УДК 539.3

© 1997 г. **Д.Д. Захаров**

ТЕНЗОР ГРИНА И ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОНКИХ УПРУГИХ СЛОИСТО-НЕСИММЕТРИЧНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Построена матрица квазистатических фундаментальных решений осредненных уравнений упругости для тонкой слоистой пластины произвольной несимметричной структуры с анизотропией слоев общего вида. Основное отличие от классической ситуации состоит в рассмотрении сильно связанных процессов изгиба и растяжения – сжатия – сдвига, поскольку нейтральной (недеформируемой при изгибе) плоскости в таких пластинах, вообще говоря, не существует. На основании теоремы взаимности в задачах стационарной динамики и статики получены интегральные тождества. Для основных типов связанных краевых задач статики выведена система из четырёх граничных интегральных уравнений. Изучены сингулярности ядер, исследованы свойства этих уравнений.

1. Главная цель работы – построить граничные интегральные уравнения (ГИУ) для основных краевых задач связанного изгиба и растяжения – сжатия – сдвига тонкой слоистой упругой пластины. Подобная связанность возникает за счет несимметрии укладки слоев по толщине и, одновременно, за счет существенной анизотропии материалов слоев. Физически это означает, что каждая продольная плоскость, вообще говоря, изгибается и деформируется и нейтральной плоскости не существует. Рассматривается наиболее общий случай, когда и уравнения, и краевые условия оказываются сильно связанными, т.е. добавочные члены имеют одинаковые порядки в сравнении с классическими слагаемыми.

Подробный анализ и классификация уравнений и краевых задач проводился ранее [1–4]. Для решения задач статики были введены комплексные потенциалы для перемещений [3, 5], позволяющие использовать аналитическую технику, родственную методу Колосова – Мусхелишвили – Лехницкого [6–8]. Однако использование ГИУ в некоторых случаях предпочтительнее. Для раздельной изгибной и плоской задач они хорошо изучены [7–11], но для связанных ситуаций не строились.

Имеется [9–12] довольно много алгоритмов для численного решения различных ГИУ (метод граничных элементов, метод разложения по специальным полиномам и т.д.). Это дает возможность обращаться к стандартным процедурам. В этом смысле использованный ранее [5] метод комплексных потенциалов менее стандартизован, хотя для ряда канонических областей позволяет легко получать решения в замкнутом виде.

2. Рассматривается внутреннее (удаленное от краев) напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкого пакета из N идеально сцепленных упругих слоев. Укладка слоев по толщине произвольна, т.е. расположение слоев может быть несимметричным относительно срединной плоскости пакета. Предполагается, что каждый j-й слой ($j = 1, 2, ..., N$) имеет постоянную толщину h_j и плотность ρ_j, его упругие свойства описываются трехмерным законом Гука с матрицей жесткости $\mathbf{G}_j$. Допускается случай общей анизотропии, когда каждая матрица $\mathbf{G}_j$ содержит 21 независимую постоянную.

Будем считать, что полутолщина пакета h много меньше характерного масштаба деформирования L в продольном направлении: $\varepsilon = h/L \ll 1$. Полагаем также, что отношения плотностей, упругих и геометрических параметров слоев несоизмеримы с ε, т.е. имеют единичный порядок при $\varepsilon \to +0$, а характерное время динамического процесса достаточно велико и имеет порядок не ниже, чем $O(\varepsilon^{-1})$. Обозначим через $x_3 = z$, $\mathbf{x} = \mathbf{i}_\alpha x_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) поперечную и продольные декартовы координаты соответственно, $z_j < z_{j+1}$ – координаты лицевых поверхностей j-го слоя, Ω – область, занимаемую пластиной в плане. Пусть на лицевых поверхностях пластины заданы нормальные и касательные напряжения вида

$$\sigma_{33}^{\mp} = \sigma^{\mp}(\mathbf{x}, t), \quad \sigma_{\alpha 3}^{\mp} = \tau_\alpha^{\mp}(\mathbf{x}, t) \quad (z^- = z_1, \; z^+ = z_{N+1}) \tag{2.1}$$

причем $\sigma^{\mp} = O(1)$, $\tau^{\mp} = O(\varepsilon^{-1})$. Последнее требование сделано для удобства изложения, так как при этом асимптотические порядки отклика пластины на касательную и нормальную нагрузки одинаковы.

При одновременной несимметрии укладки и анизотропии слоев для асимптотически главной части НДС (с относительной погрешностью $O(\varepsilon)$) выполнены следующие соотношения упругости

$$W_j = w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{U}_j = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + z\boldsymbol{\theta}$$

$$\left(\boldsymbol{\theta} \equiv \mathbf{i}_\alpha \theta_\alpha, \; \theta_\alpha \equiv -\partial_\alpha w, \; \partial_\alpha \equiv \partial / \partial x_\alpha\right)$$

$$e_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + z\theta_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta\right), \quad \theta_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \theta_\beta$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^j = \chi_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{\Gamma}_j\right)(\mathbf{u} + z\boldsymbol{\theta}), \quad \left(Q_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}\right) = \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} (1, z)\sigma_{\alpha\beta}^j dz$$

$$Q_{\alpha 3} = \partial_\beta M_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \; 1 \leftrightarrow 2)$$

$$\chi_{11} = \mathbf{i}_1\left(\gamma_{11}\partial_1 + \gamma_{16}\partial_2\right) + \mathbf{i}_2\left(\gamma_{16}\partial_1 + \gamma_{12}\partial_2\right)$$

$$\chi_{12} = \mathbf{i}_1\left(\gamma_{16}\partial_1 + \gamma_{66}\partial_2\right) + \mathbf{i}_2\left(\gamma_{66}\partial_1 + \gamma_{26}\partial_2\right)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{16} & \gamma_{12} \\ \gamma_{16} & \gamma_{66} & \gamma_{62} \\ \gamma_{21} & \gamma_{26} & \gamma_{22} \end{Vmatrix}, \quad \gamma_{pq} = \frac{\det\left(\mathbf{G}_q^p\right)}{\det\left(\mathbf{G}_0\right)}, \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{G}\binom{345}{345}$$

Здесь W_j, $\mathbf{U}_j$ – прогиб и продольные перемещения (не зависят от номера слоя), $\sigma_{\alpha\beta}^j$ – напряжения, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\theta_{\alpha\beta}$ – деформации и кривизны в плоскости $z = 0$, $Q_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$ – продольные усилия и моменты в сечении пластины, $Q_{\alpha 3}$ – перерезывающее усилие. Для удобства выкладок выражение для перерезывающего усилия [5] несколько изменено и справа опущены слагаемые $z^+\tau_\alpha^+ - z^-\tau_\alpha^-$.

