega_n \tag{1.13}$$

Другая линейная комбинация соотношений (1.5) и (1.6) дает аналогичное уравнение для определения w_n

$$-\nabla_n w_n=in[r^2\Theta_n-(ru_n)']+r(\sin\theta)^{-1}(\sin^2\theta\Omega_n)^{\cdot} \tag{1.14}$$

2. Построение разрывных решений для гармонических уравнений. Чтобы построить упомянутое выше разрывное решение уравнений Ламе, необходимо предварительно построить разрывные решения гармонических уравнений для дефекта (1.1). Это построение проведем по схеме работ [3, 4]. Применим к указанным уравнениям сперва интегральные преобразования Меллина, причем для соответствующих трансформант введем такие обозначения

$$[u_{ns}, v_{ns}, w_{ns}] = \int_0^\infty \frac{[u_n(r,\theta), v_n(r,\theta), w_n(r,\theta)]}{r^{1-s}} dr$$

$$\Omega_{ns} = \int_0^\infty \Omega_n(r,\theta) r^s dr, \quad [\theta_{ns}, \sigma_{ns}, \tau_{rns}, \tau_{\varphi ns}] = \int_0^\infty \frac{[\Theta_n(r,\theta), \sigma_{\theta n}(r,\theta), \tau_{rns}(r,\theta), \tau_{\varphi ns}(r,\theta)]}{r^{-1-s}} dr \tag{2.1}$$

а затем интегральное преобразование Лежандра ($P_k^m(z)$ – присоединенная функция Лежандра)

$$\Theta_{nsk} = \int_0^\pi \Theta_{ns}(\theta) P_k^{(n)}(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

по обобщенной [3] схеме.

В результате, например, трансформанта Меллина Θ_{ns} разрывного решения гармонического уравнения для Θ_n (1.8) будет представлена в виде

$$\frac{\Theta_{ns}}{\sin\omega} = \left\langle \Theta^{\cdot}_{ns} \right\rangle K_{ns}(\theta,\omega) - \left\langle \Theta_{ns} \right\rangle \frac{\partial}{\partial\omega} K_{ns}(\theta,\omega) \tag{2.3}$$

$$K_{ns}(\theta,\omega) = \sum_{k=(n)}^{\infty} \frac{\sigma_{kn} P_k^{(n)}(\cos\theta) P_k^{(n)}(\cos\omega)}{k(n+1)-(s+2)(s+1)}, \quad 2\sigma_{kn} = (k-|n|)![(k+|n|)!]^{-1}(2k+1)$$

Точкой сверху помечена трансформанта Меллина скачка нормальной (к дефекту) производной функции $\Theta_n(r, \theta)$.

Используя формулу обращения для трансформант Меллина, из (2.3) найдем само разрывное решение

$$\Theta_n(r,\theta) = \sin\omega \int_0^R \left[\left\langle \Theta^{\cdot}_n \right\rangle \Phi_n\left(\frac{r}{\rho};\theta,\omega\right) - \left\langle \Theta_n \right\rangle \frac{\partial}{\partial\omega} \Phi_n\left(\frac{r}{\rho};\theta,\omega\right) \right] \frac{d\rho}{\rho} \tag{2.4}$$

$$\Phi_n(t;\theta,\omega) = \sum_{K=(n)}^{\infty} \frac{\sigma_{kn}}{2k+1} P_k^{(n)}(\cos\theta) P_k^{(n)}(\cos\omega) \Phi_k(t)$$

$$\Phi_k(t) = \frac{2k+1}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \frac{t^{-(s+2)} ds}{k(k+1)-(s+2)(s+1)} = \frac{2k+1}{2\pi i} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \frac{t^{-s} ds}{k(k+1)-s(s-1)} = \begin{cases} t^k, & t<1 \\ t^{-k-1}, & t>1 \end{cases}$$

В дальнейшем понадобятся предельные значения разрывного решения Θ_n к ее производной $\Theta^{\cdot}_n$. Можно убедиться, что справедлива формула

$$\Theta_n(r,\omega\mp 0) = \pm\frac{1}{2}\langle\Theta_n\rangle - \sin\omega \int_0^R \left[\langle\Theta_n\rangle \frac{\partial}{\partial\omega} \Phi_n\left(\frac{r}{\rho};\theta,\omega\right)\Big|_{\theta=\omega} - \langle\Theta^{\cdot}_n\rangle \Phi_n\left(\frac{r}{\rho};\omega,\omega\right) \right] \frac{d\rho}{\rho} \tag{2.5}$$

Формула для $\Theta^{\cdot}_n$ имеет такую же структуру, только в подынтегральном выражении φ_n следует продифференцировать по θ и положить $\theta = \omega$.