В исходных (6×6)-матрицах жесткостей $\mathbf{G}$ индексы 4, 5, 6 отвечают напряжениям с индексами 23, 13, 12. Матрицы $\boldsymbol{\Gamma}$ составлены из осредненных жесткостей текущего слоя, $\mathbf{G}_0$ – главный минор в исходной матрице $\mathbf{G}$, минор $\mathbf{G}_q^p$ получен окаймлением минора $\mathbf{G}_0$ p-й строкой и q-м столбцом снизу и справа. Более детально приведенные соотношения изучались ранее [2–4]. Основные уравнения примут вид [2, 3, 5]

$$\partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1)\mathbf{u} - \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\,\mathrm{grad}\, w + T_\alpha = 0$$

$$-\partial^2_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\mathbf{u} + \left\{\partial^2_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3)\,\mathrm{grad} + \rho_* \partial_t^2\right\} w = T_3 \tag{2.2}$$

$$\rho_* = \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \rho_j dz, \quad \mathbf{D}_k = \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} z^{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_j dz$$

$$T_\alpha = \tau^+_\alpha - \tau^-_\alpha, \quad T_3 = \sigma^+ - \sigma^- + \mathrm{div}\left(z^+\boldsymbol{\tau}^+ - z^-\boldsymbol{\tau}^-\right) \tag{2.3}$$

Отличие от классических соотношений теории пластин симметричного строения состоит в связанности уравнений изгиба и плоского напряженного состояния (2.2). Как в уравнениях, так и в усилиях (моментах) вместе с изгибными ($\mathbf{D}_3$) и мембранными ($\mathbf{D}_1$) жесткостями появляются ненулевые смешанные жесткости ($\mathbf{D}_2$) ($\delta^\beta_{\alpha+1}$ – дельта Кронекера, $\alpha\beta$ = 11, 12, 22):

$$\begin{Vmatrix} Q_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{\nu}_{\alpha\beta} \\ \varkappa_{\alpha\beta} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \nu_{\alpha\beta} \\ \varkappa_{\alpha\beta} \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \theta_{\alpha\beta} \end{Vmatrix} \left(1 + \delta^\beta_{\alpha+1}\right) \tag{2.4}$$

Соответственно, краевые условия на $\partial\Omega$ [4, 5] ставятся совместно для обоих типов уравнений ($\mathbf{n}, \tau$ – единичные вектора внешней нормали и касательной при положительном обходе $\partial\Omega$):

первая краевая задача – заданы u_n, u_τ, $\theta_n = -\partial_n w$, w;

вторая краевая задача – заданы продольные усилия Q_n и Q_τ, изгибающий момент M_n и перерезывающее усилие Кирхгофа $P_n = Q_n + \partial_\tau M_\tau$.

Могут также рассматриваться "перекрестные" (например, вида u_n, Q_τ, θ_n, P_n) или смешанные краевые условия. В задаче Коши начальные условия при $t = 0$ ставятся только для функций w и $\partial_t w$.

3. Пусть пластина колеблется по гармоническому закону $e^{i\omega t}$ (далее этот временной множитель опускаем). Обозначим через $\mathbf{V} = (u_\alpha, w)$ и $\mathbf{V}^\mu = \left(u^\mu_\alpha,\ w^\mu\right)$ любые два набора перемещений, задающие некоторые НДС конечной или бесконечной пластины и отвечающие лицевым нагрузкам $\mathbf{T} = (T_\alpha, T_3)$ и $\mathbf{T}^\mu = \left(T^\mu_\alpha,\ T^\mu_3\right)$; возможные краевые условия пока не конкретизируем. Выпишем соотношения взаимности, которым должны удовлетворять оба НДС. В силу их важности для дальнейшего приведем подробную формулировку. Введем в рассмотрение "перекрестную" плотность потенциальной энергии π, кинетической энергии τ, работы лицевых нагрузок a и вектор $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{i}_\alpha \eta_\alpha$ ($\alpha, \beta = 1, 2$):

$$\pi\left(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\mu\right) = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}Q^\mu_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta}M^\mu_{\alpha\beta}\right), \quad \tau\left(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\mu\right) = -\tfrac{1}{2}\rho_*\omega^2 w w^\mu$$

$$a\left(\mathbf{V}, \mathbf{T}^\mu\right) = u_\alpha T^\mu_\alpha + w T^\mu_3, \quad \eta_\alpha\left(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\mu\right) = u_\beta Q^\mu_{\alpha\beta} + \theta_\beta M^\mu_{\alpha\beta} + w Q^\mu_{\alpha 3}$$