Такие же формулы справедливы и для $\Omega_n(r, \theta)$ и $\overset{*}{u}_n(r, \theta)$, при этом только следует заменить $\langle\Theta^{\cdot}_n\rangle$, $\langle\Theta_n\rangle$ на $\langle\Omega^{\cdot}_n\rangle$, $\langle\Omega_n\rangle$ и $\langle u^{\cdot}_n\rangle$, $\langle u_n\rangle$, так как в силу непрерывности частного решения уравнения (1.12) $\langle u^{\cdot}_n\rangle = \langle \overset{*}{u}{}^{\cdot}_n\rangle$, $\langle u_n\rangle = \langle \overset{*}{u}_n\rangle$.

Для построения последнего применим к уравнению (1.12) интегральное преобразование Меллина (2.1) и Лежандра (2.2). В результате найдем трансформанту Меллина решения уравнения (1.12), подставим в нее выражение (2.3), заменив предварительно там трансформанты скачков соответствующими интегралами от оригиналов и воспользовавшись ортогональностью присоединенных функций Лежандра [7]. Поледующее применение формулы обращения для преобразования Меллина приводит к формуле

$$\tilde{u}_n(r,\theta)=\frac{\sin\omega}{1-2\mu}\int\limits_0^R\left[\langle\Theta_n^{\cdot}\rangle\tilde{\Phi}_n\left(\frac{r}{\rho};\theta,\omega\right)-\langle\Theta_n\rangle\frac{\partial}{\partial\omega}\tilde{\Phi}_n\left(\frac{r}{\rho};\theta,\omega\right)\right]\rho d\rho \tag{2.6}$$

$$\tilde{\Phi}_n(t;\theta,\omega)=\sum_{k=|n|}^{\infty}\frac{\sigma_{kn}P_k^{|n|}(\cos\theta)P_k^{|n|}(\cos\omega)\Phi_k(t)}{2(2k+1)}$$

$$\tilde{\Phi}_k(t)=\begin{cases}(2k+3)^{-1}(\mu^*-k-2)t^{k+2}+(2k-1)^{-1}(k-\mu^*)t^k, & t<1\\ (2k+3)^{-1}(\mu^*+k+1)t^{-k-1}-(2k-1)^{-1}(\mu^*+k-1)t^{-k+1}, & t>1;\end{cases}\qquad \mu^*=4(1-\mu)$$

3. Построение разрывного решения уравнений Ламе. Будем считать, что на дефекте заданы скачки трансформант Фурье напряжений

$$\begin{aligned}&\sigma_{\theta n}(r,\omega-0)-\sigma_{\theta n}(r,\omega+0)=\langle\sigma_{\theta n}(r,\omega)\rangle=\langle\sigma_{\theta n}\rangle\\&\tau_{\theta rn}(r,\omega-0)-\tau_{\theta rn}(r,\omega+0)=\langle\tau_{\theta rn}(r,\omega)\rangle=\langle\tau_{rn}\rangle\\&\tau_{\theta\varphi n}(r,\omega-0)-\tau_{\theta\varphi n}(r,\omega+0)=\langle\tau_{\theta\varphi n}(r,\omega)\rangle=\langle\tau_{\varphi n}\rangle\end{aligned} \tag{3.1}$$

и смещении

$$\langle u_n(r,\omega)\rangle=\langle u_n\rangle,\quad \langle v_n(r,\omega)\rangle=\langle v_n\rangle,\quad \langle w_n(r,\omega)\rangle=\langle w_n\rangle \tag{3.2}$$

Требуемое разрывное решение будет построено, если будут выражены скачки (или их трансформанты Фурье) гармонических функций (1.8), (1.11) и (2.4) через заданные скачки (3.1), (3.2).

Эту операцию проведем учитывая закон Гука для поля напряжений и смещений в сферической системе координат [8].

Используя введенные обозначения и переходя к трансформантам Фурье, затем перейдем к скачкам (3.1) и (3.2) и будем иметь (G – модуль сдвига)

$$\begin{aligned}&\frac{\langle\sigma_{\theta n}\rangle}{2G}=\frac{\mu}{1-2\mu}\langle\Theta_n\rangle+\frac{\langle v_n^{\cdot}\rangle-\operatorname{ctg}\omega\langle v_n\rangle}{r^2\sin\omega}+\frac{\langle u_n\rangle}{r^2}\\&\langle\tau_{rn}\rangle=G[r^{-2}\langle u_n^{\cdot}\rangle\operatorname{cosec}\omega r(r^{-2}\langle v_n\rangle)']\\&\langle\tau_{\varphi n}\rangle=G(r^2\sin^2\omega)^{-1}[\sin\omega\langle w_n^{\cdot}\rangle-2\cos\omega\langle w_n\rangle+in\langle v_n\rangle]\end{aligned} \tag{3.3}$$

Если подключить к этим уравнениям еще два уравнения

$$r^2\langle\Theta_n\rangle=(r\langle u_n\rangle)'+\frac{\langle v_n^{\cdot}\rangle}{\sin\omega}+\frac{in\langle w_n\rangle}{\sin^2\omega},\quad \langle\Omega_n\rangle=\frac{\langle w_n^{\cdot}\rangle}{r\sin\omega}-\frac{in\langle v_n\rangle}{r\sin^2\omega}$$

вытекающих из (1.5) и (1.6), то из полученной системы найдем требуемые соотношения

$$\begin{aligned}&\langle u_n\rangle=G^{-1}r^2\langle\tau_{rn}\rangle-r^3(\sin\omega)^{-1}(r^{-2}\langle v_n\rangle)'\\&\mu_0r^2\langle\Theta_n\rangle=\frac{r^2\langle\sigma_{\theta n}\rangle}{2G}+r\langle u_n\rangle'+\frac{\operatorname{ctg}\omega\langle v_n\rangle}{\sin\omega}+\frac{in\langle w_n\rangle}{\sin^2\omega}\\&\langle\Omega_n\rangle=\frac{r\langle\tau_{\varphi n}\rangle}{G}+\frac{2\operatorname{ctg}\omega\langle w_n\rangle}{r\sin\omega}-\frac{2in\langle v_n\rangle}{r\sin^2\omega}\end{aligned} \tag{3.4}$$

Осталось получить аналогичные соотношения для $\langle\Theta_n^{\cdot}\rangle$ и $\langle\Omega_n^{\cdot}\rangle$. Их найдем, воспользовавшись соотношениями (1.7). Перейдя в последних к скачкам и учитывая (3.5), получим

$$\mu_0 \sin\omega\langle\Theta_n^{\cdot}\rangle = -r\left(\frac{\langle v_n\rangle'}{r}\right)' - \left(1-\frac{n^2}{\sin^2\omega}\right)\frac{\langle v_n\rangle}{r^2} + \frac{in\operatorname{ctg}\omega\langle w_n\rangle}{r^2\sin\omega} +$$

$$+(2G)^{-1}[in\langle\tau_{\varphi n}\rangle + \sin\omega(r\langle\tau_{rn}\rangle)'] \tag{3.5}$$

$$-r\sin\omega\langle\Omega_n^{\cdot}\rangle = in(r\langle u_n\rangle' + \langle u_n\rangle) + r^2\langle w_n\rangle'' - \frac{2n^2\langle w_n\rangle}{\sin^2\omega} + \frac{2in\operatorname{ctg}\omega}{\sin\omega}\langle v_n\rangle + \frac{inr^2\langle\sigma_{\theta n}\rangle}{G}$$

Для завершения процесса построения разрывного решения остается еще решить уравнения (1.13) и (1.14). Они решаются просто, если учесть, что

$$\Psi_n(\theta,\tau) = \sum_{k=(n)}^{\infty}\sigma_{kn}\frac{P_k^{(n)}(\cos\theta)P_k^{(n)}(\cos\tau)}{k(k+1)}$$

– фундаментальная функция (фундаментальное решение) рассматриваемых уравнений. Поэтому решения указанных уравнений можно записать в виде

$$-\left\|\begin{matrix} v_n(r,\theta) \\ w_n(r,\theta)\end{matrix}\right\| = \int_0^{\pi}\Psi_n(\theta,\tau)\left\|\begin{matrix} r^2(\sin^2\tau\Theta_n)^{\cdot} + [r(\sin^2\tau u_n)^{\cdot}]' - in\sin\tau r^2\Omega_n \\ in\sin\tau[r^2\Theta_n - (ru_n)'] + r(\sin^2\tau\Omega_n)^{\cdot}\end{matrix}\right\| d\tau \tag{3.6}$$