Теорема взаимности. Для любых двух состояний $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}^\mu$ несимметрично-слоистой анизотропной пластины выполняются соотношения

$$\pi\left(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\mu\right) + \tau\left(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\mu\right) = \pi\left(\mathbf{V}^\mu, \mathbf{V}\right) + \tau\left(\mathbf{V}^\mu, \mathbf{V}\right)$$

$$a\left(\mathbf{V}, \mathbf{T}^\mu\right) - a\left(\mathbf{V}^\mu, \mathbf{T}\right) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\mu\right) - \mathrm{div}\,\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{V}^\mu, \mathbf{V}\right) \tag{3.1}$$

$$\Pi\left(\mathbf{V},\mathbf{V}^{\mu}\right)+\mathcal{T}\left(\mathbf{V},\mathbf{V}^{\mu}\right)=\Pi\left(\mathbf{V}^{\mu},\mathbf{V}\right)+\mathcal{T}\left(\mathbf{V}^{\mu},\mathbf{V}\right)$$

$$A\left(\mathbf{V},\mathbf{T}^{\mu}\right)-A\left(\mathbf{V}^{\mu},\mathbf{T}\right)=\int\limits_{\partial\Omega}\left\{u_n^{\mu}Q_n-u_nQ_n^{\mu}+u_\tau^{\mu}Q_\tau-\right.$$

$$\left.-u_\tau Q_\tau^{\mu}+\theta_\eta^{\mu}M_\eta-\theta_n M_n^{\mu}+w^{\mu}P_n-wP_n^{\mu}\right\}dl \tag{3.2}$$

$$\left(\Pi,\mathcal{T},A\right)=\int\limits_{\Omega}(\pi,\tau,a)d\Omega$$

Доказательство может быть получено как из общей теоремы взаимности для трехмерного упругого тела (применительно к асимптотически главной части НДС), так и непосредственными преобразованиями уравнений (2.2), записанных через усилия и моменты

$$\partial_\beta Q_{\alpha\beta}+T_\alpha=0$$

$$\partial^2_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}-\rho_*\omega^2 w\equiv\partial_\alpha Q_{\alpha 3}-\rho_*\omega^2 w=T_3$$

к следующему виду:

$$2\left\{\pi\left(\mathbf{V},\mathbf{V}^{\mu}\right)+\tau\left(\mathbf{V},\mathbf{V}^{\mu}\right)\right\}=a\left(\mathbf{V},\mathbf{T}^{\mu}\right)-\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{V},\mathbf{V}^{\mu}\right) \tag{3.3}$$

В силу равенств (2.4) и симметрии матриц жесткостей выражения для плотностей энергии (3.3) являются симметричными билинейными формами для деформаций (кривизн) или усилий (моментов), откуда следуют уравнения (3.1) и (3.2).

Заметим, что при домножении на частоту $i\omega$ равенства (3.1), (3.2) очевидным образом формулируются для мощностей (без множителя 2 в левых частях), а вектор $\boldsymbol{\eta}$ будет задавать плотность потока мощности.

4. Для вывода ГИУ применим стандартный прием [8, 9]. Пусть $\mathbf{V}^{\mu}=\mathbf{V}^{\mu}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ – формальное решение уравнений (2.2) для бесконечной пластины с лицевыми нагрузками в виде дельта-функций. Тогда из соотношений (2.1), (2.3) и (3.2) получаем для

$$\tau_\alpha^{\mp}=\mp{}^1\!/_2\,\delta_\alpha^{\mu}\delta(\mathbf{x}'),\quad \sigma^{\mp}=\mp{}^1\!/_2\,\delta_3^{\mu}\delta(\mathbf{x}')$$

$$T_\alpha^{\mu}=\delta_\alpha^{\mu}\delta(\mathbf{x}'),\quad T_3^{\mu}=\delta_3^{\mu}\delta(\mathbf{x}')+z_0\delta_\alpha^{\mu}\partial_\alpha\delta(\mathbf{x}') \tag{4.1}$$

$$\mathbf{x}'=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,\quad \mathbf{x}_0\in\Omega,\quad z_0={}^1\!/_2\left(z^{+}+z^{-}\right)$$

следующие соотношения:

$$\delta_3^{\mu}w(\mathbf{x}_0)+\delta_\alpha^{\mu}\left\{u_\alpha(\mathbf{x}_0)+z_0\theta_\alpha(\mathbf{x}_0)\right\}=\int\limits_{\Omega}\left\{u_\alpha^{\mu}T_\alpha+w^{\mu}T_3\right\}\Omega+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left\{u_n^{\mu}Q_n-u_nQ_n^{\mu}+u_\tau^{\mu}Q_\tau-u_\tau Q_\tau^{\mu}+\theta_n^{\mu}M_n-\right.$$

$$\left.-\theta_n M_n^{\mu}+w^{\mu}P_n-wP_n^{\mu}\right\}dl \tag{4.2}$$

Формула (4.2) позволяет определить перемещения в любой точке $\mathbf{x}_0$, если известны перемещения и нагрузки на границе $\partial\Omega$. Устремляя точку $\mathbf{x}_0$ к границе $\partial\Omega$, получаем ГИУ относительно неизвестных краевых условий. Действуя по изложенной схеме, получим фундаментальные решения и ГИУ для задач статики.

5. Найдем изображения Фурье фундаментальных решений уравнений статики (2.2) с правыми частями (4.1) (индекс μ в очевидных случаях опущен)

$$
\begin{aligned}
&f^*(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}')e^{i\mathbf{s}\mathbf{x}'}dx_1'dx_2', \quad \mathbf{s} = \mathbf{i}_\alpha s_\alpha \\
&f(\mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_1x_1'}ds_1 \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\mathbf{x}')e^{-is_2x_2'}ds_2
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