При $n = 0$ (осевая симметрия) полученные формулы теряют силу. В этом случае можно получить более простые формулы. Полагая в (1.5) и (1.6) $n = 0$ и интегрируя по θ (постоянная интегрирования оказывается равной нулю в силу смысла функций v_0, w_0), получаем

$$\left\|\begin{matrix} v_0(r,\theta) \\ w_0(r,\theta)\end{matrix}\right\| = \int_0^{\theta}\left\|\begin{matrix} r^2\Theta_0 - (ru_0)' \\ r\Omega_0\end{matrix}\right\|\sin\tau d\tau \tag{3.7}$$

Формулы (3.6), (2.4), (1.10) и (3.4), (3.5) определяют разрывное решение уравнения Ламе для конического дефекта (1.1) с заданными скачками (3.1), (3.2).

4. Сведение поставленной задачи к одномерным интегродифференциальным уравнениям. С помощью построенного в разд. 3 разрывного решения легко свести к одномерным интегродифференциальным уравнениям любую задачу о концентрации напряжений возле дефекта (1.1).

Действительно, для этого достаточно выполнить такие операции. Искомое поле напряжений и смещений в трансформантах Фурье следует представить в виде двух слагаемых:

$$\sigma_{\theta n} = \sigma_{\theta n}^0 + \sigma_{\theta n}^1,\quad \tau_{rn} = \tau_{rn}^0 + \tau_{rn}^1,\quad \tau_{\varphi n} = \tau_{\varphi n}^0 + \tau_{\varphi n}^1 \tag{4.1}$$

$$u_n = u_n^0 + u_n^1,\quad v_n = v_n^0 + v_n^1,\quad w_n = w_n^0 + w_n^1 \tag{4.2}$$

Трансформанты компонентов поля напряжений и смещений помеченные нулем, взяты из решения (1.2), при учете (1.3)–(1.6), а помеченные единицей берутся по указанным в разд. 3 формулам для разрывного решения уравнения Ламе, содержащим шесть в общем случае неизвестных скачков (3.1) и (3.2).

Если природа дефекта достаточно обща, например имеется неподвижное закрепленное тонкое включение [3, 4], один край (берег) которого $\theta = \omega + 0$ сцеплен с упругой средой, а другой $\theta = \omega - 0$ отслоился и не взаимодействует с последним, то в этом случае следует выполнить шесть условий на дефекте (1.1):

$$\sigma_{\theta n}^1\Big|_{\theta=\omega-0} = -\sigma_{\theta n}^0\Big|_{\theta=\omega},\quad \tau_{rn}^1\Big|_{\theta=\omega-0} = -\tau_{rn}^0\Big|_{\theta=\omega},\quad \tau_{\varphi n}^1\Big|_{\theta=\omega-0} = -\tau_{\varphi n}^0\Big|_{\theta=\omega} \tag{4.3}$$

$$u_n^1\Big|_{\theta=\omega+0}=-u_n^0\Big|_{\theta=\omega},\ v_n^1\Big|_{\theta=\omega+0}=-v_n^0\Big|_{\theta=\omega},\ w_n^1\Big|_{\theta=\omega-0}=-w_n^0\Big|_{\theta=\omega} \qquad (4.4)$$

Условия (4.3) обеспечивают отсутствие напряжений на отслоившемся краю (берегу) включения, а условия (4.4) обеспечивают неподвижность включения. Реализация этих условий с помощью формул (3.6), (2.4), (1.10) и (3.4), (3.5) сведет проблему к системе из шести одномерных интегродифференциальных уравнений (с. [3, 4]).

Выполнение соответствующих операций продемонстрируем на примере дефекта (1.1) в виде трещины. В этом случае скачки напряжений (3.1) должны быть равны нулю, так как условия (4.3) должны выполняться на обоих берегах, т.е. и при $\theta =$ $= \omega + 0$ и при $\theta = \omega - 0$. Это приведет к необходимости реализовать, только три условия (4.3) относительно трех неизвестных скачков смещений (3.2). Формулы (3.4) и (3.5) приобретут при этом более простой вид.

Дальнейшую детализацию метода проведем применительно к случаю осесимметричных задач, т.е. когда $n = 0$. В этом случае соотношения (3.4), (3.5) еще более упрощаются:

$$\langle u_0\rangle=-\frac{r^3}{\sin\omega}\left(\frac{\langle v_0\rangle}{r^2}\right)',\quad \frac{\langle\Theta_0\rangle}{\mu_0^{-1}}=\frac{\langle u_0\rangle'}{r}+\frac{\operatorname{ctg}\omega\langle v_0\rangle}{r^2\sin\omega}$$

$$\langle\Omega_0\rangle=\frac{2\operatorname{ctg}\langle w_0\rangle}{r\sin\omega},\quad \mu_0\langle\Theta_0\rangle=\frac{-r}{\sin\omega}\left(\frac{\langle v_0\rangle'}{r}\right)'-\frac{\langle v_0\rangle}{r^2\sin\omega} \qquad (4.5)$$

$$\sin\omega\langle\Omega_0\rangle=-r\langle w_0\rangle''$$

Условия (4.3) примут вид

$$\sigma_\theta^1(r,\omega-0)=-\sigma_\theta^0(r,\omega),\quad \tau_{\theta r}^1(r,\omega-0)=-\tau_{\theta r}^0(r,\omega)$$
$$\tau_{\theta\varphi}^1(r,\omega-0)=-\tau_{\theta\varphi}^0(r,\omega),\quad 0\leqslant r\leqslant R \qquad (4.6)$$

причем согласно формулам для напряжений, совпадающих с формулами (3.3), в которых следует убрать символы скачков и ω заменить на θ, а также согласно (3.7)

$$\frac{\sigma_\theta^1}{2G}=\mu_0\Theta_0+\frac{[u_0-(ru_0)']\sin\theta-\operatorname{ctg}\theta v_0}{r^2\sin\theta},\quad \frac{\tau_{\theta r}^1}{G}=\frac{u_0}{r^2}+r\left(\frac{v_0}{r^2}\right)'$$
$$\frac{r\tau_{\theta\varphi}^1}{G}=\Omega_0-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\int_0^\theta\sin\tau\Omega_0(r,\tau)d\tau \qquad (4.7)$$

Как видим, рассматриваемая задача расщепляется на две независимо решаемые задачи: 1) осесимметричную деформацию упругой среды с неизвестными скачками $\langle u_0\rangle$ и $\langle v_0\rangle$, определяемыми из первых двух условий (4.6) и 2) кручения упругой среды с неизвестным скачком $\langle w_0\rangle$, определяемым из последнего условия (4.6).

Получение оптимальных интегродифференциальных уравнений при реализации условий (4.6) проиллюстрируем на примере задачи кручения, т.е. на примере последнего условия (4.6). Узловым моментом здесь является выбор неизвестной функции. От этого зависит, к какому уравнению сведется разбираемая проблема. В данном случае оптимален выбор такой функции:

$$\chi(r)=\langle w_0(r,\omega)\rangle r^{-1},\quad \operatorname{supp}\chi(r)=[0,R] \qquad (4.8)$$

Умножим обе части последнего равенства из (4.6) на G^{-1} и для заданной правой части введем обозначение

$$r\tau_{\theta\varphi}^0(r,\omega)=\tau_-(r),\quad \operatorname{supp}\tau_-(r)=[0,R]$$

Последующая подстановка выражения $\tau^1_{\theta\varphi}$ из (4.7) в левую часть с учетом формул (2.4), (2.5) и (4.5) для $\Omega_0(r, \theta)$ с использованием следующих непосредственно проверяемых соотношений:

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Phi_k\left(\frac{r}{\rho}\right) = -r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^2}\Phi_k^0\left(\frac{r}{\rho}\right),\quad \Phi_k(t) = \begin{cases} -(k+1)t^k, & t<1 \\ kt^{-k-1}, & t>1 \end{cases},\quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_k\left(\frac{r}{\rho}\right) = \Phi_k\left(\frac{r}{\rho}\right),\quad \Phi_k^1(t) = \begin{cases} k^{-1}t^k, & t<1 \\ -(k+1)^{-1}t^{-k-1}, & t>1 \end{cases},\quad k = 1,2,\ldots$$

приводит к интегродифференциальному уравнению типа Винера–Хопфа

$$\frac{\operatorname{ctg}\omega}{\sin\omega}\chi(r) + r\frac{\partial}{\partial r}\int_0^R \frac{\chi(\rho)}{\rho}k\left(\frac{r}{\rho}\right)d\rho = -\frac{\tau_-(r)}{G},\quad 0 \leqslant r \leqslant R \tag{4.9}$$