Получаем

$$
\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix}
\begin{Vmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ iw^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ iT_3^* \end{Vmatrix}, \quad
\begin{aligned} &T_\alpha^* = \delta_\alpha^\mu \\ &T_3^* = \delta_3^\mu - iz_0 s_\alpha \delta_\alpha^\mu \end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{i}_\beta p_{\alpha\beta} = e^{-\mathbf{s}\mathbf{x}}\partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1)e^{\mathbf{s}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{i}_\beta p_{\alpha 3} = e^{-\mathbf{s}\mathbf{x}}\partial^2_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)e^{\mathbf{s}\mathbf{x}} \\
&p_{33} = e^{-\mathbf{s}\mathbf{x}}\partial^2_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3)\,\mathrm{grad}\, e^{\mathbf{s}\mathbf{x}}, \quad p_0 = p_{11}p_{22} - p_{12}^2
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&p = p_0p_{33} - p_{22}p_{13}^2 - p_{11}p_{23}^2 + 2p_{12}p_{23}p_{13} \\
&u_\alpha^*(s_1,s_2) = h_\alpha^\mu p^{-1}, \quad w^*(s_1,s_2) = h_3^\mu p^{-1}
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&h_\alpha^\mu = b_{\alpha\beta}T_\beta^* + ib_{\alpha 3}T_3^*, \quad h_3^\mu = b_{33}T_3^* - ib_{\alpha 3}T_\alpha^* \\
&b_{11} = p_{22}p_{33} - p_{23}^2, \quad b_{12} = p_{13}p_{23} - p_{12}p_{33} \\
&b_{13} = p_{12}p_{23} - p_{22}p_{13}, \quad b_{33} = p_0 \quad (1 \leftrightarrow 2)
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Выражения (5.2) задают однородные характеристические полиномы соответствующих операторов в уравнениях (2.2); однородные полиномы четвертого порядка $p_0(s_1, s_2)$, $p_{33}(s_1, s_2)$ являются характеристическими для операторов плоской задачи и задачи изгиба при $\mathbf{D}_2 = 0$, однородный полином восьмого порядка $p(s_1, s_2)$ – характеристический для всей системы (2.2). При $\mu = 1, 2$ $h_\alpha^\mu(s_1,s_2)$ и $h_3^\mu(s_1,s_2)$ – однородные полиномы шестой и пятой степени соответственно, $h_3^\mu(s_1,s_2)$ и $h_3^3(s_1,s_2)$ – однородные полиномы пятой и четвертой степени.

Заметим, что в силу эллиптичности системы уравнений (2.2) [3] уравнение $p(s_1, s_2) = 0$ не имеет вещественных корней. Рассмотрим общий случай некратных характеристических корней λ_k и введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&p(s_1,s_2) = A(\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2,\mathbf{D}_3)\prod_{k=1}^{4}(s_2 - s_1\lambda_k)(s_2 - s_1\bar{\lambda}_k) \\
&p(1,\lambda_k) = 0, \quad \lambda_k \in C, \quad \mathrm{Im}\,\lambda_k > 0, \quad A(\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2,\mathbf{D}_3) = \mathrm{const} \in \mathbb{R} \\
&r_k(s_1,s_2) = -\frac{ip(s_1,s_2)}{s_2 - s_1\lambda_k} = -iA(\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2,\mathbf{D}_3)(s_2 - s_1\lambda_k)\prod_{l\neq k}(s_2 - s_1\lambda_l)(s_2 - s_1\bar{\lambda}_l) \\
&r_k(1,\lambda_k) = 2(\mathrm{Im}\,\lambda_k)A(\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2,\mathbf{D}_3)\prod_{l\neq k}(\lambda_k - \lambda_l)(\lambda_k - \bar{\lambda}_l) \\
&r_k(s_1,s_1\lambda_k) = \frac{\partial p(s_1,s_2)}{\partial s_2}\Big|_{s_2 = s_1\lambda_k}, \quad r_k(1,\bar{\lambda}_k) = -\bar{r}_k(1,\lambda_k)
\end{aligned}
$$

Из равенств (5.4) следует также, что

$$h_\alpha^\mu\left(1,\bar{\lambda}_k\right)=\bar{h}_\alpha^\mu\left(1,\bar{\lambda}_k\right),\quad h_3^\mu\left(1,\bar{\lambda}_k\right)=-\bar{h}_3^\mu\left(1,\bar{\lambda}_k\right)\quad (\mu=1,2)$$

$$h_\alpha^3\left(1,\bar{\lambda}_k\right)=-\bar{h}_\alpha^3\left(1,\bar{\lambda}_k\right),\quad h_3^3\left(1,\bar{\lambda}_k\right)=\bar{h}_3^3\left(1,\bar{\lambda}_k\right)$$

Покажем, как находятся оригиналы (5.1) для перемещений u_α^μ, w^μ.

1°. Положим сначала $s_1\in(-\infty,0]$ и $s_1x_2'\leqslant 0$ во внутренних интегралах (5.1). Интегрируя по $s_2\in[-R,R]$, замыкаем контур интегрирования в нижней комплексной полуплоскости $\operatorname{Im}s_2\leqslant 0$ полуокружностью Γ_R: $s_2=\mathrm{Re}^{i\phi}$. Тогда, при достаточно большом R имеем (суммирование далее ведется от $k=1$ до $k=4$, $\zeta_k=x_1'+\lambda_k x_2'$)

$$\left\{\int\limits_{-R}^{R}-\int\limits_{\Gamma_R}\right\}\left(u_\alpha^\mu\right)^* e^{-is_2x_2'}ds_2=-2\pi i\sum_{s_2=\lambda_k s_1}\mathrm{Res}\left\{\left(u_\alpha^\mu\right)^* e^{-is_2x_2'}\right\}$$

$$\int\limits_{\Gamma_R}\left(u_\alpha^\mu\right)^* e^{-is_2x_2'}ds_2=O\left(R^{-1}\right)\to 0,\quad R\to+\infty\ (\mu=1,2)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h_\alpha^\mu(s_1,s_2)}{p(s_1,s_2)}\,e^{-is_2x_2'}ds_2=-\frac{2\pi}{s_1}\sum\frac{h_\alpha^\mu(1,\lambda_k)}{r_k(1,\lambda_k)}\,e^{-is_1\lambda_k x_2'}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(u_\alpha^\mu\right)^* ds_1ds_2=-2\pi\sum\frac{h_\alpha^\mu(1,\lambda_k)}{r_k(1,\lambda_k)}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{-is_1\zeta_k}}{s_1}ds_1 \tag{5.5}$$