Его ядро определяется формулами

$$k(t) = k_1(t) - 2\operatorname{ctg}\omega k_3(t) - 2\operatorname{ctg}\omega\operatorname{cosec}\omega k_2(t) + 4\operatorname{ctg}^2\omega\operatorname{cosec}\omega k_4(t)$$

$$[k_1(t), k_2(t)] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Phi_k^0(t)}{2}[|P_k(\cos\omega)|^2,\ B_k(\omega)],\quad [k_3(t), k_4(t)] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_k^1(t)}{2}[A_k(\omega), C_k(\omega)] \tag{4.10}$$

$$[A_k(\omega), C_k(\omega)] = \left[P_k(\cos\omega),\ \int_0^\omega \sin\tau P_k(\cos\tau)\right]\frac{d}{d\omega}P_k(\cos\omega)$$

$$B_k(\omega) = P_k(\cos\omega)\int_0^\omega \sin\tau P_k(\cos\tau)d\tau,\quad \frac{dP_k(\cos\omega)}{d\omega} = P_k^1(\cos\omega)$$

5. Построение точного решения интегродифференциального уравнения кручения упругой среды с конической трещиной. Построим точное решение уравнения (4.9). Введем согласно процедуре метода факторизации (например, [9]) дополнительную неизвестную

$$\tau_+(r) = r\tau^1_{\theta\varphi}(r, \omega - 0),\quad r > R,\quad \operatorname{supp}\tau_+(r) = (R, \infty) \tag{5.1}$$

представляющую собой искомое касательное напряжение на продолжении конической трещины (1.1). Добавляя (5.1) с соответствующим множителем к правой части уравнения(4.9), продлим его на всю ось $0 \leqslant r < \infty$. Тогда после замены $r = \xi R$, $\rho = \eta R$ и преобразования Меллина. Придем к функциональному уравнению Винера–Хопфа, заданному на мнимой оси

$$X^-(s)\left[\frac{\operatorname{ctg}\omega}{\sin\omega} - sK(s)\right] = \frac{T^+(s) - T^-(s)}{G} \tag{5.2}$$

где

$$[X^-(s),\ T^-(s)] = \int_0^1 \xi^{s-1}[\chi(\xi R), \tau_-(\xi R)]d\xi$$

$$T^+(s) = \int_1^\infty \tau_+(R\xi)\xi^{s-1}d\xi,\quad K_j(s) = \int_0^\infty k_j(t)t^{s-1}dt,\quad j = 1,2,3,4 \tag{5.3}$$

$$K(s) = K_1(s) - 2\operatorname{ctg}\omega K_3(s) - 2\operatorname{ctg}\omega\operatorname{cosec}\omega[K_2(s) - 2\operatorname{ctg}\omega K_4(s)]$$

Минус (плюс) в верхнем индексе означает как обычно аналитичность функции в правой (левой) полуплоскости $\mathrm{Re}\,s \gtrless 0$. Для решения уравнения (5.2), как известно [9], необходимо факторизовать коэффициент при $X^{-}(s)$. Чтобы провести эту операцию, следует изучить поведение на бесконечности символов $K_j(s)$ ядер $k_j(t)$ $j = 1, 2, 3, 4$.

Начнем с символа $K_1(s)$ ядра $k_1(t)$. Выделим главную часть из него. Используя асимптотическую формулу Лапласа [10]

$$P_k(\cos\omega) = 2^{1/2}(\pi k\sin\omega)^{-1/2}\cos[(k+1/2)\omega - 1/4\pi] + O(k^{-3/2}), \quad k \to \infty$$

выявляем справедливость приближенной формулы

$$k_1(t) \approx \sum_{k=0}^{k_0} \frac{[P_k(\cos\omega)]^2}{2}\Phi_k^1(t) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1+\sin(2k+1)\omega}{2\pi k\sin\omega}\Phi_k^1(t) \tag{5.4}$$

которая будет тем точней, чем больше взять число k_0. Полученная формула показывает, что главной частью ядра $k_1(t) = \bar{k}_1(t) + \overset{*}{k}_1(t)$ будет функция

$$\bar{k}_1(t) = \frac{(\sin\omega)^{-1}}{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\begin{cases}-t^k, & t<1\\ t^{-k-1}, & t>1\end{cases} = \begin{cases}-(1-t)^{-1}, & t<1\\ (t-1)^{-1}, & t>1\end{cases}\right] \tag{5.5}$$