2°. Рассматривая в (5.1) внешние интегралы по лучу $s_1\in(0,+\infty]$, $s_1x_2'\geqslant 0$ получаем выражения, сопряженные с (5.5). Действуя аналогично для других перемещений, получим

$$u_\alpha^\mu=-2\sum\mathrm{Re}\left\{c_{\alpha k}^\mu I_1(\zeta_k)\right\},\quad \mathrm{Re}\left(is_1\zeta_k\right)\leqslant 0$$

$$\left\|\begin{matrix}w^\mu\\ u_\alpha^3\end{matrix}\right\|=-2\sum\mathrm{Re}\left\{i\left\|\begin{matrix}c_{3k}^\mu\\ c_{\alpha k}^3\end{matrix}\right\|I_2(\zeta_k)\right\}\quad(\alpha,\mu=1,2) \tag{5.6}$$

$$w^3=2\sum\mathrm{Re}\left\{c_{3k}^3 I_3(\zeta_k)\right\}$$

$$I_n(\zeta_k)=\int\limits_0^\infty\frac{e^{is_1\zeta_k}}{s_1^n}ds_1=-\frac{\left(-i\zeta_k\right)^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\ln\zeta_k+\gamma-1-\frac{1}{2}-\ \dots\ -\frac{1}{n}+\frac{3\pi i}{2}\right\}$$

$$\left\|\begin{matrix}c_{\alpha k}^\mu\\ c_{3k}^\mu\\ c_{\alpha k}^3\\ c_{3k}^3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2\pi r_k(1,\lambda_k)}\left\|\begin{matrix}h_\alpha^\mu(1,\lambda_k)\\ ih_3^\mu(1,\lambda_k)\\ ih_\alpha^3(1,\lambda_k)\\ -h_3^3(1,\lambda_k)\end{matrix}\right\| \tag{5.7}$$

где (γ – постоянная Эйлера).

Заметим, что вклад в перемещения, отвечающий слагаемому $3\pi i/2$, оказывается нулевым. Именно по этой причине результат одинаков при $x_2'\geqslant 0$ и $x_2'\leqslant 0$. Данный факт можно проверить непосредственно, его физический смысл поясним ниже. Итоговые выражения для перемещений, углов поворота сечений, усилий и моментов примут вид

$$
\begin{aligned}
&w^3 = 2\sum \mathrm{Re}\left\{c_{3k}^3 f(\zeta_k)\right\}, \quad u_\alpha^3 = 2\sum \mathrm{Re}\left\{c_{\alpha k}^3 f'(\zeta_k)\right\} \\
&\theta_\alpha^3 = 2\sum \mathrm{Re}\left\{\lambda_k^{\alpha-1} c_{3k}^3 f'(\zeta_k)\right\} \\
&w^\mu = 2\sum \mathrm{Re}\left\{c_{3k}^\mu f'(\zeta_k)\right\}, \quad u_\alpha^\mu = 2\sum \mathrm{Re}\left\{c_{\alpha k}^\mu f''(\zeta_k)\right\} \\
&\theta_\alpha^\mu = 2\sum \mathrm{Re}\left\{\lambda_k^{\alpha-1} c_{3k}^\mu f''(\zeta_k)\right\} \\
&f(\zeta_k) = \tfrac{1}{2}\zeta_k^2\left(\ln\zeta_k + \gamma - \tfrac{3}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_{\alpha\beta}^3 = 2\sum \mathrm{Re}\left\{q_{\alpha\beta k}^3 f''(\zeta_k)\right\}, \quad Q_{\alpha 3}^3 = 2\sum \mathrm{Re}\left\{q_{\alpha 3k}^3 \zeta_k^{-1}\right\} \\
&Q_{\alpha\beta}^\mu = 2\sum \mathrm{Re}\left\{q_{\alpha\beta k}^\mu \zeta_k^{-1}\right\}, \quad Q_{\alpha 3}^\mu = 2\sum \mathrm{Re}\left\{q_{\alpha 3k}^\mu \zeta_k^{-2}\right\} \\
&\left(Q_{\alpha\beta}^3, Q_{\alpha\beta}^\mu \leftrightarrow M_{\alpha\beta}^3, M_{\alpha\beta}^\mu;\ q_{\alpha\beta k}^3, q_{\alpha\beta k}^\mu \leftrightarrow m_{\alpha\beta k}^3, m_{\alpha\beta k}^\mu\right)
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

где $q_{\alpha\beta k}$, $m_{\alpha\beta k}$, $q_{\alpha 3k}$ – дробно-рациональные функции от характеристических корней λ_k, получаемые подстановкой перемещений (5.8) в выражения (2.4). В точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ перемещения $u_\alpha^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, углы поворота $\theta_\alpha^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, усилия и моменты $Q_{\alpha\beta}^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ и $M_{\alpha\beta}^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ имеют интегрируемую (логарифмическую) особенность. Такое же поведение у функций $u_n^\mu = n_\alpha u_\alpha^\mu$, $u_\tau^\mu = \tau_\alpha u_\alpha^\mu$, $Q_n^3 = n_1^2 Q_{11}^3 + 2n_1 n_2 Q_{12}^3 + n_2^2 Q_{22}^3$, $Q_\tau^3 = n_1 n_2\left(Q_{22}^3 - Q_{11}^3\right) + \left(n_1^2 - n_2^2\right)Q_{12}^3$ ($u \leftrightarrow \theta$, $Q \leftrightarrow M$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\alpha n_\alpha$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_\alpha \tau_\alpha$). Функции $Q_{\alpha\beta}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, $M_{\alpha\beta}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ и $Q_{\alpha 3}^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ (так же, как и функции $Q_{n3}^3 = n_\alpha Q_{\alpha 3}^3$, $P_n^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$) имеют простой полюс; функции $Q_{\alpha 3}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ и $P_n^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ имеют полюс второго порядка.

Сингулярности второго порядка появляются в силу рассмотрения связанной задачи изгиба и растяжения – сжатия – сдвига. В случае симметрично-слоистой пластины $\mathbf{D}_2 = 0$, $z_0 = 0$, и такие особенности не возникают. Это отличие создает дополнительную сложность и требует специального исследования.