и символ его будет иметь вид

$$K_1(s) = \frac{-\mathrm{ctg}\,\pi s}{2\sin\omega} + K_1^*(s), \quad K_1^*(s) = \sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{\sin\omega\,|P_k(\cos\omega)|^2}{(\pi k)^{-1}} - 1\right)\Lambda_k(s) -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|P_k(\cos\omega)|^2}{2(k+s)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{\Lambda_k(s)}{\mathrm{cosec}(2k+1)\omega}, \quad \Lambda_k(s) = \frac{(1-2s)\,\mathrm{cosec}\,\omega}{2\pi(s+k)(s-k-1)} \tag{5.6}$$

и убывает при $s \to \infty$. Поступая аналогично и с другими ядрами, т.е. выявляя и у них главные части, с учетом асимптотик

$$A_k(\omega) = O(1), \quad B_k(\omega) = O(k^{-2}), \quad C_k(\omega) = O(k^{-1}), \quad k \to \infty$$

можно убедиться, что оставшиеся символы $K_j(s)$ ($j = 2, 3, 4$) убывают при $s \to \infty$ и определяются формулами

$$K_2(s) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\omega)\Delta_k^*(s), \quad \Delta_k^*(s) = \frac{(2k+1)(1-s)}{2(s+k)(s-k-1)}$$

$$[K_3(s), K_4(s)] = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_k^*(s)[A_k(\omega), C_k(\omega)]}{k(k+1)} \tag{5.7}$$

Как видим, функция, которую надлежит факторизовать, растет как $O(s)$, $s \to \infty$. Поэтому представим ее в виде произведения функции, определяемой формулой

$$G(s) = 1 + 2\mathrm{tg}\pi s[s^{-1}\,\mathrm{ctg}\,\omega - \sin\omega K_1^*(s) + 2\cos\omega K_3(s) +$$

$$+2\,\mathrm{ctg}\,\omega K_2(s) - 4\,\mathrm{ctg}^2\,\omega K_4(s)] \tag{5.8}$$

и стремящейся к единице при $s \to \infty$, на функцию $s\mathrm{cty}\pi s$, имеющую нужный рост на бесконечности (ее факторизация известна, см., например, [9]). Факторизация же функции (5.8) проводится по известной формуле (например, [11, 12])

$$G^{\pm}(s) = \exp\left[\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\alpha}^{i\alpha}\frac{\ln G(t)}{t-s}dt\right], \quad \mathrm{Re}\,s \lessgtr 0 \tag{5.9}$$

После того как коэффициент при $X^-(s)$ в (5.2) профакторизован, искомые функции $X^-(s)$ и $T^+(s)$ легко находятся в явном виде согласно процедуре метода факторизации [9, 12] и, как показано ранее ([9], с. 58), эту процедуру удобно провести применительно к уравнению (4.9) со специальной правой частью, т.е. для случая, когда

$$\tau_-(R\xi) = \xi^p, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad T_p^-(s) = (s+p)^{-1} \tag{5.10}$$

Реализация такого подхода позволила получить для искомых касательных напряжений на продолжении трещины такую формулу:

$$\tau_{\theta\varphi}(r,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{i\alpha}^{i\alpha} T^-(-p)\tau_{\theta\varphi}^{(p)}(r,\omega)dp$$

$$\frac{\tau_{\theta\varphi}^{(p)}(r,\omega)}{r^{-1}} = \left(\frac{r}{R}\right)^p - \frac{1}{2\pi i}\frac{\tilde\Gamma^+(p)}{G^+(-p)}\int_{-i\infty}^{i\alpha}\frac{G^+(s)}{\tilde\Gamma^+(s)}\left(\frac{r}{R}\right)^{-s}\frac{ds}{s+p}, \quad r > R \tag{5.11}$$

$$\tilde\Gamma^\pm(s) = \Gamma(\tfrac{1}{2} \mp s)\Gamma^{-1}(1 \mp s)$$

6. Вывод формулы для коэффициента интенсивности напряжений и способ вычисления квадратур. Сперва установим формулу для коэффициента интенсивности касательных напряжений

$$N_p = \lim\sqrt{2\pi(r-R)}\tau_{\theta\varphi}^{(p)}(r,\omega), \quad r \to R \tag{6.1}$$

для специального вида (5.10) нагружения упругой среды. Чтобы выполнить указанный предельный переход, следует выделить главную часть второго интеграла в (5.11), несущую корневую особенность. Для этого следует учесть, что $G^+(s) - 1$ при $s \to \infty$ стремится к нулю, и потому указанная главная часть содержится в интеграле

$$J^p(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\alpha}^{i\alpha}\frac{\xi^{-s}ds}{\tilde\Gamma^+(s)(s+p)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\alpha}^{i\alpha}\frac{\Gamma(1-s)\xi^{-s}ds}{\Gamma(\tfrac{1}{2}-s)(s+p)}, \quad \xi = \frac{r}{R}$$