6. Фундаментальные решения (5.8) определяются, вообще говоря, с точностью до любого решения уравнений (2.2) с нулевой правой частью. Такие решения однородной системы уравнений могут быть получены, например, методом комплексных потенциалов [3, 5]. Принципиальным является наличие в формулах (5.8) многозначных (логарифмических) функций. Множители $c_{\alpha k}^\mu$, c_{3k}^μ, $c_{\alpha k}^3$, c_{3k}^3 при логарифмах также полностью определяются методом потенциалов, исходя из требования однозначности перемещений, углов поворота, деформаций и кривизн (или продольных усилий и моментов), при условии соответствия главного вектора и главного момента лицевых нагрузок (4.1) и краевых нагрузок (для решения (5.8)) на любом замкнутом контуре, охватывающем точку $\mathbf{x}_0$. Выражения для постоянных совпадают с (5.7). Таким образом, ядра уравнений (4.2) – однозначные функции, а логарифмические составляющие в решениях (5.8) определяют наиболее простой и минимальный набор необходимых многозначных функций для их построения.

Подробный общий анализ 20 соотношений однозначности и соответствия проведен в [5], ниже приведем лишь некоторые из них при нагрузках (4.1)

$$
4\pi\sum \mathrm{Re}\left\{i\begin{Vmatrix} q_{12k}^\mu \\ q_{22k}^\mu \end{Vmatrix}\right\} = \begin{Vmatrix} \delta_1^\mu \\ \delta_2^\mu \end{Vmatrix}, \quad 4\pi\sum \mathrm{Re}\left\{iq_{23k}^\mu\right\} = \delta_3^\mu
$$

$$4\pi\sum \mathrm{Re}\left\{ i\left\| \begin{matrix} \lambda_k^{-1} m_{11k}^{\mu} \\ m_{22k}^{\mu} \end{matrix} \right\| \zeta_k^{\delta_\mu^3} \right\} = z_0 \left\| \begin{matrix} -\delta_1^{\mu} \\ \delta_2^{\mu} \end{matrix} \right\| \quad (\mu = 1,2,3) \tag{6.1}$$

$$\sum \mathrm{Re}\left\{ i\zeta_k^2 c_{3k}^3 \right\} = 0, \quad \sum \mathrm{Re}\left\{ i\zeta_k c_{\alpha k}^{\mu} \right\} = 0, \quad \sum \mathrm{Re}\left\{ i c_{\alpha k}^{\mu} \right\} = 0$$

Последние три равенства уже были учтены в формулах (5.8) при использовании изображений $I_n(\zeta_k)$ обобщенных функций; они выражают однозначность перемещений и углов поворота.

7. Для преобразования уравнений (4.2) с ядрами (5.8) докажем вспомогательное утверждение. Рассмотрим сингулярный интеграл по достаточно гладкому контуру $\partial\Omega$ односвязной замкнутой области Ω (l – произвольно введенная дуговая координата)

$$F_{mk}(f, \mathbf{x}_0) = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\mathbf{x})}{\zeta_k^m} dl, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \mathbf{x}_0 \notin \partial\Omega$$

где $f(\mathbf{x}), \partial_l^{m_1} f$ $(m_1 = 1, 2, ..., m-1)$ – вещественные функции из класса Гельдера на $\partial\Omega$, имеющие гладкое продолжение в области $\Omega_\mp$, остающейся слева (справа) при положительном обходе $\partial\Omega$. Введем функции $g_k(\mathbf{x}) = (\tau_1 + \lambda_k\tau_2)^{-1}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_\alpha\tau_\alpha$ – единичный касательный вектор в точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Лемма. Предельное поведение функции

$$F_{mk}^{\mp}(f, \mathbf{x}_0) = F_{mk}(f, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega_\mp, \quad \mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$$

определяется равенствами (V.p. – главное значение интеграла)

$$\begin{aligned}
&(m-1)F_{mk}^{\mp}(f, \mathbf{x}_0) = F_{m-1k}^{\mp}(\partial_\tau F_k(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0) \\
&F_{1k}^{\mp}(f, \mathbf{x}_0) = \pi i \left\{ \mp F_k(\mathbf{x}_0) + \mathrm{V.p.} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\mathbf{x})}{\zeta_k} dl \right\} \\
&F_{2k}^{\mp}(f, \mathbf{x}_0) = \pi i \left\{ \mp\partial_\tau\big(F_k(\mathbf{x}_0)\big) g_k(\mathbf{x}_0) + \mathrm{V.p.} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial_\tau F_k(\mathbf{x})}{\zeta_k} dl \right\} \\
&F_k(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x}) g_k(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Доказательство следует из теоремы Сохоцкого – Племеля [7] и равенств

$$\frac{dl}{d\zeta_k} = g_k(\mathbf{x}), \quad \frac{f(\mathbf{x})}{\zeta_k^m} = \frac{1}{m-1}\left\{ \zeta_k^{1-m}\partial_\tau F_k(\mathbf{x}) - \partial_\tau\left(F_k(\mathbf{x})\zeta_k^{1-m}\right) \right\}$$

8. Пусть для определенности в уравнениях (4.2) область $\Omega = \Omega_+$ – конечная, односвязная, с достаточно гладкой границей. Устремим точку $\mathbf{x}_0 \in \Omega_+$ к границе области. Используя представления, (5.8), (5.9), формулы (7.1), соотношения (6.1) и равенства ($\mu = 1, 2, 3$)

$$q_{11k}^{\mu} = -\lambda_k q_{12k}^{\mu} = \lambda_k^2 q_{22k}^{\mu}, \quad q_{13k}^{\mu} = -\lambda_k q_{23k}^{\mu}, \quad q_{\alpha 3k}^{\mu} = m_{\alpha 1k}^{\mu} + \lambda_k m_{\alpha 2k}^{\mu}$$

из уравнений (4.2) получаем в итоге

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}_0) = &\int_{\Omega} \left\{ u_\alpha^3 T_\alpha + w^3 T_3 \right\} d\Omega + \sum \mathrm{Re}\left\{ 2\pi i \int_{\partial\Omega} \frac{w(\mathbf{x}) q_{23k}^3}{\zeta_k} d\zeta_k \right\} + \\
&+ \int_{\partial\Omega} \left\{ u_n^3 Q_n + u_\tau^3 Q_\tau + \theta_n^3 M_n + w^3 P_n - u_n Q_n^3 - u_\tau Q_\tau^3 - \theta_n M_n^3 - w P_n^3 \right\} dl
\end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\theta_\alpha(\mathbf{x}_0) = -\int_\Omega \partial^\circ_\alpha\left\{u^3_\beta T_\beta + w^3 T_3\right\}d\Omega - \int_{\partial\Omega}\partial^\circ_\alpha\left\{u^3_n Q_n + u^3_\tau Q_\tau + \theta^3_n M_n + w^3 P_n\right\}dl +$$

$$+\sum \mathrm{Re}\left\{2\pi i \lambda_k^{\alpha-1}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{q^3_{11k}}{\lambda_k}\upsilon_1 - q^3_{22k}\upsilon_2 + \frac{t^3_{11k}}{\lambda_k}\theta_1 - t^3_{22k}\theta_2\right)\frac{d\zeta_k}{\zeta_k}\right\} \tag{8.2}$$

$$\upsilon_\alpha(\mathbf{x}_0) = \int_\Omega\left\{u^\alpha_\beta T_\beta + w^\alpha T_3\right\}d\Omega + \int_{\partial\Omega}\left\{u^\alpha_n Q_n + u^\alpha_\tau Q_\tau + \theta^\alpha_n M_n + w^\alpha P_n\right\}dl +$$

$$+\sum \mathrm{Re}\left\{2\pi i\int_{\partial\Omega}\left(-\frac{q^\alpha_{11k}}{\lambda_k}\upsilon_1 + q^\alpha_{22k}\upsilon_2 - \frac{t^\alpha_{11k}}{\lambda_k}\theta_1 + t^\alpha_{22k}\theta_2\right)\frac{d\zeta_k}{\zeta_k}\right\} \tag{8.3}$$

$$\upsilon_\alpha \equiv u_\alpha + z_0\theta_\alpha,\quad t^\mu_{\alpha\beta k} \equiv m^\mu_{\alpha\beta k} - z_0 q^\mu_{\alpha\beta k}\quad \left(\partial^\circ_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\circ_\alpha}\right) \tag{8.4}$$

В регуляризованном виде в уравнениях (8.1)–(8.3) сингулярные интегралы типа Коши можно понимать в смысле главного значения; при этом левые части уравнений (8.1) и (8.3) следует заменить на $\frac{1}{2}w(\mathbf{x}_0)$ и $\frac{1}{2}\upsilon_\alpha(\mathbf{x}_0)$ соответственно; левая часть уравнения (8.2) не изменится.

Первая краевая задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода (8.2), (8.3) относительно неизвестных усилий и моментов. Ядра уравнений имеют слабую особенность, все интегралы сходящиеся.

Вторая краевая задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений (8.2), (8.3) относительно неизвестных перемещений υ_α срединной плоскости $z = z_0$ в плане, и углов поворота сечений θ_α. Отметим, что в оптимальной системе координат, где норма оператора связанности процессов изгиба и растяжения – сжатия – сдвига минимальна, вообще говоря, $z_0 \neq 0$ [3].

Важно подчеркнуть, что хотя (согласно (5.9)) ядра уравнений (4.2) имеют сингулярность более высокого порядка, чем в классической плоской (изгибной) задаче, дополнительные производные от перемещений типа (7.2) в уравнениях (8.3) уничтожаются за счет условий однозначности и соответствия главного вектора и главного момента нагрузок.

9. Покажем, что полученная система ГИУ имеет нулевой индекс, т.е. является квазифредгольмовой [7, 8]. Обозначим дуговую координату точки $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ через $l_0 = l_0(\mathbf{x}_0)$, $\zeta = x'_1 + ix'_2$, $\phi = \arg\zeta$ и введем непрерывные на $\partial\Omega$ функции

$$f_k(\mathbf{x}) = (\lambda_k - i)\bar{\zeta}\zeta_k^{-1},\quad g(\mathbf{x}) = \frac{d\zeta}{dl}\,\frac{l - l_0}{\zeta} - 1$$

$$\frac{d\zeta_k}{\zeta_k} = \frac{d\zeta}{\zeta} + f_k(\mathbf{x})d\phi = \frac{dl}{l - l_0} + g(\mathbf{x})dl + f_k(\mathbf{x})d\phi \tag{9.1}$$

Систему уравнений (8.2), (8.3) приведем к следующему виду:

$$\mathbf{Ey}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}\int_{\partial\Omega}\frac{\mathbf{y}(\mathbf{x})}{l - l_0}dl + \mathbf{H}_1(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \tag{9.2}$$

$$\mathbf{Ey}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}\int_{\partial\Omega}\frac{\mathbf{y}(\mathbf{x})}{\zeta}d\zeta + \mathbf{H}_2(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \tag{9.3}$$

где

$$\mathbf{y} = (\theta_1, \theta_2, \upsilon_1, \upsilon_2)^T$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{Vmatrix} -\lambda_k^{-1} q_{11k}^3 & q_{22k}^3 & -\lambda_k^{-1} t_{11k}^3 & t_{22k}^3 \\ -q_{11k}^3 & \lambda_k q_{22k}^3 & -t_{11k}^3 & \lambda_k t_{22k}^3 \\ \lambda_k^{-1} q_{11k}^1 & -q_{22k}^1 & \lambda_k^{-1} t_{11k}^1 & -t_{22k}^1 \\ \lambda_k^{-1} q_{11k}^2 & -q_{22k}^2 & \lambda_k^{-1} t_{11k}^2 & -t_{22k}^2 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}\left(0, 0, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = -\sum \mathrm{Re}\left(2\pi i \mathbf{A}_k\right)$$

$\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\mathbf{H}_1(\mathbf{y})$, $\mathbf{H}_2(\mathbf{y})$ – операторы, вполне непрерывные в пространстве $L_2(\partial\Omega)$ (в силу непрерывности ядер (9.1)), $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ – правая часть уравнений, определяемая заданными краевыми усилиями и моментами на $\partial\Omega$.