Вычисляя последний интеграл при помощи теории вычетов и используя формулу 9.131(2) из [7], формулу (6.1) можно записать так:

$$N_p = -\frac{\tilde\Gamma^+(-p)}{G^+(-p)R}\lim_{r\to R}\sqrt{2\pi(r-R)}J^p(r/R) = \sqrt{\frac{2}{R}}\frac{\tilde\Gamma^+(-p)}{G^+(-p)} \tag{6.2}$$

Дадим теперь формулу для коэффициента интенсивности напряжений

$$N = \lim\sqrt{2\pi(r-R)}\tau_{\theta\varphi}(r,\omega), \quad r \to R$$

в случае произвольного загружения (5.15). Используя те же соображения, что и при получении формулы (5.16), приходим к равенству

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}T^-(-p)N_p dp = \sqrt{\frac{2}{R}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{T^-(s)\tilde\Gamma^+(s)}{G^+(s)}ds$$

Как видим, необходимо знать предельные значения функции $G^+(s)$ на мнимой оси ($\operatorname{Re}s = 0$). Их найдем из (5.12) при помощи формулы Сохоцкого (например, [12]). В результате для коэффициента интенсивности касательных напряжений при произвольном загружении упругой среды получаем

$$N = \sqrt{\frac{2}{R}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{T^-(s)\Gamma^+(s)}{\sqrt{G(s)}}\exp\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(t)}{t-s}dt\right]ds \tag{6.3}$$

Для вычисления полученных квадратур, одна из которых сингулярная, предлагается следующий способ. Делается замена переменных

$$s = (\sigma + 1)(\sigma - 1)^{-1}, \quad t = (\tau + 1)(\tau - 1)^{-1} \tag{6.4}$$

которая конформно отображает левую полуплоскость комплексных переменных s, t на единичный круг, причем мнимая ось переходит в окружность γ единичного радиуса. Затем применяется квадратурная формула, предложенная и обоснованная в [13]. Окончательно получим

$$N = \sqrt{\frac{2}{R}}\frac{(-1)}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\frac{R(\sigma_k)}{\sigma_k - 1}\left[2\sigma_k - \frac{1+\sigma_k^{2n+1}}{\sigma_k^n}\right]\times$$

$$\times \exp\left[\frac{1-\sigma_k}{4n+2}\sum_{j=0}^{2n}\frac{g(\tau_j)}{\tau_j - \sigma_k}\left(2\tau_j - \frac{\sigma_k^{2n+1} + \tau_i^{2n+1}}{\sigma_k^n \tau_j^n}\right)\right.$$

$$g(\tau) = \ln G\left(\frac{\tau+1}{\tau-1}\right)\frac{1}{\tau-1}$$

$$R(\sigma) = T^{-}\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)\Gamma\left(\frac{3+\sigma}{2-2\sigma}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{2}{1-\sigma}\right)\left[G\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)\right]^{-1/2}\frac{1}{1-\sigma}$$

где точки σ_k, τ_j ($j, k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$) разбивают окружность на $2n + 1$ равных частей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Златина И.Н.* Применение парных интегральных уравнений к задаче о кручении упругого пространства, ослабленного конической щелью конечных размеров // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 1130–1135.
2. *Мартыненко М.А.* Осесимметричная задача теории упругости для пространства с коническим разрезом // Докл. АН УССР. Сер. А. 1985. № 5. С. 35–40.
3. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. *Popov G.Ya.* Problems of stress concentration in the neighfourhood of a spherical defect // Adv in Mechanics (Успехи механики). 1992. V. 15. № 1–2. P. 71–110.
5. *Michel J.H.* Some elementary ditribution of stress in three dimensions // Proc. Math. Soc. London. 1901. V. 32. P. 23–30.
6. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1935. 674 с.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
9. *Попов Г.Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев; Одесса: Вища шк., 1982. 167 с.
10. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
11. *Крейн М.Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. Вып. 5. С. 3–120.
12. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
13. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамики. М.: Наука, 1985. 253 с.
14. *Popov G.Ya.* Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect // Adv. in Mechanics.
15. *Michel J.H.* Some elementary ditribution of stress in three dimensions // Proc. Math. Soc. London. 1901. V. 32. P. 23–30.

Одесса

Поступила в редакцию
16.X.1995