Тогда для индекса системы сингулярных уравнений [7] (нормированное на 2π приращение аргумента комплексной функции $\det(\mathbf{E} - \mathbf{A})/\det(\mathbf{E} + \mathbf{A})$ при положительном обходе $\partial\Omega$) получаем

$$\mathrm{ind} \equiv \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(\mathbf{E}-\mathbf{A})}{\det(\mathbf{E}+\mathbf{A})}\right]_{\partial\Omega} = 0, \quad \det(\mathbf{E} \mp \mathbf{A}) \neq 0$$

Четыре ГИУ (8.2), (8.3) или (9.2), (9.3) принадлежат к наиболее простому классу систем сингулярных уравнений с нулевым индексом, все альтернативы Фредгольма для них выполнены [7,8].

10. Совершенно аналогично рассматриваются уравнения для пластины, занимающей в плане внешнюю область $\Omega = \Omega_-$. В уравнениях (8.2), (8.3) или (9.2), (9.3) изменяется лишь направление обхода контура и знаки соответствующих интегралов.

11. Укажем теперь некоторые свойства фундаментальных решений (5.8). По виду изображений Фурье (5.3), (5.4) можно показать, что

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \equiv \begin{Vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & w^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & w^2 \\ -v_1^3 & -v_2^3 & -w^3 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{M}^T = \mathbf{M} \qquad (11.1)$$

Заметим, что множитель ε^{-1} при продольных нагрузках (2.1), (4.1) для краткости опущен; вообще говоря $w^\alpha = -\varepsilon^{-1} v_\alpha^3$. Видно, что заданная на обоих лицевых поверхностях симметрия нагрузок в (4.1) существенного значения не имеет. Например, если положить

$$\tau_\alpha^+ = \delta_\alpha^\mu \delta(\mathbf{x}'), \quad \sigma^+ = \delta_3^\mu \delta(\mathbf{x}'), \quad \sigma^- = 0, \quad \tau^- = 0$$

$$T_\alpha = \delta_\alpha^\mu \delta'(\mathbf{x}'), \quad T_3 = \delta_3^\mu \delta(\mathbf{x}') + z^+ \delta_\alpha^\mu \partial_\alpha \delta(\mathbf{x}')$$

то в итоговых ГИУ следует лишь заменить z_0 на z^+, и продольные перемещения v_α^μ будут отвечать лицевой поверхности $z = z^+$.

Равенства (11.1) определяют симметричный тензор Грина в задачах статики слоистых пластин с произвольной укладкой и анизотропией слоев. Для симметричной укладки $z_0 = 0$, смешанные жесткости $\mathbf{D}_2 = 0$, перемещения $w^\alpha = 0$, $v_\alpha^3 = 0$ и $p = p_0 p_{33}$, т.е. характеристические корни λ_k распадаются на независимые пары для изгибной и плоской задач. В этом случае полученные фундаментальные решения совпадают с известными [8, 13].

12. В заключение перечислим основные выводы. Построен набор фундаментальных решений статической задачи для несимметрично-слоистой анизотропной пластины, отличающейся тем, что процессы изгиба и растяжения – сжатия – сдвига связаны. На основании теоремы взаимности выведены четыре ГИУ (8.2), (8.3) основных краевых задач. Компоненты контурных интегралов в правых частях ГИУ можно, по аналогии с классическими задачами [8, 11], называть потенциалами перемещений, угла поворота, продольных усилий, изгибным и сдвиговым потенциалами пластинки соответственно. Первая краевая задача сведена к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с интегрируемой особенностью ядра, вторая краевая задача сведена к системе сингулярных квазифредгольмовых уравнений второго рода. Интегральные уравнения остальных краевых задач получаются из соответствующих комбинаций ГИУ (8.1)–(8.3). Хотя фундаментальные решения формально приводят к сингулярностям второго порядка, вид полученных уравнений такой же, что у хорошо изученных ГИУ для задач классического изгиба монопластин [11, 13] и плоской задачи [8, 10, 11]. Основное отличие заключается в увеличении размерности, так как рассматриваются связанные процессы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01098).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Caillerie D.* Plaques élastiques minces à structure périodique de période et d'épaisseur comparables // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. 2. 1982. T. 294. № 3. P. 159–162.
2. *Зорин И.С., Ромашев Ю.А.* О напряженно-деформированном состоянии слоистых плит несимметричного строения // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 88–96.
3. *Захаров Д.Д.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений теории упругости для тонкой многослойной анизотропной пластинки произвольной структуры // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 742–749.
4. *Захаров Д.Д.* Двумерные динамические уравнения тонкой несимметрично-слоистой упругой пластины с анизотропией общего вида // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 1. С. 50–53.
5. *Захаров Д.Д.* Постановка краевых задач статики тонких упругих асимметрично-слоистых анизотропных пластин и решение с помощью функций комплексного переменного // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 642–651.
6. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
8. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
9. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
10. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике / Под ред. Т. Круза и Ф. Риццо. М.: Мир, 1978. 210 с.
11. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
12. *Tottenham H.* The boundary element method for plates and shells // Development in boundary element methods / Ed. by P.K. Banerjee and R. Batterfield. London: Appl. Sci. Publ., 1979, V. 1. P. 173–205.
13. *Копейкин Ю.А.* Интегральные уравнения задач об изгибе ортотропных пластинок // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 175–178.

Москва

Поступила в редакцию
8.II.1996